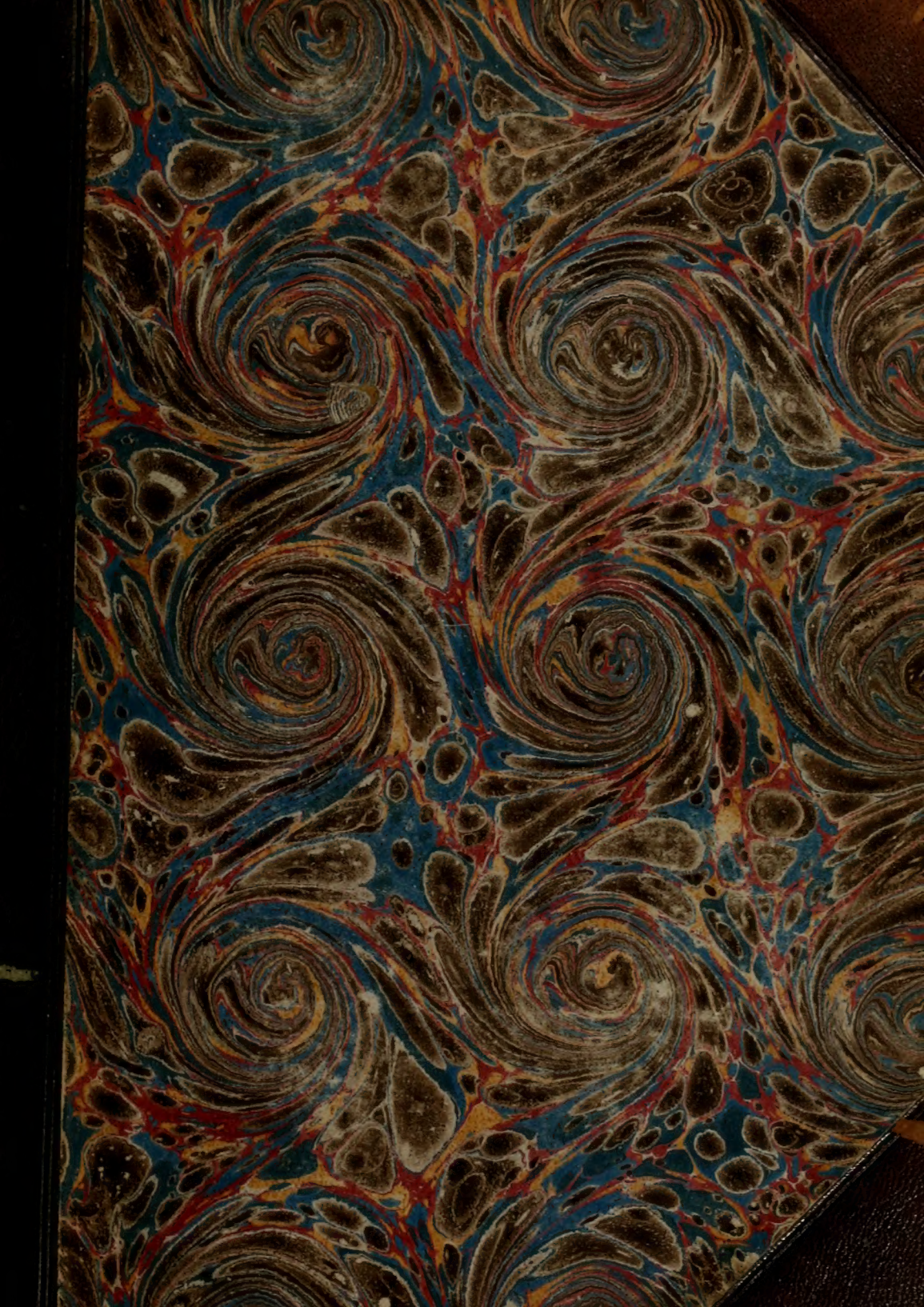


S. 1305. B. 31.

Abhandlungen

der

physikalischen Klasse

der

Königlich-Preufsischen

Akademie der Wissenschaften

aus

den Jahren 1814—1815.

Berlin

in der Realschul-Buchhandlung.

1818.

Abhandlungen

der

physikalischen Klasse

der

Königlich-Preußischen

Akademie der Wissenschaften

aus

den Jahren 1814—1815.

Berlin

in der Realschul-Buchhandlung.

1818.

Inhalt.

1. Gerhard's Beobachtungen über die in Kristallen oder in Kristallmassen eingeschlossenen fremden Körper . . . . . Seite 1
2. Desselben Beiträge zur Geschichte des Weissteins, des Felsit und anderer verwandten Arten . . . . . — 12
3. Klaproth's chemische Untersuchung des Arsenikerzes von Reichenstein . . . — 27
4. Thaer: Gegenwärtiger Standpunkt der Theorie über den Ertrag und die Erschöpfung der Ernten im Verhältnifs zu der Thätigkeit und dem Reichthum des Bodens . — 35
5. S. F. Hermbstädt's Versuche und Beobachtungen über einen diabetischen Urin . — 53
6. Desselben Versuche und Bemerkungen über die Verdunstung sogenannter feuerbeständiger Körper . . . . . — 63
7. L. v. Buch über den Hagel . . . . . — 73
8. Desselben Bemerkungen über das Berninagebirge in Graubündten . . . . — 105
9. Erman über den wechselseitigen Einfluss von Elektricität und Wärmethätigkeit . — 123
10. Desselben Bemerkungen über das Verhältnifs des unmagnetischen Eisens zur tellurischen Polarität . . . . . — 134
11. K. A. Rudolphi: Einige Bemerkungen über den sympathischen Nerven . . . — 161
12. Derselbe über Hornbildung . . . . . — 175
13. Desselben Beschreibung des Gehirns von einem Kinde, welchem das rechte Auge und die Nase fehlten . . . . . — 185
14. Lichtenstein: Die Werke von Marcgrave und Piso über die Naturgeschichte Brasiliens, erläutert aus den wieder aufgefundenen Originalzeichnungen . . . — 201
15. H. F. Link über die Theorien in den Hippokratischen Schriften, nebst Bemerkungen über die Aechtheit dieser Schriften . . . . . — 223
16. Fischer's kritische Untersuchung einiger Erscheinungen, welche als Wirkung der galvanischen Action erklärt worden sind im Allgemeinen, und über Metallreduction auf nassem Wege ins Besondere . . . . . — 241
17. C. S. Weifs übersichtliche Darstellung der verschiedenen natürlichen Abtheilungen der Krystallisationssysteme . . . . . — 289

Beobachtungen

über

die in Kristallen, oder in Kristallmassen eingeschlossenen fremden Körper.

Von Herrn Gerhard *).

Unter den verschiedenen Erscheinungen, welche die kristallisirten Mineralien darbieten, sind die in ausgebildeten Kristallen oder in Kristallmassen eingeschlossenen fremden Körper sehr merkwürdig. Die Anzahl der ersten, wo fremde Körper sich in völlig ausgebildeten Kristallen befinden, ist nicht häufig, und bei der betrachtlichen Menge von Kristallen, welche ich zu sehn und zu beobachten Gelegenheit gehabt habe, finden sich dieselben vorzüglich in den Quarzkristallen, so wie man auch zuweilen Kristalle von Spiefsglanz in Schwerspathkristalle, auch Glimmerblätter in Scapolith und Pinitkristallen eingeschlossen antrifft. Die in den Quarzkristallen eingeschlossenen Mineralien sind von verschiedener Art; entweder es sind ausgebildete Kristalle anderer Steinarten, oder es sind amorphische Steinarten, oder auch krystallisirte metallische Substanzen. Zu erstern rechne ich besonders ganz ausgebildete Kristalle von Epidot, Strahlstein, Feldspath, Chlorit und einem noch ganz unbekannten Mineral. So findet man zu Allemont die regulärsten Epidotkristalle in Quarzkrystallen, der Prasem enthält in regulären Quarzkristallen Kristalle von Strahlstein. Ich besitze ein wasserklares Stück

*) Vorgelesen den 5. Mai 1814.

Bergkristall von Allemont, in welchem ein höchst regulärer Kristall von Feldspath eingeschlossen ist. In Schlesien in der Gegend von Schreiberhau kommen Amethystkristalle vor, in welchen sich Kristallfäden von Titan befinden, und welche man dort Haar-Amethyst nennt. Der nach den Bemerkungen von Haüy aus kleinen 6seitigen Säulen bestehende erdige Chlorit, oder die sogenannte Sammterde, ist in den Kristallen des Quarzes, des Feldspaths am Gotthardt und zu Moschel-Landsberg häufig. An letzterm Orte hat Herr Collini vermocht zu behaupten, dafs ein Quarzkristall über den andern eingeschlossen sei, und das blofs äufsere Ansehn eines solchen Kristalls, welcher inwendig einen grünen Kristall und auf diesem einen wasserklaren zeigt, kann diese Idee erregen; wenn man aber einen dergleichen Kristall nach der Länge durchschneidet, so sieht man deutlich dafs in dem Quarzkristall sich blofs eine Lage von Chlorit befindet, welche diesen Augenirrthum bewirkt. In den Pinit und einigen Scapolithkristallen sind Glimmerblätter mitten in ihnen eingewachsen. Am merkwürdigsten aber hat mir ein regulärer durchsichtiger Quarzkristall von Allemont geschienen, welcher äufserlich mit vielen Glimmerblättern bedeckt ist, und an der Spitze mehrere völlig ausgebildete Kristalle eines fremden Minerals enthält. Diese Kristalle scheinen reguläre dreiseitige Prismen zu seyn, welche an beiden Enden abgestumpft sind, und wenn das Licht in einer bestimmten Richtung darauf fällt, einen metallischen Glanz äufsern.

Wenn man dergleichen Kristalle, die andere in sich eingeschlossen führen, noch so genau beobachtet, so wird man in Absicht der äufsern Figur des einschliefsenden und selbst auch des eingeschlossenen gegen die gewöhnliche Form von beiden keinen Unterschied antreffen. Anders scheint es sich in Absicht der Bestandtheile zu verhalten, wenigstens sollte man nach der vom Herrn Buchholz unternommenen Untersuchung des Prusem meinen, dafs in den Bestandtheilen des eingeschlossenen Kristalls eine Veränderung vorgegangen. Nach einer von Laugier vorgenommenen Untersuchung des Strahlsteins vom Zillerthal enthält derselbe Kiesel 50, Talk 19, Thon 0,75, Kalk 9,25, Eisen 15, Chrom 3, Wasser 5, nebst einer Spur von Kali, und nach Herrn Buchholz sind in dem Prasem enthalten Kiesel 98,5, Eisen 1, Thon und Mangan 0,5, und doch ist die Verbindung zwischen dem Quarz und dem Strahlstein im Prasem höchst innig, so dafs die gewöhnliche keilförmige Absonderung aufs deutlichste aus dem büschelförmig auseinanderlaufenden Bruche des Strahlsteins entsteht, der oft ganz für sich

hervortritt und, in die Kristalle des Prasem hineingehend, die Kristallisation trübt, und man kann also wohl gewifs annehmen, dafs unter dem von Herrn Buchholz untersuchten Prasem auch Strahlstein gemengt war. Wenn ferner das Schillern der Katzenaugen von in selbigen befindlichen Amianthfäden wirklich herrührt, so hat doch Herr Klaproth bei dessen Zerlegung nichts von der im Amianth befindlichen Talkerde entdeckt. Kann und darf man diese Untersuchung des Prasem als richtig annehmen, so wäre es ein Beweis dafs die Bestandtheile eines Kristalls, je nachdem er isolirt oder in einander gemengt ist, bei vollkommen gleicher Form sich sehr verschieden verhalten können, welches zu nicht unwichtigen Folgen für das oryctognostische System führen würde.

Aufser den ausgebildeten fremdartigen Kristallen, welche man in andern ausgebildeten Kristallen vorfindet, trifft man in den letztern auch solche fremde Körper an, welche man eigentlich nicht zu Kristallen rechnen kann; dahin gehören unter andern die in Quarzkristalle eingewachsnen Fäden und Blätter von Asbest und Bergleder, wie auch mehrere moosartige Gestalten, welche in regulär gebildeten Kristallen vorkommen, und welche von der Natur des Chlorit oder der Hornblende zu seyn scheinen, so wie ich auch einen Quarzkristall besitze, in welchem Wolfram deutlich eingewachsen ist.

Allein viel häufiger als diese beiden Erscheinungen ist das Vorkommen völlig rein ausgebildeter Kristalle in Kristallmassen, welche in ihren Bestandtheilen, selbst wenn sie rein kristallisirt sind in ihren Formen von den fremden Kristallen, welche sie in sich führen, himmelweit unterschieden sind. Ich will hier gar nicht von den so verschiedenen Kristallen reden, welche man im Granit, im Gneufs, in dem Glimmerschiefer, im Sienit antrifft, weil diese, ob zwar lauter Kristallmassen, aus Theilen verschiedener Steinarten bestehen, sondern ich will nur die Kristallmassen nehmen, welche homogen sind, und wohin man die Lager, welche aus Quarz, aus primitiven oder Urkalk, aus Speckstein als Grundmasse des Serpentin, aus Weifsstein bestehen, auch die Lager von Talk- und Lavetstein nehmen mufs. Wem ist unbekannt, dafs man in den Quarzlagern Glimmer, Granit, Schörl, Hornblende, Turmalinkristalle vorfindet. In dem Weifstein kommen Granaten, Schörl, Cyanit, Glimmer häufig vor. Der Serpentin ist öfters voller Granaten, Glimmer und Amianth. Besonders ist der Urkalk an solchen fremden Kristallen reich, da man in selbigen Quarz, Hornblende,

Glimmer, Strahlstein, Epidot, Talk, Amianth, Tremolith, Granat antrifft. Aufserdem enthalten die Lager, welche aus solchen Kristallmassen bestehn, öfters auch amorphische fremde Mineralien, wozu in Quarz Hornstein, in dem Urkalk aber der edle Serpentin, Hornstein und Speckstein gehören. Es mögen nun dergleichen fremde Kristalle in wirklich ausgebildeten Kristallen oder Kristallmassen sich befinden, so fällt deutlich in die Augen, dafs sie nicht von aufsen in dieselben hereingebracht, sondern in ihnen selbst gebildet sind, weil es sonst nicht möglich wäre, dafs sie die reguläre Form der überaus scharfen Kanten, Spitzen und Ecken besitzen kannten, welche man an ihnen beobachtet. Es ist indefs keine leichte Frage, den Ursprung und die Bildung dieser Kristalle auf eine genügende dem bishero bekannten Gesetzen der Chimie angemessenen Art zu erklären, besonders wenn man dabei folgende auf sichere Erfahrungen sich gründende Umstände in Erwägung zieht.

1) In den Kristallen und in den Kristallmassen findet man häufig keine Spur eines Bestandtheils, welche die eingeschlossenen Körper enthalten. Der in dem Quarz und in dem Urkalk eingeschlossene Feldspath, Glimmer und Turmalin besitzt einen starken Kaligehalt, welcher dem Quarz und dem Urkalk ganz fehlet.

2) Die eingeschlossenen Kristalle sind nicht allein in ihren primitiven und in ihren secondären Formen, sondern in der qualitativen und quantitativen Beschaffenheit ihrer Bestandtheile, in ihrem Verhalten gegen das Feuer und in ihren physischen Eigenschaften verschieden, und brechen doch sehr nahe bei einander. So findet man in dem Kalklager bei Schmiedeberg im Fürstenthum Jauer Stufen von wenigen Zoll Länge und Dicke, in denen Epidot, Glimmer, Strahlstein, Granat zusammen vorkommen.

3) Nach den bisherigen mit diesen fremden in Kristallmassen befindlichen Steinen vorgenommenen chimischen Zerlegungen mufs man glauben, dafs das Muttergestein, wenn sie äufserlich von demselben gänzlich gereinigt sind, auf ihre Form, auf ihre Bestandtheile, auf ihre physische Eigenschaften keinen Einflufs habe und in diesen Dingen nichts bei ihnen ändern. In Absicht der Form und der physischen Eigenschaften, als eigenthümliche Schwere, Electricität, selbst in dem Verhalten im Feuer, kann man dies wohl mit Gewifsheit behaupten. Ich habe Turmaline in Quarz, in Speckstein, in Glimmerschiefer untersucht und gefunden, dafs sie weder in der Form, noch in der Electricität, noch in dem eigentlichen Gewichte

von einander verschieden sind, ja sogar vor dem Löthrohr zeigen sie dieselben Erscheinungen. Eben so habe ich es bei dem Strahlstein, bei dem Epidot, bei der Hornblende gefunden, es mochte auch das Muttergestein in allen seinen Eigenschaften nach noch so verschieden seyn. Es ist indefs allerdings zu bedauern, dafs bei der chimischen Zerlegung dieser Steinarten ihr Muttergestein nicht immer beobachtet worden, weil sich vielleicht hieraus erklären liefse, woher die Verschiedenheit in dem quantitativen Verhältnifs der einfachen Erden, welche bei verschiedenen Zerlegungen derselben Steinart bemerkt werden, rühre. Es ist mir indefs doch höchst wahrscheinlich, dafs die benannten Verschiedenheiten mehr von dem Chimisten oder von noch auflebendem Muttergestein herrühren; denn einmal findet es sich doch, dafs die Zerlegungen derselben Steinart, welche von vorzüglichen Chimisten, einem Klaproth und Vauquelin, gemacht worden, auch in dem quantitativen Verhältnifs der einfachen Erden sehr genau übereinstimmen, und aufserdem habe ich bei dem Verhalten der Hornblende, des Epidot, der Turmaline aus ganz verschiedenem Muttergestein vor dem Löthrohr sogar in Rücksicht der zum Schmelzen erforderlichen Zeit keinen Unterschied beobachtet, welches also auf die Gleichheit der Bestandtheile sogar in quantitativer Rücksicht schliefsen läfst.

Erwägt man diese Beobachtungen mit nöthiger Aufmerksamkeit, so erschweren sie die Bildungsart dieser angeschlossenen Kristalle ungemein. Dafs sie nicht von aufsen in ihr Muttergestein hereingekommen, ist schon oben bemerkt und erwiesen, folglich mussen sie in ihm selbst und bei seiner Bildung oder kurz nach derselben entstanden seyn. Allein hier entsteht so manche schwer zu beantwortende Frage. Woher kommt es, dafs diese Kristalle Bestandtheile enthalten, welche ganz oder doch gröfstentheils dem Muttergestein fehlen? Wie geht es zu, dafs die in einem rein ausgebildeten Kristall eingeschlossene fremde die Kristallform im ersten nicht ändern? Wie können Kristalle, welche in Form und quali- und quantitativen Bestandtheilen in physischen Eigenschaften so sehr von einander abweichen, in demselben Muttergestein in nicht zollweiten Entfernungen von einander haben anschiefsen können? Der Neptunist wird sich aus diesen Schwierigkeiten dadurch herauswickeln zu können glauben, wenn er behauptet, das Muttergestein und die in selbigem befindlichen Kristalle hätten sich in dem ganz allgemeinen Auflösungsmittel oder seinem Urmeere befunden, und wären aus demselben zugleich abgeschieden worden. Allein

wenn man auch diese mehr als abenteuerliche Hypothese eines Urmeers auf einen Augenblick annehmen wollte, obgleich Herr Breislack dieselbe in seiner vortrefflichen Geologie fast mathematisch widerlegt hat, und welches ich auch in meiner den 6ten August 1812 vorgelesenen Abhandlung von der Kristallisirung der Urgebirge widerlegt zu haben glaube, so stehen doch der Bildungsart dieser Körper auf diesem Wege noch manche sehr wichtige Schwierigkeiten im Wege, welche nach bisherigen bekannten chemischen Erfahrungen sich wider sie äufsern. Man müfste nach dieser Theorie als sicher annehmen, beides, das Muttergestein und die darin eingeschlossenen Kristalle, wären in der allgemeinen Flüssigkeit, und zwar letztere schon als solche, das heifst z. B. als Granat, als Schörl etc. aufgelöst enthalten gewesen. Ob nun zwar der Chimist und die Natur in demselben Wasser mehrere und von einander verschiedene Salze auflösen kann, so findet sich doch, dafs nach den verschiedenen Cohäsionskräften, nach den verschiedenen Graden der Auflöslichkeit, nach dem verschiedenen eigenthümlichen Gewichte dieser aufgelösten Substanzen, die Scheidung derselben sehr verschieden sei. Allein wie sehr sind Epidot, Glimmer, Granat, Quarz, Feldspath etc. in diesen Eigenschaften von einander verschieden, und wie ist es also möglich, dafs diese ihrer Natur nach so verschiedenen Körper zu gleicher Zeit an denselben Orten in den kürzesten Entfernungen sich absetzen können? Was mufs das für ein Menstrum seyn, welches zugleich die einfachen Erden, Laugensalze, Metall-Oxyde auflösen, und dieselben in besondere Verbindungen zugleich und auf einmal wieder absetzen kann? Wem ist ein Auflösungsmittel bekannt, welches ein ganzes Granat-, ein ganzes Glimmerblatt in flüssiger Gestalt in sich nehmen könnte? Hierzu kommt noch eine Beobachtung, welche ich bei Kristallisationen einiger solchen Laugen, welche verschiedene Arten von Salzen enthalten, bei dem Anschufs derselben in grofsen Quantitäten zu machen Gelegenheit gehabt habe. Es ist bekannt, dafs die Laugen der Salpeter-Erden keinen reinen, sondern einen mit mehr oder weniger Menge Kochsalz gemengten Salpeter enthalten. Wenn man nun dergleichen Laugen im Grofsen kristallisiren läfst, so dafs man aus einem Kristallisir-Gefäfse 1 Ct. und mehr Salpeter in gröfsen regulär ausgebildeten Kristallen enthält, so wird eine Auflösung auch der gröfsten Kristalle in destillirtem Wasser von einer Auflösung des Silbers oder des Bleies in Salpetersäure stark getrübt, und es fällt Hornblei oder Hornsilber nieder. Nimmt man aber dergleichen grofse Salpeterkristalle,

wäschst sie mit destillirtem Wasser sorgfältig ab, löset sie darauf in destillirtem Wasser, so bringen jene metallische Auflösungen kaum eine Trübung zuwege. Hieraus folgt, dafs die Kristalle des Kochsalzes sich nur an der äufsern Oberfläche der Salpeterkristalle angesetzt, aber nicht ihre Substanz durchdrungen haben, welches doch der Fall bei fremden Steinkristallen ist, welche in rein ausgebildeten Steinkristallen vorkommen. Eben so enthalten die Kiese, welche man auf Vitriol benutzt, nach des berühmten Bergraths Henkel Beobachtungen, Thonerde, welche, mit der Schwefelsäure verbunden, Alaun bildet. Allein wenn man die grofsen Anschufsgefäfse, in welchen eine solche Vitriol- und Alaunhaltige Lauge kristallisirt, beobachtet, so wird man mit bloſsen Augen die auf den grünen oder bläulichen Vitriolkristallen aufsitzenden achtseitigen wasserklaren Alaunkristalle deutlich wahrnehmen, und sie sind mit den Vitriolkristallen so locker zusammenhängend, dafs man ganz kleine Alaundrusen ohne Verletzung der Vitriolkristalle davon abnehmen kann. Hier hat also abermals ein Salz das andere nicht durchdrungen, sondern sich auf die Fläche angesetzt. Alle diese Umstände beweisen also klar, dafs jene Bildungsart nicht die wahre seyn kann.

In der oben angeführten den 5. August 1812 vorgelesenen Abhandlung bin ich bemüht gewesen zu beweisen, dafs die festen und flüssigen Theile unserer Erdkugel durch die Festwerdung der verschiedenen mit einander gemengten Gasarten ihre Bildung erhalten hätten, und dafs man bei Annahme dieser Theorie allein den Schwierigkeiten vorbeugen kann, welche mit der Theorie der Neptunisten oder der Vulcanisten verbunden sind. Zu den Gründen, die ich damals angeführt, um zu beweisen, dafs wirklich die Gasarten, wenn sie von der mit ihnen verbundenen Feuermaterie, welche ihnen die Gasform gegeben, in Erden übergehn konnten, kann ich noch zwei Beobachtungen zusetzen, von denen die eine Herr Vauquelin, die andere ich selbst zu machen Gelegenheit gehabt habe. Man brachte Herrn Vauquelin feine Glasfäden, welche sich an der Mündung oder an der sogenannten Gicht eines hohen Ofens angesetzt hatten, und welche nach seinen Versuchen aus Kieselerde bestanden. Nun wird wohl Niemanden einfallen zu behaupten, dafs die Kieselerde als solche in der Hitze eines hohen Ofens sich verflüchtigen kann, zumal nach den mit Sauerstoffgas vor dem Löthrohr angestellten Versuchen, die Kieselerde in diesem weit höhern Feuergrade keine Verflüchtigung erleidet. Es bleibt also nichts übrig,

als dafs sich die Kieselerde hier aus Dämpfen gebildet, welche aus den in dem Ofen befindlichen Materialien hervorgebracht worden, und welche an der Gicht sich coagulirt hatten.

Eben so hat man bei dem hohen Ofen zu Wzieskow ohnweit Creuzburg in Ober-Schlesien folgende merkwürdige Erscheinung gehabt. Dieser Ofen, so wie fast alle der dortigen Provinz, werden mit den bekannten braunen zinkhaltigen Eisenerzen von Tarnowiz betrieben. Bei dem besten Gange desselben bemerkten die Arbeiter, dafs die Düsen an den Balgen mit einem haarförmigen Ueberzuge behängt wurden, welches kaum eine Viertelstunde dauerte, und wobei nach ihrer Versicherung kein sichtbarer Dunst oder eine Flamme aus der Form herausschlug. (Es ist zu bedauern, dafs der Officiant nicht anwesend war, denn die unverständigen Arbeiter kehrten diesen Ueberzug ab, so dafs nur die kleine Portion, die ich vorzuzeigen die Ehre habe, davon gerettet wurde. Diese Materie besteht aus sehr feinen eisenschwarzen Fäden, welche unter einer achroamatischen 100 mal im Durchmesser vergröfsernden Linse, keine ausgezeichnete Gestalt, aber einige Durchsichtigkeit zeigen, und ist hin und wieder mit kleinen Eisenkörnern gemengt. Werden diese völlig abgesondert, und übergiefst man diese Fäden mit gewöhnlicher Salzsäure, so zieht sie etwas weniges Eisen heraus, welches sich durch die bekannte Blutlauge als Berliner Blau niederschlagen läfst, und die Fäden nehmen eine hellgraue Farbe an. Vor dem Löthrohr und in einer Hitze, welche in 2 bis 3 Minuten Gold, Silber und Roheisen, ja Gufsstahl schmelzt, laufen sie in eine schwarze glasige, aber undurchsichtige Schlacke gleich bei Berührung der Flamme zusammen. Da die Arbeiter bei der Bildung dieser Materie keinen sichtbaren aus der Form hervorkommenden Dampf, auch keine Flamme beobachtet haben, so ist es wohl höchst wahrscheinlich, dafs diese Materie gafsförmig gewesen ist, und da sie vor dem Löthrohr eine Schlacke giebt, so mufs man wohl die Gegenwart erdiger Theile in ihr annehmen; und also glaube ich, dafs sie eben so wie die bekannten Breislackschen Pyroxen-Kristalle aus einer Gasart entstanden sind. Nimmt man also die in jener Abhandlung aufgeworfene Theorie an, so werden sich die Erscheinungen, von welchen hier die Rede ist, vielleicht mit mehr Wahrscheinlichkeit erklären lassen. Wie nämlich das aus Sauer- Wasser-, Kohlen- und Salpeterstoff bestehende Gemenge höchst wahrscheinlich durch einen ungeheuern elektrischen Procefs coagulirt wurde, und sich vielleicht aus den einzelnen Basen dieser Gasarten, oder aus der

Ver-

Verbindung mehrerer, die Kiesel-, Kalk-, Thon- und Bittererden und die Alkalien bildeten, welche wir in den Schichten unsers Planeten antreffen, so konnte ein Theil dieser Produkte rein und ungemengt bleiben, von andern aus diesen hervorgebrachten Substanzen wieder zusammengesetzt werden, und auf solche Art die ersten feinsten Grundtheile der fremden Kristallinen-Körper bilden, welche wir in ihnen antreffen, und letztere mit ersteren ein Gemenge machen. Es ist aber auch natürlich, ja selbst gewifs, dafs aus der Vermischung des Sauer- und Wasserstoffs Wasser gebildet wurde, und also Wasser zum Vorschein kam, so dafs also dieser ungeheure Niederschlag eine breiartige Masse darbot, in welcher eine Verschiebbarkeit der Theile stattfinden konnte. Es konnten sich nach den Verwandtschafts-Gesetzen die kleinen Theile des Quarzes, des Feldspaths, des Glimmers und andrer hier berührten Steinarten anziehen und mit einander verbinden, und gröfsere Massen bilden. War dieser Brei fester, so konnten keine ausgebildete Kristalle erfolgen; war er mit Wasser gemengt, und erhielten die Theile dadurch eine leichtere Verschiebbarkeit, so konnten auch diese reguläre Formen entstehen. So war es möglich, dafs in einem Muttergestein an demselben Orte und in einer kleinen Entfernung sich Kristalle erzeugen konnten, welche an Form, Härte, Bestandtheilen, physischen Eigenschaften sehr verschieden waren. Die über diese Kristallisationen gemachte Bemerkungen scheinen diesen Gedanken fast überall günstig zu seyn. Im Granit sind ausgebildete Kristalle selten, und noch mehr Kristalle, welche von andrer Natur sind als diese Gebirgsart selbst. Bei dem Granit war also die Masse dichter, die Theile nicht so leicht verschiebbar, hatte auch weniger Wasser als in dem weicheren Gneus, Glimmerschiefer und Urkalk, in welchen auch mehrere eingeschlossene fremde Kristalle sich befinden. Eben so ergiebt sich von selbst, dafs diese Kristalle nicht durch die ganze Masse des Muttergesteins sich verbreiten konnten, vielmehr blofs in einzelnen Gruppen, wie es sich wirklich in der Natur zeigt, anschiefsen mufsten. Eben so ist leicht erklärbar, wie und warum in dem umgebenden Muttergestein, Bestandtheile entweder ganz oder doch gröfstentheils vermifst werden, welche sich in den eingeschlossenen Kristallen finden, und umgekehrt warum manche Bestandtheile aus dem Muttergestein in dem eingeschlossenen Kristall fehlen, weil die Elemente der ersten und auch der letztern zugleich entstanden. Endlich darf man sich auch gar nicht wundern, wenn man in ausgebildeten Kristallen eine Steinart anderer ausgebildeter Kristalle findet. Die

Bildung der Kristalle ist zuverlässig nicht auf einmal, sondern nach und nach erfolgt. Ich habe dies deutlich in einem 1779 zu Hohen-Giersdorff eröffneten alten Stollen bemerkt, in welchem vor Ort eingehauene Berge von Gneus lagen, welche eben so wie die Forst dieser Stollen mit Kalkspathkristallen der 3seitigen Pyramide überzogen waren, von denen einige die völlige Härte dieser Kristalle hatten, andre aber so weich waren, dafs sie zwischen den Fingern zerflossen. Wenn also in einer Masse, aus der sich ein grofser Kristall als Steinart bilden konnte, sich wenige Elementar-Theile einer andern befanden, so konnten diese sich anziehen, und also den kleinen Kristall in den grofsen formiren. Die von unserm berühmten Mitbruder, dem Herrn von Buch, über den Leucit angestellten Erfahrungen scheinen mir dieser ganzen Theorie ein grofses Gewicht beizulegen. Dieser scharfsinnige Gelehrte hat, so viel es bei solchen Gegenständen möglich ist, so mit Evidenz erwiesen, dafs der Leucit nicht als solcher ausgeworfen, sondern in der breiartig fliefsenden Lava erst durch die Anziehung seiner in ihr befindlichen Theile hervorgebracht worden. Selbst die in den mancherlei Arten von Porphyren, Basalten vorkommenden und ganz wie mit den schärfsten Winkeln und Ecken ausgebildeten Kristalle geben den stärksten Beweis, dafs homogene in einer Masse von verschiebbarer Consistenz befindliche Theile sich einander nähern und reguläre Kristalle bilden können. Erwägt man endlich, dafs bei den Versuchen über die Auflösung der Mittelsalze durch Hülfe der galvanischen Säule ihre Bestandtheile sich abgesondert an den verschiedenen Polen zeigen, ja selbst durch Flüssigkeiten, mit denen sie sich leicht verbinden, unverändert durchgehen, und an den Polen sich erst entwickeln, so erhält diese Meinung eine neue Stütze. War vielleicht selbst die galvanische Materie in dergleichen Steinarten mit den uranfänglichen Erden aus denen sie bestehen, verbunden, entgeht diese vielleicht den Chimisten bei ihrer Zerlegung, und liegt vielleicht hierin der Grund, warum sich dieselben im Feuer ganz anders verhalten, als Massen welche aus denselben qualitativen und quantitativen zusammengesetzten Elementen bestehen? Man könnte vielleicht hiergegen noch einwenden, dafs, wenn diese ganze Theorie richtig und annehmbar wäre, diese fremde Kristalle mehr kugelförmig eingewachsen, ja dafs die ganze Substanz aus der sie bestehen, eine kugelförmige Substanz haben müsse. Allein einmal findet man dieses in der Natur sehr häufig, wovon selbst die nicht selten vorkommenden Granitkugeln ein redender Beweis sind. Aufserdem mufs man aber bedenken, dafs

bei Bildung der Kugeln die Ziehkräfte von allen Punkten gleich, bei der Kristallisation aber, ungleich sind. Daher mag es auch kommen, dafs die Steinarten, welche so selten oder gar nicht kristallisirt vorkommen, z. B. Chalcedon, Feuerstein, Carniol und andre meist in Kugelform erscheinen. Vielleicht haben die meisten Conglomerate, Puddingstein, ja selbst die berühmte Nagelfluhe, diesen Umständen ihre Entstehung zu verdanken, da es bei dem starken Fallen, welches man bei den Nagelfluhschichten häufig beobachtet, unmöglich ist, dafs sie ihre Entstehung Rollsteinen zu verdanken haben: eine Sache, deren genauer Untersuchung ich eine künftige Abhandlung widmen werde.

Beiträge

zur

Geschichte des Weissteins, des Felsit und anderer verwandten Arten.

Von Herrn Gerhard *).

I. Ueber den Weisstein.

Unter den Steinarten, welche in mancher besonders geognostischen Rücksicht noch etwas problematisch sind, nimmt der Weisstein einen beträchtlichen Platz ein. Die erste Nachricht von diesem Stein findet sich in denen im Jahr 1761 herausgegebenen kleinen Schriften des ehemaligen Berghauptmanns von Justi, allwo er ihn mit dem Namen eines neuen Mährischen Halb-Edelsteins aufführt, und behauptet, dafs er ein Gemenge von Jaspis und Granaten sei, und in dem Gebirge bei Namiest vorkomme, weshalb er auch in der Folge den Namen Namiester Stein erhielt. Nach dem Auszuge eines Schreibens des Herrn Bergraths Werner an Herrn Engelbrecht, welches sich in der von selbigem 1802 herausgegebenen Beschreibung dieses Minerals befindet, versichert Herr Werner, diese Steinart sei ihm bereits seit 1778 bekannt, und er habe ihr den Namen Weisstein gegeben. In der Folge der Zeit haben die Herren Mohfs, Weifs und Pusch diese Steinart noch näher beschrieben, der erstere und der letztere ihn als eine

*) Vorgelesen den 2. März 1815.

Art von Granit betrachtet, Herr Weifs aber hat ihm den sehr passenden Namen Granulit beigelegt. Alle diese drei Schriftsteller, so wie auch Herr Engelbrecht, betrachten diesen Stein als einen völlig gemengten Stein und als eine Gebirgsart, und aufser Herrn Engelbrecht behaupten sie, die Masse desselben sei Feldspath, in welchem gemeiniglich kleine Granaten, zuweilen auch Glimmer, Cyanit und Hornblende eingesprangt wären; letzterer aber behauptet, die Hauptmasse des Weissteins sei eine Steinart, welche mit dem dichten Feldspath viel Aehnlichkeit habe, ohne jedoch in allen Kennzeichen mit demselben übereinzukommen. Allein es sind mir zwei Punkte in Schlesien bekannt, wo dieses Mineral rein oryctognostisch und ohne Beimengung anderer Steinarten vorkommt, und es erscheint in dieser Gestalt zuweilen, aber nur selten, in dem Sächsischen Weissteingebirge, und deshalb mufs es oryctognostisch und geognostisch untersucht werden. Ich bemerke hiebei gleich anfänglich, das der Name Weisstein ganz unpassend ist. Einmal haben wir schon einen Stein der diesen Namen führt, indem man das griechische Wort Leucit wohl nicht anders als durch Weisstein übersetzen kann. Man findet ferner den gemengten Stein auch von andrer als von weifser Farbe. Dagegen verwandelt er sich im Feuer in eine milchweifse einer Emaille ähnliche Masse; und daher glaube ich, dafs man am besten thun wird, den reinen Weisstein Amausit oder Glasurstein, den gemengten aber nach Herrn Weifs Granulit zu nennen. Was nun die Kennzeichen des Amausit betrifft, so kann man folgende annehmen.

Er bricht derb ohne bestimmte Form.

Die Farbe ist weifs, weifsgelb, und fällt auch zuweilen in das bleiche Aschgrau.

Der Bruch ist kleinsplittrig und zeigt bisweilen Anlage zum versteckt blättrigen.

Er ist schimmernd mit schwachem Fettglanz, etwas fettig anzufühlen.

Er ist sehr hart, so dafs er den Feldspath ritzt, von dem Feuerstein aber geritzt wird.

Ungemein schwer zersprengbar.

Die Bruchstücke sind scharfkantig und an den Kanten durchscheinend.

Er wirkt nicht auf die Magnetnadel, ist aber ein schwacher Leiter der Elektricität.

Eigenthümliches Gewicht 2,658.

Vor dem Löthrohr schmelzt er nach 6 Minuten, ohne sich aufzublähen, mit einem blauen Schein nur an den Kanten, zu einer weifsen Emaille.

In dem Gutfeuer der hiesigen Porzellan-Oefen giebt er eine weifse, harte, undurchsichtige, poröse Emaille mit splittrigem Bruche.

Nach den mit drei Stücken von verschiedenen Arten von Herrn Klaproth angestellten Versuchen enthält er im Durchschnitt:

Kiesel 77,53. Thon 12,66. Eisen 1,33. Kali 5,40. Wasser 0,75.

Vergleicht man diese Kennzeichen mit denen, welche der Feldspath besitzt, so sieht man gleich, dafs beide nicht zu einer Gattung gehören, sondern dafs der Amausit eine eigene, obgleich dem Feldspath noch verwandte, Gattung ausmache; denn der Amausit ist dicht, der Feldspath blättrig, auch härter, indem er den Feldspath ritzt. Jener hat viel mehr Eigenschwere, da die des Feldspaths nur 2,588 ist. Im hiesigen Porzellan-Feuer schmelzt der Amausit zu einer weifsen, undurchsichtigen, sehr porösen, auf dem Bruche splittrigen Emaille. Allein der Feldspath giebt ein halbdurchsichtiges mit äufserst feinen Poren erfülltes Glas von muschligem Bruche. Endlich sind bei beiden Steinarten die Bestandtheile zwar qualitative einerlei; aber bei dem Amausit ist die Kieselerde viel häufiger, die Thonerde und das Kali aber in weit geringerer Menge als bei dem Feldspath vorhanden, und dieser sechsfache Unterschied ist vollkommen hinreichend, den Amausit zu einer besondern Gattung anzunehmen. Eben so wenig kann er zu dem sogenannten dichten Feldspath oder dem Felsit des Herrn Klaproth gerechnet werden, weil dieser statt Kali Natrum und auch viel Kalkerde enthält, welche dem Amausit fehlt, andrer äufsern Kennzeichen, wodurch beide Steinarten von einander abgehen, nicht zu erwähnen.

Einen Uebergang des Amausit mufs ich erwähnen, und dieser geschieht in einen wahren Chalcedon, welches aber bei der grofsen Menge von Kieselerde, die er enthält, nicht zu verwundern ist.

Ich komme nun zu dem gemengten Weisstein, oder wie ihn der Herr Weifs sehr passend benannt, zu dem Granulit.

Was nun die Gemengtheile dieser Steinart anbetrifft, so hat bereits Herr Mohfs bemerkt, dafs sie aus Feldspath und aus Granaten bestehen, weshalb er sie auch als eine Gattung des Granits betrachtet.

Ich habe Gelegenheit gehabt, eine zahlreiche Sammlung dieses Minerals aus dem Sächsischen Weisstein-Gebirge bei Koren, Altenburg, Penig und der dortigen Gegend zu erhalten, desgleichen aus Schlesien, aus der Gegend von Weistriz und dem Zobtenberge, und in keinem die Beimengung von Granaten vermifst, so wie auch der bekannte Namiester Stein aus Mähren blofs aus Amausit und Granaten besteht. Diese Granaten erscheinen in kleinen Körnern, welche dem Ansehn nach dem Pyrop am nächsten kommen. Zuweilen sind sie nur hin und wieder, zuweilen aber in solcher Menge darin befindlich, dafs der Stein ein röthliches Ansehn erhält. Ich halte daher dafür, dafs der Granulit aus Amausit und Pyropkörnern wesentlich gemengt sei. Allein aufserdem findet man in dem Granulit auch Hornblende, Glimmer und Cyanit dergestalt eingesprengt, dafs zuweilen nur einige dieser letzten drei Steinarten, zuweilen aber auch alle, in demselben vorkommen. Er nähert sich also hierdurch dem wahren Granit, welcher aufser seinen wesentlichen drei Bestandtheilen auch öfters Kristalle von Schörl, Turmalin, Hornblende, ja selbst von Granaten enthält. Diejenigen, welche von dem Granulit geschrieben, wollen zwei Arten desselben annehmen, den körnigen und den schiefrigen, von denen sich ersterer mehr dem wahren Granat, der andre aber dem Gneuse nähern soll. Wenn man aber mehrere Stuffen mit einander vergleicht, so wird man gewahr, dafs der schiefrige mehr Aehnlichkeit mit dem adrigen Granit des Herrn von Saussure zeige, als dafs er Aehnlichkeit mit dem Gneus habe, also dafs das schiefrig scheinende Gewebe blofs von der Lage der fremden Gemengtheile abhängt. Es ist indefs sehr merkwürdig, dafs das Produkt, welches bei der Schmelzung des Granulit erfolgt, man mag körnigen oder schiefrigen nehmen, ebenfalls in Schichten sich zeiget, in denen das schwarze Glas der Granaten oder der Hornblende mit der weifsen porösen Emaille das Amausit abwechselt, so dafs ein ganzes Stück Amausit, vor sich geschmolzen, mehrere dergleichen über einander liegende schwarze und weifse Lagen zeiget.

Wichtiger, aber auch verwickelter ist die Frage über das Vorkommen des Granulit, und ob er eine eigene oder eine untergeordnete Gebirgsart sei. Es ist zu bedauern, dafs das Granulit-Gebürge nur an einem einzigen Orte, nämlich auf dem nordwestlichen Abfall des Erzgebirges, mit einiger Genauigkeit untersucht worden, und doch sind die Geognosten, welche an Ort und Stelle gewesen, nicht einerlei Meinung. Herr Pusch scheint mir in seiner über das Weissteingebirge in Leonhardt's Taschenbuch 6ter Jahr-

gang Seite 126 befindlichen Abhandlung deutlich erwiesen zu haben, dafs der dortige Granit kein neuer Granit sei, und dafs der Granulit dem dortigen Gneus-Gebirge nicht untergeordnet sei, vielmehr ein selbstsändiges Gebirge mache, das in der Folge der Urgebirge zwischen dem ältesten Granit- und dem ältesten Gneus-Gebirge inne liege. Nach ihm bilden Granit und Granulit stets mehr oder weniger grofse Parthien, welche daher nicht scharf begränzt sind, sondern fast immer den deutlichsten Uebergang einer Gebirgsart in die andere bilden, so dafs man das eigentliche Verhältnifs dieses Zusammenkommens nicht genau bezeichnen könne. Ich habe Gelegenheit gehabt, viele Stücke von diesem Granit und von dem darin vorkommenden Granulit zu erhalten. Der erste ist grobkörnig, hat die gewöhnlichen Gemengtheile, Quarz, Feldspath und Glimmer, allein er unterscheidet sich doch von andern Graniten in manchen Stücken. Einmal sind die Farben des Glimmers sehr abwechselnd, rosenroth, grün, gelb. Ferner führt er Epidot, Schörl, Turmalin, Granaten, besonders aber glasigen Scapolit sehr häufig in sich. Es schien mir daher nicht unwahrscheinlich, dafs vielleicht bei diesem Granit der Amausit die Stelle des Feldspaths einnehmen möchte. Deshalb brachte ich ganze Stücke davon in das Porzellanfeuer, um zu sehen, ob bei deren Schmelzung sich das gewöhnliche Glas des Feldspaths oder die Emaille des Amausit zeigen werde. Allein alle Stücke verhielten sich wie jeder Granit, das heifst, sie waren geschmolzen, hatten oberwärts eine braune Rinde, und bei dem Zerschlagen hatte wie gewöhnlich der Feldspath ein weifses, der Glimmer ein schwarzes Glas gegeben, und der Quarz seine Durchsichtigkeit verloren und war gar nicht geschmolzen.

Das Vorkommen des Granulit an dem nordwestlichen Abhange des Engelsberges bei Zobten in Schlesien scheint die Meinung des Herrn Pusch zu bestätigen, da in dem dasigen meist grobkörnigen Granit ein Lager von einem körnigen sehr granatreichen Granulit sich zeigt, welcher sich im Feuer eben so wie der Sächsische verhält, indem er vor sich schmelzt und dabei Lagen von schwarzem Glase und weifser poröser Emaille zeigt. Ich müfste indefs der Erfahrung widersprechen, wenn ich den Satz des Herrn Pusch allgemein für alle Lagerung des Granulit annehmen wollte, indem denselben zwei Beobachtungen aus dem Schlesischen Gebirge widersprechen. Einmal macht der Granulit in dem Gneuse bei Weistriz im Fürstenthum Schweidnitz ein ausgedehntes Lager, und aufserdem befindet sich bei Guren an der Scheidung des Gneuses und des dortigen ausgezeichneten Glimmer-

schiefers

schiefers ebenfalls ein Lager von Granulit, in welchem ein baumförmiger leicht angeflogener Braunstein häufig vorkommt. Nach allen diesen Beobtungen ist es mir mehr als wahrscheinlich, dafs der Granulit zwar zu der Ur- oder Schiefer-Formation gehöre, und dafs er ein untergeordnetes Lager, bald des Granits, bald des Gneuses ausmache, worüber man sich auch wegen der grofsen Aehnlichkeit der Grundmasse des Amausit mit dem Feldspath gar nicht wundern darf. Künftige Beobachtungen über den Granulit müssen hierüber nähere Belehrungen geben.

Ein anderer Umstand ist indefs desto merkwürdiger, nämlich dafs der Granulit durch häufigere Beimengung der Hornblende in Grünstein übergeht, welches sich beides bei Penig deutlich zeigt. Man wird also vielleicht künftig behaupten müssen, dafs auch der Grünstein nicht immer aus Feldspath und Hornblende, sondern auch aus Amausit und Hornblende gemengt sei, oder dafs es zwei Arten Grünstein gebe. Es giebt zwar aller Grünstein bei dem Schmelzen ein in allem dem Obsidian ähnliches Glas; allein dies rührt von der Hornblende her, welche so leicht flüssig ist, dafs sie die feuerfestesten Gefäfse bohrt und auch ein Obsidian-Glas giebt.

Herr Jasche führt in seiner Abhandlung über das Wissenswürdige aus der Gebirgskunde S. 44 eine in dem Uebergangsgebirge am Buchenberge in der Grafschaft Wernigerode vorkommende Gebirgsart an, welche er Feldspathgestein nennt, und von der er vier Arten, den dichten, den gemeinkörnigen, den kristallinischkörnigen und den fahlgrauen anführt. Ersterer besteht nach ihm aus dichtem Feldspath und Quarzkörnern, zu welchen auch zuweilen Schwefelkies und Graphit kommen. Den gemeinkörnigen hält er für ein Gemenge, welches aus dichtem Feldspath, Apatit, Quarz, mit hin und wieder eintretendem Graphit, besteht. In dem körnigen kristallinischen befinden sich dieselben Gemengtheile, aber sehr wenig Graphit, und es zeigen sich in selbigem deutlich 4seitige Säulen, welche Herr Jasche für gemeinen Feldspath hält. Das graue Feldspathgestein soll aus dichtem und gemeinem Feldspath bestehen und Graphit und Apatit beigemengt haben, die Gemengtheile aber so in einander verflöfst seyn, dafs ein graues Ansehn daraus entsteht. In der letzten Art zeigt sich zuweilen Almandin. Diese Steinart kommt bald in dem Thonschiefer-Gebirge vor, bald ist sie über demselben gelagert und scheint in Grünstein überzugehen.

Bei einer sehr vollständigen Suite von den Harzer Gebirgsarten habe ich von Herrn Jasche selbst alle vier Arten seines Feldspathgesteins erhal-

ten, und dieselben in dem Porzellanfeuer untersucht. Das dichte und auch das graue Gestein geben eine schwarze, sehr poröse, grofsblasige Schlacke, wogegen man aus den beiden körnigen Arten zwar auch eine schwarze grofsblasige, aber mit weifsen Streifen häufig gemengte Schlacke erhält, welche sich in dieser Form sehr der Schlacke des Granulit nähert. Ich möchte daher lieber behaupten, dafs das letzte, besonders das graue Gestein ein Granulit sei, welcher aus Amausit, Hornblende und Quarz bestehe, welchem zuweilen Kristalle von Apatit und von Granaten beigemengt sind. Wenigstens ist, nach den Schmelzprodukten zu urtheilen, hier an keinen dichten oder an gemeinen Feldspath zu denken, weil bei diesem, wie ich bald anführen werde, es eine wesentliche Eigenschaft ist, im Feuer sich in eine sehr dichte porzellanartige Masse zu verwandeln. Wäre die Grundmasse dieses Gesteins wirklich Amausit, und gehörten die in selbigem befindlichen 4seitigen Säulen dieser Steinart auch dazu, so würde man auch einen kristallinischen Amausit annehmen müssen. Doch alles dieses sind vor der Hand nur Vermuthungen, welche noch mehrere Bestätigungen erfordern.

II. Ueber den Felsit.

Der sonst unter dem unrichtigen Namen als dichter Feldspath bekannte Felsit gehört zu den ungemein merkwürdigen Steinarten, man mag auf seine Bestandtheile, auf sein Vorkommen, auf seine grofse Verbreitung, auf seine bemerkenswerthe Uebergänge sehen. Die Bestimmung des ersteren sind wir unserm trefflichen unermüdeten Analytiker, Herrn Ober-Medicinal-Rath und Ritter Klaproth, schuldig, welcher gefunden, dafs der Felsit bestehe aus Kieselerde 51, Thonerde $30\frac{1}{2}$, Kalk $11\frac{1}{4}$, Eisen $1\frac{3}{4}$, Natrum 4, Wasser $1\frac{1}{4}$, und der so ansehnliche Kalkgehalt unterscheidet ihn schon von allen übrigen Steinarten, welche noch Natrum oder Kali enthalten.

Wegen der grofsen Verschiedenheit, welche die zu dieser Steingattung gehörigen Arten in den äufseren Kennzeichen zeigen, ist es nicht möglich, aus denselben einen Gattungs-Charakter zu bilden, indem alle Arten nur in einem Stücke übereinkommen, dafs sie angehaucht einen

Thongeruch wahrnehmen lassen. Der Gattungs-Charakter kann also blofs durch chimische und physische Kennzeichen bestimmt werden. Diese sind:

a) Die eben angeführten Bestandtheile.

b) Das Verhalten vor dem Löthrohr; der Felsit in die Hitze desselben gebracht, giebt weifsen Schein, wird weifs, und rundet sich an den Kanten.

c) Das Verhalten im Schmelzfeuer. Er schmelzt vor sich in dem Glühfeuer der hiesigen Porzellan-Fabrike, und giebt meist eine milchweifse, sehr derbe, feste, nur selten eine graue gar nicht löchrige Schlacke von ebenem Bruche.

d) Das eigenthümliche Gewicht, welches von 2,980 bis 3,020 geht, also die Schwere des Feldspaths und Amausit übertrifft.

Man findet diese Steingattung in dem Ur- und auch in dem Uebergangs-Gebirge, ja sollte es einen wahren Flötz-Porphyr geben, so würde auch dies Gebirge zu seiner Geburtsstätte gehören, indem ich in einer andern der Königlichen Akademie vorgelesenen Abhandlung über den Porphyr bewiesen habe, dafs aller Porphyr, welchen man sonst in Thon, Hornstein, Feldspath, auch Pechstein-Porphyr abgesondert, durchaus den Felsit zur Grundmasse hat. Er bildet an diesen Orten selten oryctognostische reine Lager, sondern ist mit andern Steinarten verwachsen, und macht in der Beimengung mit Hornblende, Feldspath, Quarz und Glimmer alle obengenannte Porphyr-Arten. Er macht indefs besonders in dem Grünsteinschiefer öfters beträchtliche Parthien ohne fremde Beimengung, wie bei Siebenlehn und Garsdorff im Erzgebirge, desgleichen bei Penig, so wie auch Herr von Saussure der Vater dergleichen bei Pissevache im Walliser Lande beobachtet hat. Eben so führt Herr Ebell bei dem nördlichen Profil des Mont Cenis und dem ebenfalls nördlichen Profil des grofsen Bernhard Lager von dichtem Feldspath auf. Alle diese Lagerstätte des Felsit befinden sich in dem ältesten Urgebirge, welches also beweiset, dafs Kiesel, Kalk, Alaunerde, Eisen und Natrum bei dessen Entstehung zugleich vorhanden gewesen: eine Erscheinung, welche aus wässeriger Auflösung dieser Substanzen nicht leicht erklärbar ist. Ueberdem erscheint der Felsit bis jetzt nicht anders als derb. Denn es ist noch zweifelhaft, ob die in dem antiken grünen Porphyr, Verde antico, vorkommende rechtwinkliche 4eckige Säulen, welche grün gefärbt sind, Felsit oder Feldspathkristalle sind, indem der Feldspath auch in dieser Form erscheint, und die grüne Farbe von einer Beimengung von Hornblende

herrührt. Ueberdem hat Herr Klaproth gefunden, dafs die in dem Drachenfelser Porphyr vorkommenden Kristalle von glasigem Feldspath weder Kalkerde noch Natrum enthalten, ob sie gleich in einer Mutter von Felsit liegen.

Von dieser durch die Porphyr-Formation so häufig verbreiteten Steingattung können folgende Arten deutlich unterschieden werden.

I. Erdiger Felsit.

Farbe: Weifs, grau, gelblich, roth, auch aus diesen Farben gemischt.

Härte: Weich, läfst sich mit dem Messer schaben.

Bruch: Erdig und uneben.

Leicht zersprengbar, mit stumpfeckigen Bruchstücken.

Undurchsichtig auch an den Kanten.

Hängt an der Zunge und saugt Wasser ein.

Eigenthümliche Schwere 2,080.

Dieser Felsit macht die Grundmasse aller bis jetzt sogenannten Thon-Porphyre, indem diese, so wie der reine erdige Felsit, im Feuer die oben bereits beschriebene weifse Porzellanschlacke geben. Herr Werner und seine Nachfolger führen einen Stein auf, welchen sie Thonstein nennen. Er ist bisher noch nicht chemisch untersucht, allein ich getraue mir mit Gewifsheit zu behaupten, dafs dieser Stein ein wahrer erdiger Felsit ist. Denn wenn ein in seiner Mischung unbekannter Stein mit einem von dieser Seite bekannten in den äufsern Kennzeichen, besonders aber in dem Verhalten im Feuer, ganz übereinkommt, so mufs man ihm wohl dieselben Bestandtheile beilegen. Dies ist aber der Fall bei dem Thonstein und bei dem erdigen Felsit. Die äufsern Kennzeichen, ja das eigenthümliche Gewicht, sind bei beiden dieselben. Beide geben vor dem Löthrohr ein weifses phosphorisches Licht, runden sich an den Kanten, und brauchen zu dieser Veränderung gleiche Zeit, 7 — 10 Minuten. Beide schmelzen vor sich im heftigen Feuer, und zeigen dieselbe compakte milchweifse oder graue porzellanartige Masse. Dies letztere ist einer der stärksten Beweise für die Identität der Bestandtheile. Denn es ist ein grofser Unterschied zwischen dem Schmelzen eines Metalls, eines harzigen, talchigen, wachsartigen oder salzigen Körpers, und eines selbst schmelzenden Steins. Die erst genannten Körper

bleiben nach dem Schmelzen und darauf folgenden Gestehn das, was sie vor dem Schmelzen waren, und man sieht also daraus, dafs das Feuer die kleinen Theile bei dem Schmelzen blofs verschiebbar und ununterscheidbar gemacht hat. Ganz anders ist es beschaffen, wenn ein Stein schmilzt und das Geschmolzene wieder gesteht. Hier findet man eine Masse, welche auch nicht die geringste äufsere oder physische Aehnlichkeit mit dem rohen Stein hätte. Bald ist sie poröser, bald dichter, bald durchsichtiger oder durchscheinend, bald undurchsichtig, bald ein wahres Glas, bald eine gläsige, bald eine mussige Schlacke; und so gehen die Verschiedenheiten noch weiter, von welchem allem der Grund doch in nichts anders als in den Bestandtheilen liegen kann, welche entweder bei dem Schmelzen selbst verändert worden, oder in eine andre Art der Verbindung getreten sind. Dieser Schlufs scheint mir eine vollkommene Evidenz zu erhalten, wenn man bedenkt, dafs die Schmelzprodukte, welche man aus der Mengung der verschiedenen einfachen Erden und ihrer Schmelzung erhält, eben so verschieden sind, als die Bestandtheile aus denen sie zusammengesetzt werden, ja dafs auch sogar dieselben Erdarten, in verschiedene Verhältnisse verbunden, verschiedene Produkte geben. Da nun der erdige Felsit und der Wernersche Thonstein bei dem Schmelzen dieselben Produkte geben, auch in ihren äufsern Kennzeichen ganz übereinkommen, so mufs ich sie auch für einerlei Art derselben Gattung halten, zumal sie auch in ihrem Vorkommen mit einander geognostisch verwandt sind.

Es wäre übrigens sehr zu wünschen, wenn Chimiker, welche mit allen Hülfsmitteln, welche zu Auflösungen und Zerlegungen von Steinen erforderlich, versehen sind, die Feuerprodukte natürlicher Steine und die Feuerprodukte künstlicher Mengungen einer genauen Prüfung unterwerfen wollten, um zu erfahren, ob und welche qualitative und quantitative Veränderung in den Bestandtheilen bei dem Schmelzen vorgegangen wären.

Wollte man auch annehmen, die Lage und Anordnung der kleinen Theile könne hiebei eine Abänderung verursachen, so widerspricht dieses der Erfahrung. Denn man mag dichte oder ausgebildete kristalline Stücke derselben Steinart einem gleichen Feuergrade aussetzen, so erhält man in beiden Fällen dasselbe Produkt.

Dieser erdige Felsit macht einen merkwürdigen Uebergang im Jaspis. Der scharfsinnige Cronstaedt beobachtete bereits zu seiner Zeit, dafs ein Uebergang aus Thon in Jaspis stattfinde. Allein in der Gegend von Pe-

nig und Gnandstein ist dieser Uebergang äufserst auffallend. Denn man findet daselbst Felsit, welcher roth und weifs gestreift oder auf dieselbe Art gefleckt ist, und wenn das grobe erdige Gewebe sich verliert, in ein ebenes, öfters muschliches Gewebe übergeht, und auf die Art den schönsten gestreiften oder gefleckten Jaspis bildet. Eben so machen mir von daher erhaltene Stücke wahrscheinlich, dafs dieser Felsit in Feuerstein übergeht. Denn die Verbindung einzelner Feuersteinstücke mit dem Felsit ist so innig, dafs kein Unterschied zu bemerken ist.

II. Splittriger Felsit.

Man bemerkt an ihm dieselben Farben wie bei dem erdigen.
Er ist hart, so dafs er am Stahle Funken giebt; der Bruch ist splittrig, bald feiner, bald gröber, so dafs er im erstern Falle öfters in den ebenen übergeht.
Er zerspringt in scharfe an den Kanten etwas durchscheinende Stücke.
Er zieht das Wasser nicht ein und klebt nicht an der Zunge.
Eigenthümliche Schwere 2,996.
Verhält sich vor dem Löthrohr und im Schmelzfeuer wie voriger.

Hieher gehört der Felsit von Siebenlähn, von Penig, von der Sala-Grube. Er macht die Grundmasse von dem Hornstein- und Feldspath-Porphyr.

Diese Art von Felsit geht häufig in Hornstein über, ist daher auch öfters mit dem Hornstein verwechselt worden, von welchem er sich aber durch sein Verhalten im Feuer hinlänglich unterscheidet, indem der Hornstein im hiesigen Porzellanfeuer durchaus ungeschmolzen bleibt, aber, welche Farbe er auch haben mag, dieselbe verliert und milchweifs wird. Durch diesen Uebergang in Hornstein bildet sich wahrscheinlich der sogenannte Trümmer-Porphyr, bei welchem die Porphyrstücke mit Hornstein verbunden sind. In diesem aus splittrigem Felsit verwachsenen Hornstein befindet sich öfters ein gelber oder rother Kiesel-Synter, wobei es noch unentschieden ist, ob derselbe mit der Bildung des Hornsteins gleichzeitig sei, oder ob er einer Auflösung des Hornsteins seine Existenz zu danken habe. Bis-

weilen zieht sich bei dieser Art von Felsit der Bruch in das versteckt blättrige. Bisher ist mir diese Abänderung als rein oryctognostisch nicht vorgekommen, allein desto häufiger erscheint sie als sogenannter Feldspath-Porphyr, und ist mit rauchgrauen meist rein ausgebildeten Quarzkristallen der doppelt sechsseitigen Pyramide gemengt. Dieser Porphyr befindet sich öfters auf sehr hohen Punkten, so dafs er zuweilen den Granit bedeckt.

III. Blättriger Felsit,

oder Labrador-Stein mit doppeltem rechtwinkligem Durchgange der Blätter. Es würde überflüssig seyn, wenn ich von diesem durch sein buntes Farbenspiel bekannten Stein eine weitläuftige Charakteristik anführen wollte, und ich begnüge mich daher nur Folgendes darüber zu bemerken. Einmal beweiset die durch Herrn Klaproth gemachte Zerlegung dieses Steins, dafs er ein wahrer Felsit ist, indem er aufser Kiesel und Thonerde auch Kalk und Natrum in sich führt; auch vor dem Löthrohr und im Schmelzfeuer giebt er dieselben Produkte wie alle übrige Felsit-Arten. Auf der Pauls-Insel an der Küste von Labrador und in Ingermanland wird er in Geschieben gefunden. Dies letztere scheint die Meinung derjenigen zu widerlegen, welche glauben, dafs das Farbenspiel von einer Verwitterung, oder vielmehr von einer Oxidation des Eisens, oder von der Einwirkung des Meerwassers herkommt. Denn einmal hat nach der Klaprothschen Analyse der Labradorstein, welcher das schönste Farbenspiel macht, nur $1\frac{1}{4}$ pr. C. Eisen in sich. Ich besitze ferner ein über 12 Pfd. wiegendes Stück dieses Labradorsteins, welches inwendig bläuliche Stellen hat, und ein nur einige Loth wiegendes, welches keine Farben zeigt; und es ist daher viel wahrscheinlicher, dafs das Farbenspiel blofs in der innern Struktur dieses merkwürdigen Steins gegründet ist. Die Grundfarbe des blättrigen Felsit von Labrador ist aschgrau, und ganz neulich hat Herr Bergrath Wahrendorff ein Geschiebe dieses Steins im Bober, mit aurorafarbenem Grunde, welches blaue und Bronze-Farben spielt, angetroffen.

Aus allem bisher angeführten geht deutlich hervor, dafs der Felsit seltener als reiner oryctognostischer Gegenstand vorkomme, dafs er aber als gemengte Gebirgsart und als Grundmasse des Porphyrs aufserordentlich häufig verbreitet sei; denn in meiner vor einigen Jahren vorgelesenen Abhand-

lung habe ich aus dem Verhalten der Porphyrarten im Feuer den mehr als wahrscheinlichen Schluſs gezogen, daſs die Grundmasse des Thons, Hornstein und Feldspath, Porphyr dichter Feldspath sei. Allein durch die chimische Auflösung des Felsit, nach welcher derselbe qualitative eben die Bestandtheile enthält, welche sich in dem Klinkstein als eine Porphyrart befinden, ist die Sache völlig erwiesen. Ein Umstand ist indeſs hiebei bemerkenswerth. Bei mehr denn einigen 50 Porphyrarten aus verschiedenen Ländern und Gegenden habe ich bei dem Schmelzen immer dasselbe Produkt, nämlich eine milchweiſse dichte porzellanartige Schlacke erhalten, wogegen die amerikanische, Vizentinische und andre Porphyre, welchen manche Geognosten einen vulkanischen Ursprung beilegen wollen, ein schwarzes Obsidian-Glas, oberwärts mit einer braunen Rinde bedeckt, geben. Es ist sehr merkwürdig, daſs die wichtigsten Niederlagen der Metalle in den Gebirgen erscheinen, die meist aus solchen Steinarten, welche viel Kali oder Natrum enthalten, und wohin besonders der Gneus, der Glimmerschiefer und der Porphyr gehören, da sie in denjenigen Gebirgen, in welchen die reine Kieselerde vorwaltet, viel seltener und noch seltener anhaltend sind. Es ist daher auch sehr zu bedauern, daſs der Thonschiefer und die Grauwacke, welche beide auch an mehreren Orten Lagerstätte von Metallen enthalten, noch nicht chimisch in Absicht ihrer Bestandtheile untersucht sind, um zu wissen, ob sie auch dergleichen Salze bei sich führen. Dies könnte vielleicht über die Bildung der Metalle vieles Licht verbreiten.

Da der Felsit als Grundmasse des Porphyrs so häufig mitten unter und bei kristallinen Gebirgsarten in Ur- und Uebergangsgebirgen vorkommt, so finden die Neptunisten eben sowohl wie die Vulkanisten unübersteigliche Schwierigkeiten, die Bildung derselben zu erklären, indem es allezeit unbegreiflich bleibt, wie eine kristalline Formation auf einmal in eine dichte übergehen könne. Stellt man sich aber die Sache nach meiner den 5. August 1812 der Königl. Akademie nur kurz vorgetragenen Theorie vor, nach welcher die Bildung der Gebirgslager durch Gerinnung und Festwerdung von Gasarten entstanden, so hat man hierin ein weit leichteres Spiel, indem man nur annehmen darf, daſs bei Entstehung der Kristall-Felsarten viel Sauer- und Wasserstoffgas vorhanden gewesen und in Wasser verwandelt worden, bei den dichten aber dies wo nicht ganz doch gröſstentheils gefehlt habe. Die Beobachtung, daſs in dem ungeheuern Alpengebirge, seinen Zug aus Dauphiné bis nach Ungarn, und also durch 10 Längengrade genommen, man

an

an dem nördlichen Gehänge keinen Porphyr, an dem südlichen aber denselben in desto gröfserer Menge finde, scheint zu beweisen, dafs die Mengung der Gasarten, welche Gebirgsschichten gebildet, nicht überall eben dieselbe gewesen sei. Aehnliche Fälle, wo kristalline Steinlager mit dichten und noch dazu mehrmals abwechseln, kommen häufig vor. Um sich davon zu überzeugen, darf man nur die Profile, welche Herr Ebell im ersten Theil seiner treefflichen Schrift über den Bau der Erde S. 102—109 und S. 325 angeführt hat, nachsehen. Ja wem ist unbekannt, dafs in dem ganz dichten ungeheuern Alpenkalksteingebilde, mitten in demselben, z. B. auf dem 10,000 Fufs hohen Oldenhorn, Schichten von eckigen Quarzkörnern, welche durch kein Bindemittel vermengt sind, als wahre irreguläre Kristalle darin vorkommen.

Es giebt noch drei Steinarten welche dem Felsit sehr nahe verwandt sind. Diese sind der homogene Trapp nebst der dazu gehörigen Grundmasse des Mandelsteins, welche von Herrn Werner Eisenthon genannt wird, und welche die einzigen Steinarten sind, welche den Namen Trapp verdienen, ferner der Saussurit und der Pechstein. Was den homogenen Trapp und den dazu gehörigen Wernerschen Eisenthon betrifft, so führt Herr Faujas de Saint Fond an, dafs nach den Untersuchungen der Herren Vauquelin, Chevreuil, Bergmann ein Schüler Vauquelins, Langlois und Dubois, diese Steinarten bestehen aus Kiesel 48—62, Thon 11—18, Kalk 4—8, Bittererde 1—3, Eisen 11—22, Natrum und Kali 5—7, Verlust 1—4. Auch in den äufsern Kennzeichen und in der Eigenschwere kommen sie mit der erdigen und splittrigen Art des Felsit genau überein. Allein der geringe Gehalt der Kalkerde, das viele Eisen, die Beimischung von Bittererde und das Daseyn des Natrum und Kali scheint sie doch von dem Felsit hinlänglich zu unterscheiden.

Der Saussurit ist nach Herrn Klaproth zusammengesetzt aus Kiesel 49, Thon 24, Kalk $10\frac{1}{2}$, Talk $3\frac{3}{4}$, Eisen $6\frac{1}{2}$, Natrum $5\frac{1}{2}$.

Allein der Beitritt der Talkerde, der starke Gehalt an Eisen, seine grofse Zähigkeit und die grofse bei Steinen seltne Eigenschwere von 3,389 unterscheiden ihn noch und machen ihn zu einer besondern Gattung, zumal er im Feuer eine poröse Masse giebt. Der Pechstein von Meifsen, Kobitz und andern Oertern besteht aus Kiesel 75, Thon 14, Kalk 1, Eisen 1, Natrum $1\frac{3}{4}$, Wasser $8\frac{1}{2}$, und giebt im Feuer eine weifse äufserst grofsblasige Masse, verhält sich also zum Felsit eben so wie der Amausit zum Feldspath.

Nach allem bisher über den Feldspath, Amausit, Felsit und verwandten Steinarten bemerkten scheint es rathsam zu seyn, sie in folgender Ordnung im System zu ordnen:

1) Feldspath, 2) Amausit, 3) Felsit, 4) Pechstein, 5) Saussurit, 6) Trapp; und es werden also Thonstein und Eisenstein, ersterer als eine Art des Felsit, letzterer als eine Art des Trapp, als Gattungen ganz wegfallen.

Es verdiente wohl näher untersucht zu werden, ob der Sienit wirklich aus Feldspath und Hornblende, oder aus dieser und aus Felsit gemengt sei. Das Verhalten im Schmelzfeuer giebt hierüber keinen sichern Aufschlufs. Ich habe Sienit aus mehreren Gegenden schmelzen lassen, und alle haben ein schwarzes dichtes Glas gegeben, welches mit dem Osidian völlig übereinkommt, und woran die viele Hornblende Schuld hat, welche vor sich geschmolzen, auch dergleichen Gläser giebt. Es steht aber der Sienit mit dem Porphyr in einer sehr genauen geognostischen Verbindung, und es ist also nicht so unwahrscheinlich, dafs ersterer aus blättrigem Felsit und Hornblende bestehe, wozu noch kommt, dafs in dem Norwegischen Sienit der blättrige Felsit häufig vorkommt. Man findet zwar öfters in dem Sienit ganz ausgebildete Feldspathkristalle, allein eben diese Kristalle erscheinen auch in dem Drachenfelser Porphyr, welcher dichten erdigen Felsit zu seiner Grundmasse hat.

Zum Schlufs füge ich noch eine Bemerkung über den Namen Felsit bei, welcher diesem Stein von Herrn Klaproth beigelegt worden. Derselbe hat das Unbequeme, dafs der damit bezeichnete Stein nicht der einzige ist, welcher Gebirgsschichten und Massen bildet. Unser würdiger Mitbruder wird mir also erlauben, dafs aus inniger Hochachtung für die wahrhaft grofsen Verdienste, welche er sich durch die Zerlegung so vieler Mineralien, besonders durch die höchst wichtige Entdeckung über das Daseyn des Kali und Natrum in Steinarten, erworben, ich diesem Steine den Namen Klaprothin beilege.

Chemische Untersuchung des Arsenikerzes von Reichenstein.

Von Herrn Klaproth *).

Bei Reichenstein, im Fürstenthum Münsterberg in Schlesien, wird von dem dasigen Glimmerschiefergebirge ein mächtiges Kalksteinlager umschlossen. In diesem Lager, dessen Kalkstein zum Theil in Dolomit übergeht, brechen mehrere Gesteinarten, als: Weisstein, Stralstein, Tremolith, Chlorit, Asbest, und vornehmlich auch Serpentine in gröfsern und kleinern Nestern, von denen vorzüglich der rothe und schwarze Serpentin reichliches Arsenikerz, sonst auch Mispickel genannt, theils eingesprengt, theils derb, in gröfsern und kleinern Massen, führen.

Die Farbe dieses Arsenikerzes ist zinnweifs, ins Graue fallend; der Metallglanz desselben ist mäfsig; der Bruch uneben; die Bruchstücke sind unbestimmt eckig.

Zur chemischen Analyse wurde eine Partie derber Stücke ausgestufft, gepulvert, und das Pulver zur gleichförmigen Vertheilung der Bergart gemengt.

1) 500 Gran des gepulverten Erzes wurden in einer beschlagenen Glasretorte geglühet. Es stieg reines Arsenikmetall auf, an Gewicht nur 10 Gran betragend. Eine übergegangene, 2 bis 3 Tropfen betragende, wäs-

*) Vorgelesen den 16. März 1815.

serige Flüssigkeit wurde weder durch salpetersaures Silber, noch durch essigsauren Baryt getrübt. Das rückständige Erz, welches 488 Gran wog, mit gleichen Theilen Schwefel gemischt und sublimirt, gab rothes Rauschgelb. Der Rückstand davon wog 260 Gran, abgeröstet noch 252 Gran.

2) 500 Gran des gepulverten Erzes wurden mit 60 Gran Kohlenstaub versetzt und wie voriges sublimirt. Das aufgestiegene metallische Arsenik betrug jetzt 36 Gran.

3) 200 Gran feingeriebenes Erz wurden mit einer Mischung von 3 Unzen Salpetersäure von = 1,225 specif. Gew. und 6 Unzen Wasser übergossen, und in mäfsige Wärme gestellt. Die Auflösung erfolgte unter Erzeugung nitröser Dämpfe, mit Hinterlassung von 12 Gran quarziger Bergart. Bei Erhitzung derselben auf einem Scherben zeigte sich ein schwaches kurzdauerndes Schwefelflämmchen; nach dessen Erlöschen fand sich das Gewicht des Rückstandes zu unbeträchtlich vermindert, als dafs dieser geringe Schwefelgehalt als wesentlicher Bestandtheil des Erzes aufgeführt werden könnte.

Die klare Auflösung, welche blafsgoldgelb war, in gelinder Wärme verdunstet, setzte nach und nach 126 Gran weifses Arsenikoxyd in kristallinischen Körnern ab.

4) Eine gleiche Menge des feingeriebenen Erzes wurde mit verdünnter Schwefelsäure bis zum Sieden erhitzt, ohne dafs ein Angriff statt fand. Sobald aber Salpetersäure hinzugetropft wurde, erfolgte die Auflösung des Erzes, unter plötzlicher Zersetzung der Salpetersäure und starkem Ausströmen rother Dämpfe; wobei einige Flocken Schwefel sich anfanden, die nebst dem quarzigen Rückstande getrocknet, und auf einem Scherben erhitzt, einen kaum $\frac{1}{2}$ Gran betragenden Gewichtsverlust verursachten. Die strohgelbe schwefelsaure Auflösung setzte, während sie durch Abdunsten in die Enge gebracht wurde, Arsenikoxyd in kleinen kristallinischen Körnern ab.

5) 500 Gran des Erzpulvers wurden für sich auf einen Röstscherben gebracht, und die Röstung vorsichtig veranstaltet. Der rothbraune Rückstand, welcher 166 Gran wog, wurde mit 60 Gran Kohlenstaub versetzt,

und wiederum der Röstung unterworfen. Er wog jetzt 160 Gran, welches Gewicht durch eine nochmalige Röstung mit Kohlenstaub nicht weiter vermindert wurde. Diese 160 Gran Rückstand wurden mit Salzsäure übergossen und digerirt. Die Auflösung erfolgte, mit Hinterlassung der quarzigen Bergart. Sie wurde durch Aetznatrum gefällt; der in braunrothem Eisenoxyd bestehende Niederschlag wurde ausgewaschen, getrocknet, mit wenigen Tropfen Oel abgerieben, und in einer kleinen Glasretorte geglühet. Das erhaltene schwarze oxydulirte Eisen (Eisenmohr) wog 138 Gran; welche 107 Gran metallisches Eisen anzeigen.

Aus diesem aufgefundenen Eisengehalte ergiebt sich nun das quantitative Verhältnifs des Arseniks in den zu dieser Untersuchung angewendeten 300 Gran des Erzes, mit Ausschlufs der Bergart und Uebergehung der geringen Spur des Schwefels, nämlich:

Eisen — — —	107
Arsenik — — —	175

Die Mischung des reinen Arsenikerzes von Reichenstein besteht demnach im Hundert aus:

Eisen — — —	38
Arsenik — — —	62
Schwefel, eine Spur.	
	100

6) Diese Reichensteinschen Erze sind früher auf Gold als auf Arsenik benutzt worden; worüber die nachfolgende Beschreibung des ehemaligen Schmelzprocesses zur Darstellung des in selbigem enthaltenen Goldes das Nähere darlegt. Es schien daher des Versuches werth, zu erfahren, ob auch in den jetzt brechenden Arsenikerzen sich Anzeigen von einem Goldgehalte ergeben würden. Zu dem Ende wurden 10 Unzen feingeriebenes Erz der Röstung unterworfen. Die Verrauchung des Arseniks war mit einzelnen Flämmchen begleitet, verbreitete aber fast gar keinen bemerkbaren Geruch. Zur vollständigen Entfernung des Arseniks wurde das Erzpulver zuletzt mit Kohlenstaub versetzt. Es blieben gegen 5 Unzen rothbraunes

Eisenoxyd übrig. Diese wurden nach und nach durch Salzsäure aufgelöst. Der unaufgelöset verbliebene, meistens in gelblichgrauen Quarzkörnern bestehende Rückstand wurde durch starke Digestion mit salpetergesäuerter Salzsäure ausgezogen, und die filtrirte blafsgelbe Auflösung mehreren Prüfungen auf einen Goldgehalt unterworfen, wovon sich jedoch keine ganz deutliche Spur ergeben wollte. Indessen ist dieser Gegenstand eines, jedoch mit gröfsern Mengen, auf trocknem Wege und unter Anwendung eines zweckmäfsig eingeleiteten Anreicherungsprocesses, wiederholten Versuchs, wenn auch nicht in Hoffnung auf eine lohnende Ausbeute, doch in wissenschaftlicher Hinsicht, wohl werth.

Aus jenen Versuchen gehen nun insbesondere folgende beide Resultate hervor:

a) Der durch Wärme in Rauchgestalt sich verflüchtigende Arsenik verbreitet an und für sich nicht den bekannten Knoblauch ähnlichen Geruch; sondern solcher hat nur statt, wenn der verrauchende Arsenik mit Kohlenstoff und Hydrogen in Berührung kommt; welcher, bei Untersuchungen auf Arsenik sehr zu berücksichtigende Umstand zu wenig gekannt und zur Ungebühr übersehen zu seyn scheint *).

b) Diejenigen Mineralogen sind im Irrthum, welche das Vorkommen einer natürlichen Legirung des Arsenikmetalls mit Eisen, ohne eine Dazwischenkunft des Schwefels, bestreiten wollen. Es ist vielmehr das Eisen-Arsenik (*Arsenicum ferratum s. martiatum*) als eine eigene, vom Arsenikkiese (*Arsenicum ferreo s. martiato sulphuratum*) verschiedene Gattung in der Arsenik-Ordnung aufzuführen.

*) Siehe Fischer über Arsenik, im Journal für Chemie und Physik VI. B. S. 97.

Urkundliche Beschreibung

des

ehemaligen Schmelzprocesses zur Darstellung des in den Reichensteiner Arsenikerzen enthaltenen Goldes.

Die Erze wurden rein geschieden, und anfänglich blofs Stufferze, nachher aber auch Pocherze und Schliche bearbeitet. Die Stufferze wurden von verschiedenen Zechen gattirt und (wahrscheinlich ohne vorhergegangene Röstung, denn man findet es in den Schmelzzetteln besonders bemerkt, wenn geröstetes Erz etwa im Verhältnifs von $\frac{1}{3}$ auf die Schicht kam) in Arbeit genommen.

Die Oefen wurden Hohe-Oefen genannt.

Die Schliche wurden entweder mit den Stufferzen oder besonders verschmelzt, und mit blofsem Kalkschutt (2 Centner auf die Schicht à 12 Centner) oder mit Bleischlacken (4 Karren pro Schicht) beschickt. Man erhielt im Durchschnitt 12 Procent Rohstein.

Im Monat April 1587 wurden, wahrscheinlich in Einer Hütte, aber über mehreren Oefen (denn es wurden täglich bis zu 16 Schichten von eben so viel Schmelzen durchgesetzt), 3925 Centner Erze verschmelzt, und 507 Centner 28 Pfund Rohstein erhalten, folglich beinahe 13 Procent.

Eine besondere Gattung von Erzen vom Eichhorn gab gegen 40 Procent Stein.

183 Centner 27 Pfund Schliche, die in demselben Jahre für sich mit Bleischlacken verschmelzt wurden, gaben gegen 40 Centner Rohstein, oder 21,7 Procent.

Im Jahre 1600 wurden vom 4ten März bis 25ten Juni über 2 Hohe-Oefen 3518 Centner Erze verschmelzt. Die Oefen gingen 6 bis 7 Tage auf einem Zumachen, wenn nicht Wassermangel sie hinderte, und es wurden pro Schicht 40—44 Centner Erz gesetzt. Das Erz wurde gehalbirtes genannt; vielleicht halb Stufferz, halb Schlich; denn da, wo Stufferz

besonders gemeint ist, wird ein flüssigerer Gang der Arbeit bemerkt. An Rohstein wurden vom obigen Erzquantum ausgebracht 392 Centner, d. i. etwas über 11 Procent.

Der erhaltene Rohstein wurde geröstet, und dann in die Bleiarbeit genommen.

Im Jahre 1587 wurden in 24 Bleiarbeiten, vom 27sten Juli bis 19ten August, 568 Centner gerösteter Rohstein mit

25	Centner	44	Pfund	Hartblei *),
14	—	62	—	Frischblei,
Summa 40	—	6	—	verbleiet, und ausgebracht:

32	Centner	89	Pfund	Werke,
97	—	77	—	Bleistein.

Hiernach ist der Bleiverlust nicht sehr beträchtlich gewesen: man darf die im Bleistein enthaltenen 7 Centner 17 Pfund, oder pro Centner 7,3 Pfund, aber auch nicht für verloren rechnen, weil dieses bei den folgenden Bleiarbeiten wieder zugeschlagen wurde. Von einer Aufarbeit aus dieser Periode findet sich keine Nachricht. Aus dem Jahre 1600 findet sich eine Folge. Es wurde in diesem Jahre, vom 29sten März bis zum 8ten Juni, in 28 Bleiarbeiten verbleiet:

310	Centner			Rohstein und
74	—			Rohgekrätz,
384	—			mit
64	Centner	—	—	Bleistein
28	—	—	—	Hartblei
20	—	40	Pfund	Frischblei
9	—	84	—	Silberberger Blei
122	Centner	24	Pfund	Bleizuschlägen,

und ausgebracht: 42 Cent-

*) Aus Glötte und Herd reducirtes Blei, von Hart oder Herd. Andere verstehen darunter Werkblei, im Gegensatze von — weich Polnisch Blei d. h. Tarnowitzer Frischblei — welcher Ausdruck sich ebenfalls in den alten Nachrichten findet. Doch ist erstere Erklärung ohne Zweifel die richtigere.

42 Centner 10 Pfund Werke
7 — 59 — Gebraun (wahrscheinlich unreine Werke)
Summa 49 Centner 78 Pfund Werke.

Der Steinfall ist nicht angegeben. Es mufs aber viel oder sehr reicher Stein gefallen seyn; denn wenn man den zugeschlagenen Bleistein nur zu 7 Centner Bleigehalt rechnet, so waren doch 62 Centner 52 Pfund Blei in der Beschickung, und da nur 49 Centner 78 Pfund Werke fielen, so mufsten 12 Centner 74 Pfund im Steine geblieben seyn.

Diese 49 Centner 78 Pfund Werke wurden auf zweimaliges Zustellen abgetrieben, und die Blicke auf dem Test feingebrannt. Sie gaben fünf Mark fein Gold, als den Goldgehalt von 384 Centner Rohstein; also 100 Centner Rohstein 20,65 Loth Gold. Da zu 100 Centner Rohstein 900 Centner Erze erforderlich gewesen waren, so bestand das Ausbringen von Gold pro Centner Erz in 0,023 Loth, oder pro 100 Centner 2,3 Loth.

Noch sind Nachrichten von einem im Jahre 1669 angestellten Probeschmelzen vorhanden. Man wollte versuchen, die Erze zugleich mit Blei zu arbeiten. 100 Centner Erz wurden beschickt mit

50½ Centner Tarnowitzer Frischblei
10 — Silberberger Blei
14½ — Herd und Glötte
50 — Goldberger Kupferschiefer
26 — Eisenerz,

und aufserdem mit Quarz und Schlacken, und auf zwei Zumachen durchgesetzt. Man erhielt sogleich 44 Centner Werke und 30 Centner Stein, welcher mit 14 Centner Blei aufs neue durchgesetzt, noch 21 Centner Werke gab. Man erhielt also von 99 Centner Bleizuschlägen 65 Centner Werke. Diese wurden auf mehreren Zustellen abgetrieben, und Blicke erhalten von zusammen 5 Mark 6½ Loth. Nach dem Feinbrennen und Scheiden erhielt man 26 Dukaten Gold und 4 Mark 7 Loth fein Silber. Man hatte also circa 59 Centner Blei verbrannt, und wenn der Ausdruck: 26 Dukaten Gold soviel bedeutet, als: das Gewicht von 26 Dukaten, 6,2 Loth aus 100 Centner Erz; folglich 1 Loth Gold aus 16 Centner Erz (aus 1 Ctr. 0,062 Loth, oder ungefähr aus 16 Centner Erz 1 Loth Gold) ausgebracht.

Die Kosten betrugen 507 Thaler, der Werth sämmtlicher Produkte aber nur circa 300 Thaler.

Dies scheint der letzte Versuch gewesen zu seyn, die Reichensteiner Erze auf dem alten Wege zu benutzen, welcher den Zeitumständen nicht mehr angemessen war.

Der Berghauptmann von Scharfenberg kehrte den Proceſs um, und benutzte denjenigen Bestandtheil der Erze, welcher vorher in die Luft gejagt worden war. Was von ihm und seinen Söhnen geschehen ist, erzählen letztere in dem Berichte vom 9ten Mai 1718 selbst. — Die Erze wurden gepocht, in Röstöfen mit Reverberirfeuer abgeröstet, das Arsenikmehl raffinirt, und die abgebrannten Schliche mit Silberberger Erzen verbleiet; auch Gold gemacht, welches in die Münze abgeliefert wurde.

Ueber diesen Schmelzproceſs sind keine Nachrichten vorhanden, indem diese Gebrüder Scharfenberg ihre Wissenschaft als ein Geheimniſs behandelten.

Gegenwärtiger Standpunkt der Theorie über den Ertrag und die Erschöpfung der Ernten im Verhältnifs zu der Thätigkeit und dem Reichthum des Bodens *).

Von Herrn Thaer **).

Folgende Erscheinungen beim Landbau sind als unbezweifelte und, bis auf wenige besondre Ausnahmen, allgemein zutreffende Erfahrungen von allen aufmerksamen Ackerbauern einstimmig anerkannt worden.

1.

Der Ertrag oder die Fruchtbarkeit des Bodens vermindert sich mit jeder Kornernte, die davon gewonnen wird, und wird endlich so erschöpft, dafs der Acker mit Vortheil nicht mehr bestellt werden kann, bevor man ihm einen Ersatz seiner Fruchtbarkeit gegeben hat.

2.

Diese Abnahme der Fruchtbarkeit und endliche Erschöpfung erfolgt auf verschiedenen Bodenarten in mehr oder minder merklichen Abstufungen und in kürzerer oder längerer Zeit.

*) Es war eine Vorlesung über diesen Gegenstand im Jahre 1812 von der Akademie zum Abdruck bestimmt. Da aber der Verfasser ihm seitdem eine etwas veränderte Ansicht abgewonnen hatte, so wünschte er, um Mifsverstandnisse uud Widersprüche mit seinen spateren Schriften zu vermeiden, diese Vorlesung umzuarbeiten; was die Akademie ihm zu gestatten kein Bedenken trug.

**) Vorgelesen den 3. Februar 1814.

In der Regel erfolgt sie auf sandigem und sehr kalkhaltigem Boden merklicher und schneller, auf thonigtem und moderigem Boden langsamer.

3.

Sie erfolgt stärker und schneller nach einer Frucht als nach der andern. Unter den eigentlichen Cerealien zieht der Weizen mehr Fruchtbarkeit aus als der Roggen, dieser mehr als die Sommergerste, und diese mehr als der Hafer; weshalb auch die Früchte in dieser Ordnung auf dem Acker gebaut zu werden pflegen.

4.

Die Abnahme und Erschöpfung der Fruchtbarkeit erfolgt beim Anbau der Cerealien nach stärkeren, durch günstige Witterung bewirkten Ernten merklicher als nach schwächern, durch ungünstige Witterung zurückgehaltnen; jedoch mit der Ausnahme, wenn durch vieles statt der Frucht aufkommendes und in Saamen gehendes Unkraut der Acker auch erschöpft und noch stärker verunreinigt wird. — Dieser Erfahrungssatz ist vielleicht nicht von jedem Ackerbauer so anerkannt, weil er, aufser der gedachten, durch manche Nebeneinwirkungen verdunkelt wird. Er scheint sich mir aber aus der Masse von Beobachtungen einer langen Reihe von Ernten klar zu ergeben, und er läfst sich gewissermafsen schon aus der Gleichheit des Ernteertrages und der Produktion ganzer Länder in einem gewissen Zeitraum (wenn sich anders die Kulturart gleich geblieben ist) abnehmen; eine Gleichheit, die besonders Unger in seinem Werke, „die Ordnung der Fruchtpreise 1750," nach hundertjährigen Erfahrungen vortrefflich dargestellt hat.

5.

Die ausgesogene Fruchtbarkeit wird dem Acker auf mehrere Weise ersetzt. *A*) Durch Dünger, und zwar

a) vegetabilisch-animalischen: aber auch nicht auf allen Bodenarten in gleichem Verhältnisse. Der sandige und kalkige Boden kann, wenn er so erschöpft ist, dafs er mit Vortheil nicht mehr bestellt werden kann, durch eine geringere Quantität von diesem Dünger in seine vorige Fruchtbarkeit wieder versetzt werden; der thonigte und modrige erfordert einen weit stärkern, und wenn er einmal — was freilich nicht leicht geschieht — ganz erschöpft ist, eine sehr starke und wiederholte Düngung;

b) mit mineralischem und kalischem Dünger, ätzendem Kalk, Kreide, Asche, Mergel, Salzen. Dieser stellt die mehrentheils erschöpfte Fruchtbarkeit oft auf eine höchst thätige Weise wieder her; mehr in der Regel auf thonigem und modrigem Boden, als auf sandigem; jedoch nur unter der Bedingung, dafs er nicht mehreremale wiederholt werde, bevor eine animalisch-vegetabilische Düngung gegeben worden, indem er sonst seine Wirksamkeit verliert, und den Boden in einem höchst erschöpften, kaum durch mehrmalige Mistdüngungen wieder empor zu bringenden Zustande hinterläfst.

6.

B) Durch sogenannte Ruhe, eigentliche Berasung des Bodens, welche gewöhnlich durch weidendes Vieh benutzt wird. Man nennt es das Eindreischen oder Dreisch. Der Ersatz der Fruchtbarkeit durch diese steht im Verhältnifs mit der Stärke und Dichtigkeit der Grasnarbe, die sich darauf erzeugt, und der Nahrung, welche diese dem Weidevieh giebt. Und da diese auf ganz erschöpftem Boden schwach zu seyn pflegt, so ist auf solchem auch die Wirkung schwächer. Natürlich richtet sie sich auch nach der Länge der Zeit, worin der Boden so liegt.

7.

C) Durch den Anbau solcher Gewächse, welche nicht viele Nahrung aus dem Boden zu ziehen scheinen, ihm aber durch den Abfall ihrer Blätter, durch ihre Stoppeln und Wurzeln mehr hinterlassen, als sie auszogen, oder die vielleicht in ihrem saftreichsten Zustande untergepflügt wurden.

8.

D) Durch eine wiederholte und wirksame Bearbeitung des Bodens mit Pflug und Egge, besonders in den Sommermonaten: die eigentliche Brache. Sie thut die gröfste Wirkung auf thonigem Boden, verliert selbige jedoch auch auf diesem, wenn sie mehreremale, ohne ein andres Ersatzmittel der Fruchtbarkeit zu geben, wiederholt wird. Auf sandigem Boden thut sie geringere Wirkung, ja es ist ihm — wovon sich jetzt aufmerksame Beobachter überzeugt haben — schädlich, wenn seine Bearbeitung öfter, als es zur Vertilgung des aufkeimenden Unkrauts nöthig ist, wiederholt wird.

9.

So wie diese Erfahrungssätze von allen aufmerksamen Beobachtern einstimmig anerkannt waren, so beachtete sie auch jeder verständige Landwirth, richtete sich in der Wahl und Folge der Früchte nach der Fruchtbarkeit, die er noch im Boden nach der ihm gegebenen Düngung und den schon herausgezogenen Ernten vermuthete, berechnete sich danach den Ertrag, den er in einem Mitteljahre von jeder Frucht erwarten konnte; zugleich aber auch den Düngerbedarf, der zur Erhaltung der Fruchtbarkeit des Bodens, im Verhältnifs der mehr oder minder erschöpfenden Ernten, erforderlich ist.

10.

Da hierüber aber manche Mifsverständnisse und Irrungen, mithin für die Praxis sehr bedeutende Fehler entstanden, insbesondere wenn von der landüblichen Wirthschaftsart, bei welcher eine einfache Analogie die Verhältnisse angeben konnte, abgewichen werden sollte — da das Verhältnifs der Verbesserungsmittel und ihrer Herbeischaffung zu den beabsichtigten Ernten die Grundregel angab, nach welcher bei dem gröfseren und höheren Betriebe des Ackerbaues das Feldsystem oder die Folge der Früchte, das Verhältnifs des Viehstandes oder des Futterbaues zum Fruchtbau, mit Hinsicht auf die Beschaffenheit des Bodens und der Art der Grundstücke, eingerichtet werden müsse, damit der Acker nicht stärker, als es ihm ersetzt werden kann, ausgesogen würde, und in eine kaum wieder zu hebende Erschöpfung verfiele — so fühlte man längst das Bedürfnifs, hierüber allgemein gültige Grundsätze, aus der Masse der Erfahrungen abgezogen, zu erhalten, die man als Richtschnur des Verfahrens annehmen und mit Sicherheit befolgen könne.

11.

Ich habe deshalb im ersten und zweiten Bande meiner Grundsätze der rationellen Landwirthschaft, und früher schon in meinen Vorlesungen, den Versuch gemacht, die Ertragsfähigkeit des Bodens und die davon zu erwartenden Ernten, die Ausziehung, welche diese bewirkten, dann das Verhältnifs, in welchem ein gewisses Quantum von Dünger, oder die Ruhe, der Anbau von verbessernden Saaten, und endlich die vollständige Brachbearbeitung die Fruchtbarkeit — oder, wie ich es nannte, die Kraft des Bodens — wieder herstellten, in Proportionalzahlen zu bestimmen, und so ei-

nen idealischen Maafsstab zu bilden, der freilich erst durch das Anhalten an fernere Erfahrungen gröfsere Genauigkeit erlangen, und vorzüglich zur Fixirung der Begriffe und der Aufmerksamkeit auf diesen wichtigen Gegenstand dienen sollte.

Ich habe diese ungemein Aufmerksamkeit erregende Idee weiter verfolgt und entwickelt, besonders in der Geschichte meiner Wirthschaft zu Mögelin, indem ich die aus derselben sich ergebenden Resultate an jenen Maafsstab hielt.

12.

In der bestimmteren Angabe der Grade, worin die Fruchtbarkeit steigt und fällt, hatte ich mich aber nur auf eine Bodenart beschränkt, nämlich auf diejenige, die zwischen 30 bis 40 Procent abschwemmbare Theile hat und übrigens aus Sand besteht, und die man sandigen Lehmboden oder leichteren Gerstboden zu nennen pflegt, weil wir von diesem die meisten und zuverlässigsten Erfahrungen hatten. Ich habe nur angedeutet, welche Abänderungen auf andre Bodenarten wahrscheinlich eintreten würden.

13.

Einer meiner vormaligen Schüler, der Hr. Carl v. Wulfen, ein eben so gründlicher Mathematiker als eifriger Landwirth, hat diese Idee mit regem Geiste ergriffen, und einen „Versuch einer Theorie über das Verhältnifs der Ernten zu dem Vermögen und der Kraft des Bodens, über seine Bereicherung und Erschöpfung, Berlin 1815," herausgegeben, die er während des letzten Feldzuges in müfsigen Augenblicken ausarbeitete. Er findet meine Berechnungsweise in ihrer Form nicht flexibel genug, um ihr eine ausgedehnte Anwendung zu geben. Die seinige gestattet diese allerdings weit mehr; ich gebe ihrer Form meinen völligen Beifall, und werde sie, jedoch mit einigen Abänderungen in ihrer Anwendung, annehmen.

14.

Er stellt seine theoretische Ansicht der Fruchtbarkeit des Bodens, ihrer Vermindrung und Vermehrung in §. 1 — 5. dar; mehrentheils übereinstimmend mit der meinigen. Ich werde aber meine Ansicht hier, in so fern sie auf den Gegenstand Bezug hat, in kurzen Sätzen vorlegen; in so fern dies zum Verständnifs der Formel in ihrer Anwendung nothwendig ist.

15.

Der wesentlichste Nahrungsstoff, welchen die Pflanzen aus dem Boden ziehen, giebt ihnen der darin enthaltene vegetabilisch-animalische Moder (*humus*). Selbst die Erden, welche die Pflanzen als integrirende Theile in geringem Verhältnisse zu ihrer Masse enthalten, giebt ihnen der Humus in fein aufgelöseter Gestalt, in so fern sie nicht — wie es Saussure's und unsers Schrader's Versuche wahrscheinlich machen — durch den lebenden Organismus der Pflanzen aus entfernteren elementarischen Stoffen gebildet werden.

16.

Der Humus erleidet im Boden eine successive und mannigfaltige Veränderung, geht aus einer feinfasrigen Gestalt, wo wir ihn doch schon Humus nennen, in die eines feinen Pulvers über, löset sich in Extractiv-Stoff und Kohlensäure auf; oder er verkohlt sich, oder geht in einen sauren Zustand über; in welchen letztern Fällen er schwer zersetzbar oder doch zur Nahrung der meisten Pflanzen untauglich zu werden scheint.

Wahrscheinlich ist es, dafs er nur in der Gestalt des Extractivstoffs und der Kohlensäure in die Pflanzen übergehen und zu ihrer Nahrung dienen mag.

17.

In beide Materien zersetzt sich der Humus nur durch den Zutritt der atmosphärischen Luft oder des Sauerstoffs, wie besonders Saussure dargethan hat.

18.

Je stärker die Berührung jener, besonders bei höherer Temperatur und dem Zutritte des Lichts ist, desto schneller und stärker ist die Erzeugung jener Materie.

Diese Berührung und Einwirkung ist aber stärker im lockern sandigen Boden, als im gebundenen thonigten; stärker im trocknen als im nassen; stärker in dem den Sonnenstrahlen stark ausgesetzten, als im beschatteten. Deshalb erfolgt der Uebergang des Humus in eigentlichen Nahrungsstoff, welcher die zeitige Fruchtbarkeit des Bodens ausmacht, schneller in jenen als in diesen Bodenarten.

19. Den

19.

Den Einfluſs, welchen der Boden auf diese Zersetzbarkeit des Humus im Nahrungsstoff hat, nenne ich seine Thätigkeit (v. Wulfen nennt es seine Kraft, aber das kann leicht Miſsverständniſs veranlassen), die nach Graden angedeutet wird. Das Maafs desjenigen Humus, welcher zu diesem Uebergange bereit ist, oder den zersetzbaren, nennen wir den Reichthum des Bodens.

20.

Den wirklich erzeugten Nahrungsstoff, das Produkt der Thätigkeit mit dem Reichthum, macht die zeitige Fruchtbarkeit oder Ertragsfähigkeit des Bodens aus.

21.

Denjenigen Humus, der noch nicht in den Zustand der Zersetzbarkeit übergegangen ist, nenne ich den Vorrathsfonds des Bodens.

22.

Der Reichthum des Bodens steht in der Regel im umgekehrten Verhältnisse mit der Thätigkeit des Bodens. Denn diese gestattet, wenn sie groſs ist, keine Ansammlung desselben. Daher finden wir selten sandigen oder kreidigen Ackerboden, der ohne neuerlich gegebene Düngung über 1 pr. C. Humus hätte, und eben so selten thonigten, der so erschöpft ist, daſs er nicht 2 pr. C. enthielte.

23.

Die Thätigkeit des Bodens wird erhöht durch eine wirksame und wiederholte Bearbeitung desselben, besonders bei hoher Temperatur, indem durch die Lockerung, Pulverung und Umwendung der Ackerkrume die vom Thon umhüllten auflöslichen Partikeln mit der atmosphärischen Luft und dem Lichte in Berührung gebracht und zu effektivem Nahrungsstoff bereitet werden. Minder wirksam ist diese fleiſsige und tiefere Bearbeitung auf lockern und losen Boden, den die Luft ohnehin durchdringt, und hier fast

nur zur Zerstörung der Unkrautskeime, Unterbringung und Mengung des Düngers nöthig. Ja sie kann für die Fruchtbarkeit nachtheilig werden; indem sich aus dem Humus zu viele Kohlensäure erzeugt und verflüchtigt. Der empirische Landbauer sagt, dieser Boden werde dadurch erkältet und todtgepflugt.

24.

Der Reichthum des Bodens wird nur vermehrt durch das was ihm neuen auflöslichen oder bald in diesen Zustand übergehenden Moder zuführt; also durch die Aufbringung thierischer und vegetabilischer Abgänge und Rückstände, oder durch die Unterbringung der auf ihn selbst erzeugten.

25.

Die kalkigen, alkalischen und salzigen Düngungsmittel scheinen gröfstentheils dadurch zu wirken, dafs sie den noch unzersetzlichen Humus (meinen Vorrathsfonds) schneller in zersetzlichen umwandeln und zum wahren mobilen Reichthum machen. (Doch will ich dem Kalke und den Alkalien nicht alle andre Wirkung vermöge ihrer Verwandtschaft mit der Kohlensäure absprechen.)

26.

Der thierisch-vegetabilische Dünger, der im Gährungszustande sich befindende gewöhnliche Stallmist, hat aber auch einen Einfluss auf die Vermehrung der Thätigkeit des trägeren Bodens; indem er ihn sowohl durch seine fasrige Substanz als durch die bei seiner fortgesetzten Gährung und Zersetzung entwickelten Gase lockert, und in dem schwarzen humösen Boden eine neue Wechselwirkung mit unthätig gewordenen Partikeln erregt, durch sein Ammonium die entstandene Säure neutralisirt. Auf Boden von höherer Thätigkeit kann man ihm diese Wirkung aber nicht anrechnen.

27.

Alle Gewächse ziehen wohl einen Theil ihrer Nahrung mittelst der Wurzeln aus dem Boden, einen andern Theil durch ihr Blattorgan aus der Atmosphäre. Das Verhältnifs des einen zum andern ist bei verschiedenen

Pflanzengattungen sehr verschieden, und läfst sich aus der Stärke und sichtbaren Thätigkeit ihres Blattes abnehmen. Die Cerealien haben letzteres insbesondere im Verhältnifs ihrer starken Körnererzeugung nicht, und ihr Blatt schrumpft zusammen, gerade wenn diese vor sich gehet. Sie nehmen daher wohl den gröfsten Theil ihrer Nahrung aus dem Boden. Es ist mithin nicht nur a priori wahrscheinlich, sondern auch durch die allgemeine Erfahrung beim Landbau historisch erwiesen, dafs sie den Nährungsstoff des Bodens im Verhältnifs ihres Ertrages an nahrhaften Theilen erschöpfen. Die Summen der Beobachtungen und Versuche, welche wir von der Erschöpfung des Ackers durch die davon gezogenen Ernten haben, und welche wir nach dem ermessen, was die folgenden Ernten weniger geben als die vorhergehenden gaben, zeigen eine unverkennbare Uebereinstimmung in der Aussaugung jeder Getreideart mit den nahrhaften Theilen, die eine Ernte von selbigen enthält.

28.

Nach dem Durchschnitt der Analysen dieser Getreidearten, besonders der Einhofschen (bekanntlich tritt hier einige Verschiedenheit nach der gröfsern oder geringern Ausbildung des Korns ein), sind an nahrhaften Theilen — Stärkemehl, Kleber oder Eiweisstoff und süfslichschleimige Materie — dem Gewicht nach enthalten:

im Weizen	von 100	77,5
Roggen	- -	70
kleine Gerste	-	60
grofse Gerste	-	62
Hafer	- -	58

Dies beträgt also in 1 Berliner Scheffel:

Weizen	von 94	Pfund	= 72,75
Roggen	- 80	-	= 56
kleine Gerste	- 64	-	= 38,4
grofse Gerste	- 68	-	= 42
Hafer	- 48	-	= 27,8

29.

In diesem Verhältnifs scheint auch eine Ernte der genannten Getreidearten den Reichthum des Bodens nach der gewonnenen Scheffelzahl auszuziehen.

Und in demselben Verhältnisse giebt ein Acker, der sich in gleichem Fruchtbarkeitsgrade befindet, in einem Mitteljahre seinen Ertrag in den verschiedenen Früchten, vorausgesetzt, dafs der Boden allen gleich angemessen sei. Ist das nicht, so giebt er in der ihm angemessenen Frucht mehr als in der die ihm nicht zusagt; wird dann aber auch von jener mehr erschöpft werden, als von dieser.

30.

Ich nehme also nach obigem Verhältnisse an, der Bedarf des Reichthums oder Nahrungsstoffs sei für jeden von einem Morgen über die Einsaat gewonnenen Scheffel

Roggen	=	1
Weizen	=	1, 3
kleine Gerste	=	0, 6
grofse Gerste	=	0, 7
Hafer	=	0, 5

jedoch bei letzterem auch nach Verschiedenheit seiner Schwere. Die bereite Nahrung oder den Fruchtbarkeitsgrad aber, der zur Erzeugung jedes Scheffels über die Einsaat auf einem Morgen erforderlich ist, bestimme ich danach mit der Proportionalzahl

für den Roggen	=	60
Weizen	=	78
kleine Gerste	=	36
grofse Gerste	=	42
Hafer	=	30

Ich sage über die Einsaat, weil ich glaube annehmen zu müssen, dafs in der Einsaat so viel Nahrungsstoff enthalten sei, um sich selbst zu repro-

duciren, und dafs eine überflüssige Einsaat, bei der die Pflanzen nur zum Theil aufkommen können, als Düngung in dem Verhältnisse wirke. Man kennt die starke Düngungskraft der Malzkeime.

Diese Fruchtbarkeit ist nun, wie oben gesagt, das Produkt der Thätigkeit mit dem Reichthum. Wie bestimmen wir den Antheil eines jeden dieser Faktoren nach den obigen Annahmen?

31.

Es geschieht durch das Quantum, was ein Acker bei gleichartiger Behandlung, aber ohne Ersatz durch Dünger zu erhalten, in der zweiten Ernte erfahrungsmäfsig weniger zu geben pflegt, als in der ersten Ernte. Die Thätigkeit bleibt sich unter Voraussetzung der gleichen Behandlung bei der zweiten Ernte gleich; der Reichthum aber hat sich durch die abgewonnene Ernte im Verhältnifs ihres Ertrages vermindert. Hr. v. Wulfen hat für diese Berechnung §. 6. seiner Schrift eine etwas complicirte Formel aufgestellt. Einfacher geht dasselbe Resultat hervor, wenn man sagt: dafs wir den Reichthum des Bodens bei der ersten Ernte finden, wenn wir in das Quadrat des Produktes derselben mit dem Minus der zweiten Ernte dividiren; und haben wir jenen gefunden, so ergiebt sich der Thätigkeitsgrad, wenn wir in den Fruchtbarkeitsgrad, den der Boden zur Hervorbringung der ersten Ernte haben mufste, dividiren.

32.

Je gröfser nämlich der Abschlag der zweiten Ernte im Verhältnifs zur ersten ist, desto gröfser mufs die Thätigkeit seyn, womit der Boden den Nahrungsstoff bereitet, oder den Reichthum in wirkliche Fruchtbarkeit umwandelt, zugleich aber auch die Erschöpfung desselben für die folgenden Ernten.

Wenn aber eine fast gleiche Ernte erfolgt, so mufs der Reichthum um so gröfser seyn, und er wird im Verhältnifs seiner Masse weniger erschöpft werden.

53.

Hier tritt nun die Frage ein: ob nicht eine verschiedene Thätigkeit oder Anziehungskraft der verschiedenen Pflanzen anzunehmen sei, wie ich dies nach meinem vormaligen System gethan habe? Hr. v. Wulfen scheint der Verschiedenheit der Pflanzen keine Einwirkung auf den Uebergang des Reichthums zuzugestehen, sondern anzunehmen, dafs aus gleicher Thätigkeit und gleichem Reichthum gleicher Nahrungsstoff bereitet werde, dafs jede Saat das Bereitete aufnehme und einen Ertrag an Scheffeln gebe, nach Verhältnifs dessen, was daraus gebildet werden kann. Wenn z. B. die Fruchtbarkeit als Produkt der Thätigkeit mit dem Reichthum = 360 ist, so werden daraus 6 Scheffel Roggen erzeugt, wäre aber statt dessen Weizen gesäet, so würde nach dem eben angegebenen Verhältnifs nur 4, 615 Scheffel Weizen erfolgen. Dies stimmt nicht mit der Erfahrung, wenigstens nicht auf manchen Bodenarten, wo man annimmt, dafs Weizen und Roggen gleichen Ertrag an Scheffeln geben. Jedoch kann man die Erfahrungen in Pausch und Bogen nicht anerkennen; denn wo beidas, Roggen und Weizen, gebauet wird, säet man letztern in der Regel auf kräftigeres Land, giebt ihm auch eine sorgfältigere Vorbereitung und den besten Dünger. Dann setzt auch v. Wulfen voraus, dafs jede Frucht nur auf dem ihr angemessenen Boden komme. Und endlich macht es in Ansehung der Haupttendenz dieser Berechnung keinen grofsen Unterschied, weswegen wir die Frage vorerst nur dahin gestellt seyn lassen wollen.

54.

Ich wiederhole, dafs die Bestellung und die Behandlung der zweiten Frucht, der der erstern völlig gleich seyn müsse, und dafs nichts vorgenommen worden, was eine Abänderung des Reichthums und der Thätigkeit hätte bewirken können. Da dies nun selten in der Praxis der Fall ist, so giebt uns die Erfahrung wenige Data, nach welchen wir so geradezu auf arithmetischem Wege den Reichthum und die Thätigkeit der Bodenarten bestimmen konnten. Versuche aber würden eine lange Reihe von Jahren — da, wie sich von selbst versteht, einzelne Jahre nichts entscheiden können — mit grofsen Aufopferungen fortgesetzt werden müssen, bevor sie ein Resultat gäben. Wir können uns nur durch Induction aus der Masse der

hierauf Bezug habenden Erfahrungen dem richtigen Verhältnisse jener beiden Faktoren der Fruchtbarkeit nähern. Weil es indessen Bodenarten giebt, welche nach einer gleichartigen Brachbehandlung nur eine sehr geringe Differenz der nachfolgenden gegen die vorhergehende Ernte haben würden, etwa nur $\frac{1}{20}$, andre aber, wo das Minus der zweiten Ernte $\frac{1}{2}$ der ersten beträgt, so kann der Thätigkeitsgrad (oder wie man es im letztern Falle lieber nennen möchte, die Erschöpfbarkeit des Bodens) zu 2 bis 30 angenommen werden; jedoch werden diese Extreme selten vorkommen. Erstere sind entweder die thonigt humösen Bodenarten, die bei hohem Ertrage unerschöpflich scheinen, und es wirklich auch sind, wenn ihnen die hohe Stoppel des gesichelten Getreides gelassen wird, und bei denen oft der Raum das Produkt ihrer Fruchtbarkeit beschränkt; oder die sogenannten kalten schluffigen, gewöhnlich versäuerten Bodenarten, die nur geringen Ertrag geben, an denen man aber bei wiederholter Bearbeitung wenig Abgang bemerkt. Die andern sind solche Bodenarten, die ohne alljährige Düngung ihre Bestellungskosten nicht bezahlen, mithin nur da bestellt werden können, wo jene leicht und wohlfeil zu bekommen ist. Letzteres trifft bei den sehr sandigen und kreidigen Boden zu, welche jedoch, um ihre Thätigkeit im Durchschnitt der Jahre äufsern zu können, eine Feuchtigkeit erhaltende Lage oder Klima haben müssen *).

55.

Die gewöhnlichern Ackerbodenarten, auf welche hier nur Rücksicht genommen werden kann, und von welchen sich auch nur solche Data werden auffinden lassen, auf die man eine Berechnung gründen mag, werden nach obiger Regel zwischen 5 und 20 Grad Thätigkeit stehen. Wir werden annehmen müssen:

Für den eigentlichen Thonboden	5. 6. 7.
Für den Lehmboden	8. 9. 10.
Für mergeligten Lehmboden	10. 11. 12. 13.
Für sandigen Lehmboden	11. 12. 13. 14.

*) So hat man in dem feuchten Klima der Niederlande Sandboden, der Jahr aus Jahr ein = 12 Scheffel Roggen trägt, aber alljährig Kloakdünger erhält.

Für lehmigen Sandboden 14. 15. 16. 17. 18.
Für Sandboden 19. 20.
Für Kreideboden — —

36.

Jede Bearbeitung des Bodens vermehrt ohne Zweifel seine Thätigkeit in dem Verhältnifs, wie sie durchdringender ist. §. 8. 23. Die Wirkung derjenigen, welche in der Regel zu jeder Saat gegeben wird, nehmen wir als einbegriffen in die natürliche Thätigkeit an. Derjenigen jedoch, welche man besonders der spät gesäeten kleinen Gerste noch in der wärmern Frühjahrszeit zu geben pflegt, wäre ich geneigt, die Wirkung von $\frac{1}{3}$ Brache beizumessen.

Der vollständigen einen ganzen Sommer durch fortgesetzten Brachbearbeitung mifst v. Wulfen eine Thätigkeitsvermehrung von 1 Grad bei, die jedoch nur auf die erste Saat beschränkt ist, wodurch die gröfsere Wirkung, welche sie auf Boden von mindererer natürlicher Thätigkeit und die geringere auf Boden von höher Thätigkeit hat, sehr gut ausgedrückt wird. Er schreibt ihr auch noch eine, obwohl sehr geringe Vermehrung des Reichthums zu, die bei der vollständigen Brache wohl nur durch die Zerstörung des aufkeimenden Unkrauts bewirkt werden kann. Es scheint mir dies aber zu unbedeutend, um in Anschlag gebracht zu werden.

Die unvollkommene Hegebrache aber, welche man bis nach der Mitte des Sommers zur Viehweide benutzt, werden wir die Wirkung einer halben Dreischweide in Vermehrung des Reichthums zuschreiben können; dagegen aber nur einen halben Grad in Vermehrung der Thätigkeit. Sie hat wirklich Vorzüge auf dem sehr thätigen Boden, wenn nicht die Vertilgung des Unkrauts eine vollständige Brache erheischt.

37.

Der Ersatz und die Vermehrung des Reichthums wird durch den eigentlichen Dünger hauptsächlich bewirkt. Vom Stallmiste haben wir nur zureichende Erfahrungen. Ein mäfsiges vierspänniges Fuder pflegt 2000 Pfd.

zu

zu wiegen. (Ich behalte hier das Gewicht bei, was v. Wulfen annimmt, ohnerachtet ich sonst wohl das Normalfuder etwas stärker angenommen habe). Wir setzen voraus, dafs er aus demjenigen Verhältnisse von animalischen und vegetabilischen Theilen bestehe, welche der Landwirth zu gutem, kräftigem, oder, wie er zu sagen pflegt, fettem Mist fordert. Ein solches nehmen wir als Normalfuder an. Nach den wahrscheinlichsten Resultaten der Erfahrung giebt ein solches den Stoff, woraus $2\frac{1}{2}$ Scheffel Roggen producirt werden, vermehrt mithin den Reichthum des Bodens um $2\frac{1}{2}$ Grad. v. Wulfen nimmt 2,8 Grad an, dies scheint mir jedoch für das oben angenommene Normalfuder zu viel.

38.

Den Einfluss, welchen der Stallmist auf die Thätigkeit des trägeren Bodens nach §. 26. hat, ist jedem Ackerbauer bekannt. Man sagt: er erwärmt den kalten Boden, was auch wohl physisch nicht unwahr ist, obwohl hier mehr als blofse Erhöhung der Temperatur darunter verstanden wird; den wärmeren Boden aber erhitzt er, um den Ausdruck beizubehalten, und wirkt dadurch zuweilen nachtheilig. Ich nehme vorerst an, dafs eine Düngung von 6 Fudern die natürliche Thätigkeit auf Thon- und Lehmboden, wo sie nicht über 9 Grad beträgt, um 1 Grad für die erste und um $\frac{1}{2}$ Grad für die zweite Ernte vermehre; bei gröfserer Thätigkeit aber wenigstens keine wohlthätige Vermehrung hervorbringe. Es würde sonst bei dem trägern Boden die Wirkung der Düngung in den ersten Jahren weit unter dem, was die Erfahrung zeigt, zu stehen kommen. Genauere Verhältnisse werden sich vielleicht angeben lassen, wenn wir die Sätze erst mehr an die Erfahrung gehalten haben: was denn, ich wiederhole es, überhaupt nur der Zweck bei der Darstellung dieses idealischen Maafsstabes der Fruchtbarkeit seyn kann; ein Zweck aber, der schon durch meine ersten Ideen hierüber bei manchem denkenden Landbauer mit beträchtlichem Nutzen für die Praxis erreicht worden.

39.

Vielleicht wird man sich dann auch bewogen finden, die Wirkung der verschiedenen Gattungen des Stallmistes zu unterscheiden. Der Rindviehmist wirkt ohne Zweifel mehr auf den Reichthum wie der Pferde- und

Schaafmist; dieser aber mehr auf die Thätigkeit wie jener. Rindvieh- und Pferdemist werden mehrentheils gemengt auf den Wirthschaftshöfen, Schaafmist bleibt häufiger allein. Aber jeder Landwirth weifs, dafs er diesen auf tragereu, jenen auf thätigeren Boden vortheilhafter verwende.

40.

v. Wulfen hat auch die Wirkung des Hürdenschlags mit Schaafen im Verhältnifs zur Stallmistdüngung zu bestimmen gesucht. Seine Wirkung ist bekanntlich sehr intensiv, aber wenig ausdauernd. Die meisten behaupten, er äufsere seine ganze Wirkung im ersten Jahre zu $\frac{3}{4}$, und es bleibe höchstens $\frac{1}{4}$ für das zweite zurück. Ich wage aber noch keine Meinung darüber, wie er sich auf verschiedenen Bodenarten verhalte, weil es mir bisher an eigener Erfahrung fehlt und die meisten Landwirthe eine Parteilichkeit für oder gegen diese Düngungsart zu haben scheinen. Gewifs ist es, dafs man, um seine Wirkung erfahrungsmäfsig zu berechnen, ihm eine beträchtliche Thätigkeitsvermehrung zuschreiben müsse.

41.

Die Begrasung, oder das sogenannte Eindreischen des Ackers mit dem dadurch erzeugten Weidedünger vermehrt den Reichthum des Bodens (§. 6.). Bei der Koppelwirthschaft hat man einem Dreisch- oder Weidejahre schon lange die Wirkung eines Fuders Stallmist pro Morgen zugeschrieben, wobei zu bemerken, dafs das Vieh daselbst Tag und Nacht auf der Weide bleibt, mithin keinen Dünger abschleppt. Es hat aber keinen Zweifel, dafs diese Wirkung sich richte nach der stärkern oder schwächern Begrasung und der Nahrung, die das Weidevieh davon hat. Diese aber steht im Verhältnisse mit der Fruchtbarkeit, die der Acker noch hatte, wie er zu Grase niedergelegt ward. In einer schonenden Koppelwirthschaft wird der Acker niedergelegt, wenn er noch $2\frac{1}{2}$ Scheffel Reinertrag geben könnte, also nach unserer Scala in einer Fruchtbarkeit von 150 Grad. In dem Falle glaube ich, dafs man obigen Satz annehmen könne, und dafs mithin ein Dreischjahr den Reichthum um $2\frac{1}{2}$ Grad vermehre. Wenn er aber bis zu 100 Grad erschöpft ist, so wird die Wirkung eines Dreischjahres nur $= 2$ Grad und so immer nach Verhältnifs seyn. v. Wulfen nimmt sie im Verhältnisse viel geringer an, nämlich bei 100 Grad Fruchtbarkeit zu 0,6; wo ich sie, den

meisten Erfahrungen zufolge, noch zu 1,666 ($1\frac{2}{3}$) annehme; jedoch nur drei Jahre hindurch, weil bei längerm Liegen der Graswuchs nachläfst.

§. 42.

Um ein Beispiel dieser Berechnungsart zu geben, nehmen wir einen sandigen Lehm-, sogenannten Gerstboden an, der, nachdem er der ersten Ernte = 6 Scheffel Roggen gegeben hatte, in der zweiten bei gleicher Behandlung = 4,8, mithin 1,2 Scheffel weniger geben würde. In das Quadrat der ersten Ernte = 36 mit dem Minus der zweiten Ernte dividirt, giebt den Grad des Reichthums = 30 an, und da die Fruchtbarkeit = 360 seyn mufs (§. 30.), so ergiebt sich der Thätigkeitsgrad = 12. Da wir aber bei beiden Ernten eine gleiche Behandlung, mithin eine Brache annehmen müssen, welche die Thätigkeit = 1 Grad vermehrte, so ist die natürliche Thätigkeit = 11.

Er sei erschöpft bis dahin, dafs er noch = $2\frac{1}{2}$ Scheffel Roggen nach einer Brache geben könne, also bis 150 Grad Fruchtbarkeit und 12,5 Grad Reichthum.

Wir nennen Thätigkeit	T.
Reichthum	R.
Fruchtbarkeit	F.
Ertrag	E.
Ausgezogener Nahrungsstoff	N.

Rotation der reinen Dreifelder-Wirthschaft.

1) Brache	T + 1 = 12	.	R	12,5				6 Fuder Dünger.		
			+	15						
2) Roggen	T	12	.	27,5	F =	330	E	5,5 Scheffel	N	5,5
			—	55						
3) Gerste	T	11	.	R 22	F =	242	E	5,76	N	4,03
4) Brache	T + 1 = 12		—	4,03						
5) Roggen	T	12	.	R 17,97	F =	215,64	E	3,59	N	3,59
			—	3,59						
6) Hafer	T	11	.	14,38	F =	158,18	E	5,27	N	2,64
			—	2,64						
	bleiben	R		11,74						

Der Acker hatte also verloren bei dieser Rotation 0,76 Grad Reichthum.

Rotation einer gewöhnlichen siebenschlägigen Koppel-Wirthschaft.

1) 2) 3) Weide T 11 . R 12,5 F = 150
+ 7,5

4) Brache T + 1 = 12 . 20 + (6 Fuder Dünger) 15 F = 420

5) Roggen T = 12 . R 35 = F 420 E 7 Scheffel N 7
— 7

6) Gerste T 11 . R 28 = F 308 E 7,33 N 4,97
— 4,97

7) Hafer T 11 . R 23,03 = F 253,33 E 8,44 N 4,22
— 4,22

bleiben R 18,81

Der Acker hatte also gewonnen 6,31 R.

Versuche und Beobachtungen

über

einen diabetischen Urin.

Von Herrn S. F. Hermbstaedt *).

Von den ältesten Zeiten her, bis auf die unsrige, haben die Aerzte den menschlichen Urin als eine liquide Secretion betrachtet, die bald nach der specifiken Konstitution des Individuums, von dem er herstammt, bald nach dem Alter, bald nach dem gesunden oder kranken Zustande desselben einen eben so verschiedenen Karakter wahrnehmen läfst.

Eben jene abwechselnden Veränderungen, denen der Urin im Zustande der Krankheit unterworfen ist, geben den Aerzten die Veranlassung, in ihm ein Criterium zu erkennen, welches geschickt sei, den Gang der Krankheit daraus zu beurtheilen, und so mufste derselbe dem rationellen Pathologen, so wie dem geübten Pfuscher, zu einem Prognostikon dienen, den Gang der Krankheit darnach zu beurtheilen.

Aber alles was bis auf die letztern 20 Jahre in dieser Hinsicht über den Urin und seine Veränderungen gedacht, behauptet und niedergeschrieben worden ist, war auf Vermuthungen und Voraussetzungen gegründet; denn wenn gleich die Veränderungen selbst in der Erfahrung gegründet waren, so waren sie doch von unbekannten Ursachen abhängig, die nur durch eine zweckmäfsig geordnete chemische Zergliederung des Urins enthüllet werden konnten.

*) Vorgelesen den 16. Junius 1814.

Erst als diese angestellt wurde, kam man zur Erkenntnifs von specifiken Materien im menschlichen Urin, deren Ausmittelung durch keinen Schlufs *a priori* möglich geworden wäre, und eben diese Zergliederung des Urins war es, die über die physiologischen so wie die pathologischen Ansichten desselben so viel Licht verbreitete.

Gehen wir auf die Resultate derjenigen Analysen des menschlichen Urins zurück, welche während den Jahren 1758 bis 1800 durch mehrere Aerzte und Chemiker, namentlich die Herren Herissant, Morand, Hundertmark, Pilling. Henkel, Tichy, Rouelle, Halle, Scheele, Weigel, Weber, Brugnatelli und mehrere gemacht worden sind, so müssen wir gestehen, dafs selbige höchstens dazu dienten, dasjenige nur einigermafsen anzudeuten, was man bei einem gründlichern Fortschreiten in der Wissenschaft von ähnlichen Zergliederungen zu erwarten berechtigt war.

Erst als die Herren Fourcroy und Vauquelin *) den menschlichen Urin einer umständlichern Zergliederung unterwarfen, wurden sie dadurch zur Erkenntnifs von konstanten Bestandtheilen in demselben hingeleitet, von denen ihre Vorgänger keine Ahnung haben konnten.

Jene Chemiker begnügten sich nicht damit, die Grundmischung des menschlichen Urins im allgemeinen zu erforschen und seinen specifiken Unterschied von dem Urin anderer Säugthiere dadurch zu begründen: sondern sie betrachteten auch zugleich den Unterschied in den quantitativen Verhältnissen der wesentlichen Bestandtheile im Urin, welche derselbe, in verschiedenen Zeitperioden untersucht, wahrnehmen läfst; so wie die wesentlichen Veränderungen, welche seine Grundmischung erleidet, wenn er im ausgesonderten Zustande sich selbst überlassen bleibt.

Beobachtungen solcher Art mufsten allerdings vorausgehen, wenn man in den Stand gesetzt werden wollte, den Unterschied wahrnehmen zu können, durch welchen der gesunde Urin sich von dem krankhaften auszeichnet, und je mehr nun ähnliche genaue Zergliederungen des Urins von verschiedenen Individuen im gesunden und kranken Zustande unternommen wurden, je mehr mufste der Unterschied in den Erscheinungen auffallend werden, die sich dem Beobachter darboten.

*) *Mémoires pour servir à l'histoire naturelle chimique et médicale de l'urine humaine etc.* In den *Annales de Chimie Tom. XXXI. p.* 48.

Unter einer bedeutenden Anzahl ganz besonders gearteter Stoffe, die sich uns als nicht geahnete wesentliche und konstante Bestandtheile im menschlichen Urin darbieten, zeichnen sich ganz vorzüglich der Harnstoff (*Uré*) und die Harnsäure aus, und diese sind es in der That ganz ausschliefslich, welche nach ihrer Anwesenheit oder Abwesenheit, so wie nach ihrem gröfsern oder kleinern quantitativen Verhältnisse im Urin, durch die gesunde oder kranke Konstitution eines Individui herbeigeführt, die Criterien abgeben, die das Urtheil des Arztes über denselben leiten.

So bestimmt die Gegenwart des Harnstoffs im Urin seine Farbe, und die Gegenwart der Harnsäure seine klare oder trübe Beschaffenheit; aber beide werden vermehrt oder vermindert durch die kranke oder gesunde Beschaffenheit des Individui, von welchem der Urin abstammt.

Durch dergleichen mit Aufmerksamkeit angestellte Zergliederungen des menschlichen Urins, gelangte man auch zur Erkenntnifs von der ganz besonderen Grundmischung desjenigen, welcher beim Daseyn der Harnruhr (*Diabetes mellitus*) ausgesondert wird, einer Krankheit, von welcher die Aerzte bis jetzt eben so wenig die veranlassenden Ursachen anzugeben, als ihre Heilung zu bewirken, vermögend sind.

So viel mir bekannt ist, waren die Herren Nicolas *), Professor der Chemie zu Caen, und Doktor Quadeville, Arzt daselbst, die ersten, welche den diabetischen Urin einer Zergliederung unterwarfen, und dadurch den specifiken Karakter desselben, so wie seinen Unterschied vom gesunden, entwickelten und festsetzten.

Die Harnruhr kündigt sich vorzüglich dadurch an: 1) dafs der Patient in kurzer Zeit eine ungewöhnliche Quantität Urin aussondert, die zuweilen für jede Stunde des Tages dem Umfange nach 2 Pfund Wasser gleich ist; 2) dafs der ausgesonderte diabetische Urin meist farbenlos und immer etwas getrübt erscheint, nie so klar und durchsichtig, wie sonst ein farbenloser Urin zu erscheinen pflegt; 3) dafs derselbe nicht pikant salzig, sonder süfslich zuckerartig schmeckt; 4) dafs er weniger leicht faulet als anderer Urin, sondern vielmehr, statt zu faulen, erst eine weinartige, und sodann eine essigartige Fermentation eingehet; 5) dafs er spezifisch dichter ist, als gewöhnlicher Urin, im Verhältnifs von 1,015 : 1,000 gegen reines Wasser verglichen; 6) dafs solcher nach dem gelinden Abdunsten eine v. in-

*) *Recherches et expériences chimiques et médicales, sur le Diabètes sucré ou phtisurie.* In den *Annales de Chimie Tom. XLIV. pag.* 45.

gelbe, honigartige, klebrige Flüssigkeit darstellt, die nach einigen Tagen von selbst zu einer süfsschmeckenden, dem Stärkezucker in der Form ähnlichen Substanz erstarret.

Die Herren Nicolas und Quadeville glauben aus den Resultaten ihrer Untersuchungen den Schlufs ziehen zu müssen, dafs solcher sich vom gesunden Urin besonders dadurch unterscheidet, dafs er weder freie Phosphorsäure noch Harnstoff enthalte, dagegen aber der Harnzucker einen so reichen Bestandtheil darin ausmache.

Hiermit stimmt auch das Resultat einer von Herrn Louis Cadet angestellten Zergliederung eines diabetischen Urins überein, den er von einem seiner Verwandten erhielt, der an der Harnruhr litt.

Nach einer neuern durch Herrn John Bostock *) angestellten Zergliederung des diabetischen Urins, enthält derselbe selbst Harnstoff unter seinen Bestandtheilen, und zwar bei gleichen Quantitäten des diabetischen und des gesunden Urins untersucht, im letztern nur zweimal so viel als im erstern. Man soll das Daseyn des Harnstoffs im diabetischen Urin dadurch erkennen, dafs solcher, wenn der diabetische Urin mit Salpetersäure gekocht wird, eine eigene Säure in blättrigen Kristallen erzeuge, während das zukkerartige Wesen in Kleesäure übergehet. Eine noch spätere Analyse des diabetischen Urins haben die Herren Dipuytren und Thenard **) angestellt, welche gleichfalls das Daseyn von Harnstoff in selbigen behaupten, welches also noch durch fernere Analysen jener Feuchtigkeit näher ausgemittelt werden mufs.

Die Gelegenheit, welche sich mir darbot, den Urin eines an der Harnruhr leidenden Mannes hierselbst einer Zergliederung unterwerfen zu können, hat mich in den Stand gesetzt, mich mit den Eigenschaften und dem chemischen Verhalten desselben näher bekannt zu machen, und die Resultate meiner eigenen Erfahrung über den gedachten Gegenstand der Königl. Akademie vorlegen zu können.

Der Harnruhrkranke, dessen Urin ich untersucht habe, ist der Baumwollenfabrikant Thiele hierselbst; seiner Erzählung zufolge kündigte sich seine Krankheit durch einen eben so grofsen als unauslöschlichen Durst an, und ein damit verbundenes häufiges Uriniren. Anfangs trank er in einem Zeit-

*) *Memoirs of the medical Society of London Vol. VI. pag. 237. etc.*

**) *Annales de Chimie Tom. LIX. pag. 41.*

Zeitraum von 24 Stunden 8—10 Berliner Quart, theils Bier, theils Milch, theils Wasser; als er aber eines Tages Klöfse genossen hatte, wurde sein Durst so unlöschbar, dafs er im Zeitraum von 24 Stunden bis 26 Quart der obigen Getränke genofs, ohne jedoch den Durst ganz löschen zu können. Anfangs liefs er täglich 8—10 Berliner Quart Urin, gegenwärtig, nach einem Zeitraum von 12 Tagen, in welchem Zeitraum ich täglich von seinem Urin erhalten habe, ist dessen Aussonderung bis auf 5 oder 4 Quart vermindert worden. Die Gesichtsfarbe des Patienten ist lederartig und glänzend, sein Blick höchst misanthropisch. Während oben gedachten Zeitraum, wo ich den Urin jenes Kranken täglich untersucht habe, ist solcher, einige Abwechselungen in der specifiken Dichtigkeit abgerechnet, sich immer gleich geblieben. Der gedachte diabetische Urin, im frisch gelassenen Zustande, besitzt die Farbe des Champagnerweins von einer wenig getrübten Beschaffenheit, sein Geruch ist nur höchst schwach urinartig, sein Geschmack ist süfslich salzig, seine spezifische Dichtigkeit verhält sich gegen destillirtes Wasser bei mittler Temperatur: *a*) wenn er Vormittags gelassen ist wie 1,035, *b*) wenn er einige Stunden nach der Mahlzeit gelassen ist, wie 1,045 zu 1,000, statt dafs der Urin von gesunden Personen nur immer eine specifische Dichtigkeit von 1,005 bis 1,008 wahrnehmen läfst.

Prüfung des diabetischen Urins mit Reagentien.

a) Lackmuspapier in einen frischen diabetischen Urin getaucht, wird nach ein paar Minuten merklich geröthet. Wird jener Urin mit dem 4ten Theil seines Umfangs einer frisch bereiteten Lackmustinktur versetzt, so färbt das Gemenge sich nach einiger Zeit violet.

Gesunder Urin, auf gleiche Weise behandelt, nimmt eine dem Rothwein ähnliche Farbe an.

b) Prüfung mit Galläpfelinfusum.

Eine mit Wasser gemachte Infusion von Galläpfeln in den diabetischen Urin getröpfelt, fället ein flockiges Wesen daraus, das sich wie gegerbte Gallerte verhält. Lymphe kann solches nicht seyn, weil weder der Alcohol noch die Wärme eine Gerinnung in dem Urin veranlassen.

Gesunder Urin verhält sich eben so.

c) Prüfung mit salpetersaurem Silber.

Eine Auflösung von salpetersaurem Silber erzeugt in dem diabetischen Urin einen käsigen Niederschlag, der nach ein paar Stunden eine Lilasfarbe annimmt. Wird dieser Präcipitat durch ein Filtrum von dem übrigen Fluido getrennt, so erscheint das Filtrirte gelblich und geruchlos. — Der ausgesüfste Präcipitat ist ein Gemenge von salzsaurem und phosphorsaurem Silber.

Gesunder Urin auf gleiche Weise behandelt, giebt einen violetten Niederschlag. Das abfiltrirte Fluidum erscheint rothgelb und riecht urinartig.

d) Prüfung mit salpetersaurem Quecksilber.

Werden in 4 Loth des diabetischen Urins 12 Tropfen einer konzentrirten Auflösung von salpetersaurem Quecksilber getröpfelt, so nimmt diese Flüssigkeit nach einiger Zeit eine rosenrothe Farbe an, und es wird ein rosenrother Präcipitat gefallet; das abfiltrirte Fluidum erscheint klar wie Wasser.

Der gesunde Urin, auf gleiche Weise behandelt, verhält sich eben so, dafs nach dem Filtriren übrigbleibende Fluidum erscheint gelb.

Der Niederschlag scheint eine Verbindung von phosphorsaurem und einem harnsauren Quecksilber auszumachen.

e) Prüfung mit schwefelsaurem Quecksilber.

Schwefelsaures Quecksilber erzeugt im diabetischen Urin eine schmutzigweifse Trübung, und nach einiger Zeit fallt ein röthlicher Präcipitat zu Boden, der sich nur äufserst schwer absondert. Er scheint gleich dem vorigen eine Verbindung von phosphorsaurem und harnsaurem Quecksilber auszumachen.

Gesunder Urin, auf gleiche Weise behandelt, verhält sich eben so, nur färbt sich das Fluidum lila und der Präcipitat sondert sich leichter ab.

f) Prüfung mit salzsaurem Blei.

Mit Wasser gelöstes salzsaures Blei in den diabetischen Urin getröpfelt, erzeugt darin einen schmutzig röthlichweifsen Niederschlag, und es bleibt ein wasserklares Fluidum zurück. Der ausgesüfste Präcipitat scheint eine Verbindung von phosphorsaurem und harnsaurem Blei zu seyn.

g) Prüfung mit salpetersaurem Blei.

Das salpetersaure Blei verhält sich gegen den diabetischen Urin eben so, wie das salzsaure. Der Niederschlag fällt reichlicher zu Boden, und besitzt eine schmutzig röthliche Farbe. Wird er nach dem Aussüfsen mit destillirtem Wasser ausgekocht, so löst sich das salzsaure Blei daraus auf, und der Rückstand scheint ein Gemenge von phosphorsaurem und harnsaurem Blei zu seyn.

Der gesunde Urin giebt einen eben solchen Erfolg.

h) Prüfung mit Kalkwasser.

Wird der diabetische Urin mit der Hälfte seines Umfanges von frischem klarem Kalkwasser gemengt, so trübt er sich, und es wird ein schwacher Geruch nach Ammonium entwickelt; späterhin sondert sich ein lockerer weifser Präcipitat daraus ab, der nur schwer durch ein Filtrum abgeschieden werden kann. Das Abfiltrirte ist klar wie Wasser. Der Niederschlag scheint blofs phosphorsaurer Kalk zu seyn.

Gesunder Urin, auf gleiche Weise behandelt, verhält sich eben so, aber der Niederschlag fällt noch reichlicher zu Boden, und das übrige Fluidum erscheint nach dem Filtriren gelb gefärbt.

i) Prüfung mit salzsaurem Baryt.

Werden in 4 Loth diabetischen Urin 20 Gran in Wasser gelöster salzsaurer Baryt gebracht, so erzeugt sich nach ein paar Stunden ein schneeweifser Präcipitat, der sich wie schwefelsaurer Baryt verhält.

Gesunder Urin, auf dieselbe Weise behandelt, liefert einen stärkern Präcipitat, der eine röthliche Farbe besitzt.

k) Prüfung mit Schwefelsäure.

Werden zu 4 Loth diabetischen Urin 20 Tropfen höchst concentrirte reine Schwefelsäure gesetzt, so nimmt er nach ein paar Stunden eine fast rosenrothe Farbe an, ohne getrübt zu werden. Endlich bemerkt man ein schwaches Aufbrausen, auf der Oberfläche bildet sich ein weifser Schaum und es fällt ein kaum merkbarer Präcipitat zu Boden.

Gesunder Urin, auf gleiche Weise behandelt, verhält sich eben so, die Flüssigkeit nimmt aber eine gelbrothe Farbe an, und der urinöse Ge-

ruch wird nicht zerstört. Aus der Flüssigkeit sammelt sich ein schwärzlich rother Präcipitat ab.

l) Prüfung mit Kleesäure.

Mit Wasser gelöste Kleesäure, die in diabetischen Urin getröpfelt wird, erzeugt darin einen sehr lockern Niederschlag von rosenrother Farbe, der in der Flüssigkeit schwebend erhalten wird. Es scheint ein Gemenge von kleesaurem und harnsaurem Kalk zu seyn.

Gesunder Urin verhält sich gegen Kleesäure eben so, nur ist der gebildete Präcipitat spezifisch leichter und seine Farbe ist dunkler.

m) Prüfung mit kohlensaurem Kali.

Werden 10 Gran vorher in Wasser gelöstes Kali in 4 Loth diabetischen Urin gebracht, und alles unter einander gerührt, so wird Ammonium entwickelt, und es fällt ein weifser Präcipitat zu Boden, der sich in Essigsäure mit Brausen löset und blofs kohlensaurer Kalk zu seyn scheint.

Gesunder Urin verhält sich eben so, nur fällt der Präcipitat reichlicher zu Boden, und es wird mehr Ammonium entwickelt.

* * *

Die vorher beschriebenen Versuche waren sämmtlich mit einem ganz frischen diabetischen Urin angestellt, dessen spezifische Dichtigkeit gegen Wasser verglichen 1,045 betrug. Der zur Vergleichung gewählte gesunde Urin zeigte eine dunkle Weinfarbe und eine spezifische Dichtigkeit von 1,008.

Aus den Resultaten, welche der diabetische Urin bei seiner Prüfung mit den eben genannten Reagentien dargeboten hat, und ihrer Vergleichung mit denen des gesunden Urins, scheint zu folgen, dafs, mit Ausnahme der zuckerartigen Substanz im ersteren, in qualitativer Hinsicht beide eine gleichförmige Grundmischung besitzen: dafs hingegen das quantitative Verhältnifs der Bestandtheile im diabetischen Urin bei weitem geringer als im gesunden ist.

Das Daseyn der freien Phosphorsäure im diabetischen Urin ergiebt sich aus seiner Eigenschaft das Lackmuspapier stark zu röthen, so wie aus dem phosphorsaurem Kalk, den er mit Kalkwasser gemengt darbietet.

Das Daseyn der Harnsäure oder auch der Blasensteinsubstanz scheint aus der rothen Farbe der Präcipitate hervorzugehen, welche der diabetische Urin den metallischen Auflösungen erzeugt.

Das Daseyn der an neutralisirende Basen gebundenen Phosphorsäure ergiebt sich aus dem phosphorsaurem Baryt, der durch salzsauren Baryt, so wie aus dem phosphorsaurem Blei, das durch das salzsaure Blei im diabetischen Urin erzeugt wird.

Das Daseyn des Kalks in demselben ergiebt sich aus dem kleesauren Kalk, der durch Kleesäure, und aus dem kohlensauren Kalk, der durch Kali aus dem diabetischen Urin gefället wird.

Das Daseyn des Ammoniums ergiebt sich endlich aus dem Ammonium, welches durch Kali und Kalkwasser daraus entwickelt wird.

Nur das Daseyn des Harnstoffes geht aus den Resultaten jener Versuche nicht deutlich hervor.

Wenn solcher als Ursache der Farbe des Urins anerkannt werden muſs, so würde aus dem wenig getrübten Zustande, den der diabetische Urin gewöhnlich besitzt, allerdings folgen, daſs der Harnstoff in selbigem nur in äuſserst geringer Quantität vorhanden sei, welches jedoch durch fernere Untersuchungen genauer ausgemittelt werden muſs.

Eben so ist auch das Daseyn der Benzoessäure im diabetischen Urin noch ferneren Untersuchungen mit selbigen vorbehalten; indessen scheint doch wenig oder nichts von derselben gegenwärtig zu seyn, weil hier sonst bei der Prüfung mit Schwefelsäure und mit Kleesäure sie sich hätte zu erkennen geben müssen.

Nach dieser vorläufigen Prüfung des diabetischen Urins mit Reagentien wurde selbiger nun auf Harnzucker untersucht. Zu dem Behuf wurden fünf Pfund ganz frischer diabetischer Urin von blaſsgelber Farbe und etwas getrübter Beschaffenheit, dessen spezifische Dichtigkeit 1,045 betrug, in einer Porzellanschale über gelindem Feuer so weit abgedunstet, daſs der Rückstand die Konsistenz des Honigs annahm. Nach dem Erkalten zeigte das Fluidum eine honiggelbe Farbe, einen dickflüssigen honigartigen Zustand und eine dem gereinigten Honig gleichkommende Klarheit; weder geronnene Lymphe, noch ein anderer fester Stoff hatte sich beim Abdunsten daraus abgesondert. Jenes Fluidum wog genau 16 Loth, und seine spezifische Dichtigkeit verhielt sich zum reinen Wasser wie 1,560 : 1,000. Sein Geruch ist sehr schwach urinartig, sein Geschmack ist süfslich salzig. Als jenes honigartige Fluidum in einer offenen, nur mit Papier bedeckten Schaale der warmen Luft ausgesetzt wurde, erstarrte solches nach einem Zeitraum von 4 Tagen, ganz unter denselben Erscheinungen, wie der Syrup aus Stärke, zu einer

gelblich weifsen, lockern, körnigen Substanz, ohne dafs etwas liquides zurückblieb. Ihr Gewicht war dem des honigartigen Fluidi noch gleich.

Jene erstarrte Substanz enthält also alle Bestandtheile des diabetischen Urins mit einander verbunden, so wie solche in demselben mit wässriger Feuchtigkeit gelöst enthalten waren.

Sie zeigte einen schwachen urinartigen Geruch, und einen süfsen, etwas salzigen Geschmack. Ihre genaue Zergliederung, so wie die Bestimmung ihres Verhaltens zu andern Materien, wird der Gegenstand einer neuen Untersuchung über dieselbe ausmachen, deren Resultate ich, als Fortsetzung dieses Aufsatzes, der Königl. Akademie zu einer andern Zeit mitzutheilen mich beehren werde.

Versuche und Bemerkungen

über

die Verdunstung sogenannter feuerbeständiger Körper.

Von Herrn S. F. Hermbstaedt *).

Man redet in der Naturwissenschaft, und besonders im chemischen Theile derselben, nur gar zu oft von Feuerfestigkeit, Feuerbeständigkeit und Flüchtigkeit, als unterscheidenden Merkmalen der Körper, die sie bei der Einwirkung hoher Temperaturen, aber übrigens gleich bleibendem Drucke des Dunstkreises, unsern Beobachtungen offenbaren. Man giebt auch zu, dafs jene Ausdrücke keinesweges auf absoluten, sondern allein auf relativen Begriffen beruhen; man hat aber von jeher aus der Acht gelassen zu bestimmen, welches das Maximum und welches das Minimum der Temperatur ist, bei der ein Körper feuerfest, feuerbeständig oder flüchtig, in der gewöhnlichen Bedeutung dieser Ausdrücke, erscheinen kann.

Man nennt in der Regel einen Körper feuerfest: wenn solcher auch beim Maximum der Temperatur, die wir zu erregen vermögend sind, sei es durch Hülfe der Brennspiegel, der Brenngläser, oder durch die Einwirkung einer mittelst Sauerstoffgas erregten Hitze, in seiner Form durchaus nicht verändert werden kann.

*) Vorgelesen den 8. Junius 1815.

Was heifst aber Maximum der Temperatur? Wer hat ein solches Maximum schon bestimmt? Kennen wir schon ein Mittel ein solches Maximum bestimmen zu können?

Wedgwood's Pyrometer reicht zwar hin, gewisse hohe Grade der Temperaturen zu bestimmen, die durch reines Küchenfeuer erzielet werden können; keinesweges aber die höchsten, die man dadurch erzwingen kann: denn die Thoncylinder, welche als thermoscopische Substanz dabei gebraucht werden, verlieren im Gutofen der hiesigen Königl. Porzellan-Manufaktur völlig ihre Brauchbarkeit; reines Platin kommt darin in Flufs, und Stabeisen schmilzt schon nach dem Zeitraum von fünf Minuten.

Kann man daher wohl reinen Kalk, reine Kohle, reinen Kiesel etc. für feuerfeste Körper halten, weil wir zur Zeit noch keinen Grad der Hitze zu geben wissen, bei welchem sie geschmolzen oder verflüchtiget werden können? Ich glaube diese Frage mit Nein beantworten zu müssen, weil wir zur Zeit weder wissen noch wissen können, welches der höchste Grad der Hitze ist, den man zu geben vermag, oder, was gleich viel sagen will, welches das Maximum der Temperatur ist, bei dem eine Lösung zwischen den Wassertheilchen jener Substanzen und dem Wärmestoff möglich ist.

Eine ähnliche Bewandnifs hat es mit der sogenannten Feuerbeständigkeit der Körper. Wir nennen einen Körper in der Regel feuerbeständig, wenn solcher bei einem gewissen hohen Grade der Temperatur, bei welchem die sogenannten feuerfesten Körper unverändert bleiben, eine liquide Form annimmt, ohne seinen Standpunkt zu verändern, d. i. ohne in die Form des Dunstes überzugehen oder sich zu verflüchtigen. Aber noch fehlt es ja an einer genauen Bestimmung der Temperatur, bei welcher die Feuerbeständigkeit solcher Körper als etwas absolutes angesehen werden kann.

Wir nennen hingegen einen Körper flüchtig, wenn solcher bei einem gewissen Grade der Temperatur, durch die Wechselwirkung seiner Moleculen mit dem Wärmestoff, ausdehnsam wird, und in Dünsten entweicht, die bei einer niederen Temperatur wieder in die vorige Form zurücktreten.

Aber alle jene Feststellungen scheinen zu einer Zeit gemacht zu seyn, wo man von der Thätigkeit des Wärmestoffes und den Resultaten seiner Wirkungen in der Anziehung mit anderen Materien entweder noch gar keine,

oder

oder doch nur eine höchst unvollständige, wenigstens eine sehr mangelhafte Vorstellung hatte.

Um daher über das Wort Feuerbeständigkeit eine richtigere Vorstellung zu erhalten, als man sie bis jetzt gehabt hat, war es nothwendig, diejenigen Körper, welchen bisher das Prädikat feuerbeständig zuerkannt worden ist, einer dahin abzweckenden Untersuchung zu unterwerfen, um zu ersehen, was von den bisher gehegten Vorstellungen über ihre Feuerbeständigkeit eigentlich zu halten sei. Ich habe einige dieser Untersuchungen veranstaltet, und lege die Resultate derselben der Königl. Akademie zur Beurtheilung vor.

Erste Abtheilung. Versuche mit Kali.

Man hat dem reinen Kali bisher Feuerbeständigkeit zuerkannt, wahrscheinlich als zum Gegensatz des Ammonium's, welches auch selbst in den niedrigsten Temperaturen verdunstbar ist, ohne die Feststellung jener Qualität der Feuerbeständigkeit auf die Resultate einer direkten Untersuchung gegründet zu haben; es bedurfte aber nur dieser, um sich vom Gegentheil zu überzeugen, um zu erfahren, dafs das Kali nicht nur bei hohen, sondern selbst bei niedrigen Temperaturen verdunstbar ist. Um zu dieser Ueberzeugung zu gelangen, wurde das Kali, in seinem möglichst reinen Zustande, folgenden Versuchen unterworfen.

I. Versuch. 500 Gran reines Aetzkali, im frisch geschmolzenen Zustande, wurden in einem genau abgewogenen Platintiegel in einen stark ziehenden Windofen eingesetzt, der Tiegel mit einem durchlöcherten Deckel von Eisenblech bedeckt, und das Kali in Flufs gebracht. Kaum hatte das Schmelzen begonnen, so erhoben sich auch stechende Dünste aus dem Kali, welche darüber gehaltenes Kurkumepapier stark bräunten und dadurch die vorgehende Verflüchtigung des Kali andeuteten. Nachdem die Masse 30 Minuten lang im Flufs erhalten worden war, wurde der Tiegel aus dem Feuer genommen und nebst seinem Inhalte gewogen; er zeigte eine Gewichtsabnahme von $30\frac{1}{2}$ Gran. Das Wedgwood'sche Pyrometer, welches ich hierbei anwendete, um die Temperatur zu bestimmen, zeigte, dafs die Verdampfung bei 90° vorgegangen war.

Der Tiegel wurde aufs neue in den Ofen gesetzt, und von der Zeit an, da die Masse wieder in Fluss gekommen war, das Schmelzen 5½ Stunden hintereinander fortgesetzt. Man sahe die allmählig zunehmende Verminderung der Masse sehr deutlich, und als jetzt der Tiegel abermals aus dem Feuer genommen und gewogen wurde, hatte er, exclusive der vorigen 30½ Gran, noch 204 Gran am Gewicht verloren, so dass im Zeitraum von 6 vollen Stunden überhaupt 234½ Gran Kali verflüchtigt worden waren. Nach Beendigung der letzten Schmelzung zeigte das Pyrometer 95 Grad.

II. Versuch. Jene Arbeit wurde mit einer andern Portion Kali von 250 Gran wiederholt, jedoch mit dem Unterschiede, dass ich die Oeffnung des Tiegels mit einer Haube von Eisenblech bedeckte, die sich in ein 15 Zoll langes und ½ Zoll weites Rohr endigte. Die Erfolge waren dieselben wie beim vorigen Versuche; das Kurkumapapier wurde, besonders nach vorausgegangener Befeuchtung, beständig gebräunet, wenn solches in die Oeffnung des Rohrs eingetaucht wurde; und nach Beendigung der Arbeit hatte sich im Innern des Rohrs eine bedeutende Masse Kali sublimirt und zu einer weisgrauen Rinde verdichtet.

III. Versuch. Ein Theil geschmolzenes Aetzkali wurde in sechs Theilen destillirten Wassers gelöst, die Lösung mittelst eines langhalsigen Trichters dergestalt auf den Boden eines 10 Zoll tiefen Glaskolbens gebracht, dass keine Verunreinigung der Seitenwände möglich war, und nun der Kolben in einem Sandbade bis zum anfangenden Sieden der Flüssigkeit erhitzt, welches bei 82° Reaumur erfolgte. Jetzt wurde ein in die Halsöffnung des Kolbens gehängtes Streifchen Kurkumapapier sehr bald gebräunet, und zeigte dadurch die vorgehende Verflüchtigung des Kali's an, welche jedoch, vor dem anfangenden Sieden der Flüssigkeit, nicht zu bemerken war.

Die Resultate jener Versuche geben also einen Beweis, dass das Kali, welches bisher feuerbeständig genannt wurde, nicht nur bei hohen Temperaturen, sondern auch schon bei der Temperatur des siedenden Wassers, und vielleicht unter derselben, verflüchtiget wird.

Zweite Abtheilung. Versuche mit Kalk.

Der Kalk ist nicht blos ein feuerbeständiger, sondern selbst ein feuerfester Körper: denn seine Schmelzbarkeit, im völlig reinen Zustande,

hat noch niemals dargethan werden können, und seine Verflüchtigung bei hoher Temperatur eben so wenig.

Bei alle dem ist es allgemein bekannt, dafs der Kalk beim Löschen mit Wasser einen eigenen alkalischen Geruch ausdünstet, auch dafs mit Kalk frisch geweifste Wände einen ähnlichen exhaliren, so dafs an einer Ausdünstung des Kalks, wenn nicht im trocknen, doch im mit Wasser durchdrungenen Zustande, wohl nicht gezweifelt werden kann. Um mich jedoch von der Wahrheit dieser Voraussetzung näher zu überzeugen, wurde die Aufgabe folgenden Versuchen unterworfen.

I. Versuch. Unter eine 1150 Rheinländische Kubikzoll Inhalt fassende, mit atmosphärischer Luft gefüllte gläserne Glocke, wurden 16 Loth frisch gebrannter Kalk mittelst Quecksilber gesperrt, und in der Mitte der Glocke drei kleine Streifen Papier aufgehängt, von denen das Eine mit Kurkumatinktur gelb, das Zweite mit Fernambucktinktur roth gefärbt war. Das Dritte war durch Essigsäure geröthetes Lackmuspapier. Alle drei Papierstreifen waren mit destillirtem Wasser schwach befeuchtet.

Nach dem Zeitraum von 8 Tagen fing der Kalk an auf der Oberfläche zu zerfallen, und nach dem Maafse, als solches erfolgte, änderte sich auch die Farbe der gedachten Papiere. Das Erste wurde gebräunet, das Zweite wurde violet, und das Dritte nahm wieder eine blaue Farbe an.

II. Versuch. Ich löschte 4 Pfund Kalk mit destillirtem Wasser, und setzte die Schüssel, worin solches verrichtet worden war, unter eine gläserne Glocke, in welcher einige Streifen der gefärbten Papiere von der vorigen Art aufgehängt waren; ihre Farben wurden gleichfalls verändert.

III. Versuch. In einem Zimmer, welches zwei Stunden vorher mit Kalktünche berapt worden war und den gewöhnlichen Geruch ausdünstete, leerte ich eine mit 24 Pfund destillirtem Wasser gefüllte Flasche so weit aus, dafs nur ein Pfund Wasser darin zurückblieb, verstopfte sie, und schüttelte nun jenes Wasser mit der in die Flasche getretenen Luft anhaltend 15 Minuten lang.

Das Wasser erschien völlig klar; die hineingebrachten gefärbten Papiere wurden aber sämmtlich darin sehr bald verändert, und reine Klee-

säure erzeugte sogleich darin einen bedeutenden Präcipitat von kleesaurem Kalk. Eine mit Wasser gemachte Lösung von ätzendem salzsauren Quecksilber, wurde dadurch zersetzt, und ein orangefarbener Präcipitat gebildet.

Ich hielt es nicht für nöthig, noch mehrere Versuche darüber anzustellen, da die Resultate der beschriebenen hinreichend waren, die stattgefundene Verflüchtigung des Kalks zu begründen.

Dritte Abtheilung. Versuche mit Baryt und Strontit.

Der erste und zweite der vorher beschriebenen Versuche wurde nun auch mit 500 Gran ätzenden Baryt und eben so viel ätzenden Strontit wiederholt, und auch hierbei wurde die Verflüchtigung dieser beiden Substanzen aufser allen Zweifel gesetzt, wenn sie mit Feuchtigkeit in Berührung waren.

Vierte Abtheilung. Versuche mit Küchensalz.

Das Küchensalz, welches bisher zu den feuerbeständigen Körpern gezählt worden ist, gehört keinesweges dahin: denn seine Verdunstbarkeit offenbaret sich so oft, dafs man erstaunen mufs, solche nicht früher bemerkt zu haben.

Den Salinisten ist es eine allgemein bekannte Erfahrung, dafs beim Gradiren der Salzsoolen mittelst der Dorngradirung, fast durchaus ein Verlust an festen Salztheilen bemerkt wird, der, was man kaum glauben sollte, im Durchschnitt auf 30 Procent berechnet werden kann. Aber man weifs auch, dafs in einer beträchtlichen Umgebung der Gradirwerke nur sogenannte Salzpflanzen gedeihen, und nicht selten die Oberfläche des Erdreichs mit einer dünnen Rinde von Salz bedeckt erscheint.

Zwar schreibt man jenen Verlust gemeiniglich einer Zerstreuung durch die bewegte Luft zu, ohne den Grund davon in einer wirklichen Verdunstung zu setzen; mir scheint aber diese Vorstellung in keinem Falle genügend zu seyn.

Mein verehrlicher Freund, der Professor Thomas von Thuessink in Gröningen, hat mir schon vor langer Zeit die Nachricht mitgetheilt, dafs

er, zufolge seiner darüber angestellten Erfahrungen, die Atmosphäre in der Gegend des Meeres mit Salztheilen geschwängert gefunden habe. Er hat sich auch davon überzeugt, dafs die Atmosphäre in Amsterdam sich stets in einem solchen Zustande befindet, und dafs dieses ein stärkeres Anlaufen und Rosten metallener Geräthe in jenen Gegenden, als in andern, zur Folge hat. Jene Erfahrungen sind zu merkwürdig, als dafs es nicht der Mühe werth gewesen wäre, solche einer näheren Prüfung zu unterwerfen, deren Resultate auch die Richtigkeit jener Bemerkungen aufser allen Zweifel gesetzt haben.

I. Versuch. In einem 5 Fufs hohen Fasse liefs ich eine gesättigte Auflösung von Küchensalz, durch ein darüber ausgespanntes Stück Flanell, 100mal dergestalt filtriren, dafs die herabfallenden Tropfen mit der im Fasse befindlichen Luft eben so in Berührung kamen, wie solches bei den Gradirwerken der Fall ist. Die Masse des aufgelösten Salzes betrug fünf Pfund, das zur Auflösung genommene Wasser betrug 20 Pfund.

Nachdem jene Operation beendigt war, wurde eine gläserne Flasche, die mit 15 Pfund destillirtem Wasser gefüllt war, dergestalt in der Atmosphäre des Fasses ausgeleert, dafs nur ein Pfund Wasser in der Flasche zurückblieb. Sie wurde nun verstopft und stark geschüttelt.

Das mit jener Luft geschwängerte Wasser zeigte jetzt durch hinzugetröpfeltes salpetersaures Silber sogleich eine starke Trübung, und gab dadurch das Daseyn des darin gelösten Küchensalzes deutlich zu erkennen.

II. Versuch. Ich liefs die vorher genannte Lösung des Salzes in Wasser in einer porzellanen Schaale über gelindem Kohlenfeuer so weit erhitzen, dafs eine Verdunstung derselben langsam erfolgte. Der davon aufsteigende Dunst färbte ein mit einer Auflösung von salpetersaurem Silber befeuchtetes Glasstäbchen sogleich milchweifs, und gab also das in den Dünsten mit verflüchtigte Salz auf eine deutliche Weise zu erkennen.

Fünfte Abtheilung. Versuche mit Quecksilber.

Dafs das Quecksilber bei einer Temperatur von 600° Fahrenheit (= 266⅔ Reaumur) siedet und sich vollkommen in Dunst verflüchtiget, war eine längst bekannte Erfahrung; keinesweges wufste man aber, welches

das Minimum der Temperatur sei, bei welchem noch eine Verdunstung des Quecksilbers möglich ist.

Schon im Jahr 1795 hatte ich Gelegenheit, eine in dieser Hinsicht wichtige Bemerkung zu machen. In einem Zimmer der hiesigen Spiegelmanufaktur, in welchem vormals Spiegel belegt worden waren, ereignete sich der Umstand, dafs die daselbst arbeitenden Comtoirbedienten, da das Zimmer im Winter etwas stark geheizt wurde, Salivationen bekamen. Man trug mir den Fall vor, und ich vermuthete dafs hier Quecksilber existiren müfste, das jene Krankheit veranlafste, obgleich beim nähern Nachsuchen kein Quecksilber zu finden war.

Um mich vom Daseyn des Quecksilbers zu überzeugen, liefs ich an verschiedenen Stellen des Zimmers, dessen Temperatur an 16° Reaumur betrug, einige Dukaten an Fäden aufhängen, und schon nach dem Zeitraum von 24 Stunden war die Oberfläche derselben amalgamirt; das Daseyn des Quecksilbers in Dunstform war also dadurch erwiesen.

Ich liefs nun, da auf keinem andern Wege Quecksilber zu finden war, die Bretter des Fufsbodens aufbrechen, und hier fand sich, besonders in der Nähe des Ofens, wo der Fufsboden etwas geneigt war, über 50 Pfd. Quecksilber angesammelt, das sich also beim Verschütten nach und nach durch die Fugen der Bretter hindurchgedrängt und dort angesammelt hatte: der Grund von jener Wirkung war also aufgefunden.

Eine ähnliche Verflüchtigung des Quecksilbers findet man auch im Toricellischen Raum der Barometer, wenn solche im Sommer der Einwirkung der Sonne ausgesetzt sind. Hier sahe ich nicht selten, ganz im obern Ende des Rohrs, sich bedeutende Massen von Quecksilber ansammeln, die verflüchtigt worden waren, wenn die Temperatur des Dunstkreises auf 28 bis 34° Reaumur stand.

Die Verdunstung des Quecksilbers bei weit niedrigeren Temperaturen, als man gewöhnlich annimmt, war also hierdurch auf er allen Zweifel gesetzt; es kam nur noch darauf an, das Minimum der Temperatur zu bestimmen, bei welchem sie möglich war. Zu dem Behuf wurden folgende Versuche angestellt.

I. Versuch. In einem gläsernen Kolben, in dessen Mitte ein frei hängendes Thermometer angebracht war, das mit der Kugel das Quecksilber berührte, liefs ich 8 Loth sehr reines Quecksilber bringen, und stellte den Kolben mit seinem Boden auf den Sand eines Lampenofens. In die Mitte des Kolbenhalses wurde ein Dukaten frei aufgehängt. Der Dukaten fing sehr bald an, sich mit einer weifsen Lage von Amalgam zu bedecken, und jetzt zeigte das Thermometer die Temperatur von 24° Reaumur, welche ich also als das Minimum betrachte, bei welchem das Quecksilber zu verdunsten beginnt.

II. Versuch. Eine andere Portion Quecksilber setzte ich in einer offenen Glasschaale der Einwirkung der Mittagssonne aus. Ein hinein getauchtes Thermometer zeigte die Temperatur von 25° Reaumur, und nun wurde ein zwei Zoll von dem Quecksilber aufgehängter Dukaten auf der Aufsenfläche amalgamirt: welches also eine Bestätigung des Resultates vom vorigen Versuche darbot.

Aus den hier beschriebenen Versuchen geht also das Resultat hervor, dafs die darin behandelten Körper, denen man bisher einen so überaus hohen Grad von Feuerbeständigkeit zuerkannt hat, schon bei einem weit niederern Grade eine Verdunstung einzugehen vermögend sind.

Ist diese aber allein in der Anziehung zwischen den Massentheilchen jener Körper und dem Wärmestoff gegründet? oder mufs ein anderes Wesen dabei thätig seyn, z. B. das Wasser, wie beim Kalk? Könnte vielleicht die Verdunstung des Aetzkali auch nur durch einen Theil des selbst nach dem Schmelzen darin zurückgebliebenen Wassers erfolgen? Wirkte dieses Wasser auch als ein die Verdunstung beförderndes Mittel beim Küchensalze? Dieses mufs durch neue Versuche bestimmt werden, welche noch anzustellen sind.

Beim Quecksilber konnte aber sicher kein Wasser mit ins Spiel kommen: hier war die Verdunstung allein ein Resultat der Cohäsion zwischen den Massentheilchen des Quecksilbers und denen des Wärmestoffes.

Wenden wir eben diese Erfahrung beim Quecksilber auf einige Erscheinungen an, die uns an andern für feuerbeständig gehaltenen Metallen

dargeboten werden, so läfst sich dadurch erweisen, dafs auch ihnen Verdunstbarkeit in niederen Temperaturen zuerkannt werden mufs.

Dahin gehören der eigene Geruch, welchen das Kupfer, das Messing, das Blei, das Eisen und das règulinische Arsenik aushauchen, wenn sie stark gerieben werden: denn auch dieser scheint auf einer dadurch erregten Verdunstung zu beruhen. Ob und in wie fern aber hierbei ein Prozefs der anfangenden Oxydation mit ins Spiel kommt, dieses mufs freilich erst genauer untersucht werden.

Ueber

Ueber

den Hagel.

Von Herrn L. v. Buch *).

Wo es Cretins giebt, da hagelt es nie. Weder im dumpfig warmen Thale von Aosta, noch im glühenden Wallis, wo in manchen Dörfern solche Geschöpfe an allen Hausthüren sitzen. Wo Kröpfe häufig entstehen, da hagelt es selten. In Villeneuve und Vevay werden die Weinberge wenig vom Hagel zerstört, bei Genf und am Jura sehr häufig. Aber am Jura finden sich Kröpfe nicht, dagegen oft an der Ostseite des Genfersees. Im Unter-Engadin kennt man den Hagel kaum, aber Kröpfe wohl.

Niemand wird glauben, dafs Cretins und Kröpfe durch eine Art von Antipathie den Hagel vertreiben, oder dafs durch fallenden Hagel Cretins und Kröpfe zerstört werden. Aber die Erscheinung macht es sehr wahrscheinlich, dafs beiden eine gemeinschaftliche Ursache zum Grunde liege; und wer sich besonders mit Aufsuchung der Ursachen einer so sonderbaren physiologischen Anomalie als der Cretinismus ist beschäftigt, wird schon hieraus sich überzeugen, wie wenig diese Ursachen in einzelnen Thatsachen, in Beschaffenheit der Wässer, wenn sie geschmolzenen Schnee aufnehmen oder Thonschiefer auslaugen, oder in Eigenthümlichkeiten in der Lebensart der Einwohner und ähnlichen Dingen gesucht werden können. Das würde auf Entstehung oder Vertreibung des Hagels nicht einwirken können. Die Ursachen müssen nothwendig allgemeiner in der Lokalität der Gegend gefunden werden. Ehe man jede dieser Ursachen kennt, läfst sich jedoch schon aus der

*) Vorgelesen den 24. Februar 1814.

Antipathie beider Naturphänomene der Einfluſs der Atmosphäre einer Gegend beurtheilen, welches zwischen Bergen von Wichtigkeit ist. Im Wallis flieht man bis auf die höchten Gebirge, seine Kinder dem Cretinismus zu entziehen. Fallender Hagel würde ungefähr andeuten, wenn eine, obgleich sehr warme Gegend, doch schon in dieser Hinsicht nicht mehr zu fürchten ist.

Wenn die Thäler der Alpen aus dem Gebirge, das sie hoch und steil zu beiden Seiten begleitet hat, endlich hervorkommen, so breitet sich die Fläche gewöhnlich zu einem Hügellande aus, das gegen die vorigen Engen eine Ebene scheint, und nicht viel weniger erwärmt ist, als es das Thal war. Diese Flächen, ganz nahe am hohen Gebirge, werden jährlich vom Hagel verwüstet. Borgofranco, am Ausgange des Aostathals, ist kaum je in einem Jahre verschont worden. Ivrea nicht weniger. In den Aemtern von Mendrisio und Lugano, am Abfall der Alpen gegen Mailand, erzählt Hr. v. Bonstetten, der dort Statthalter war, wird in allen Berechnungen von Gütern oder von Pachtzinsen vorausgesetzt, daſs jährlich der zehnte Theil aller Landesprodukte vom Hagel zerstört werde (Bonstetten Schriften IV. 44).

Man sollte glauben, daſs bei einem so groſsen Contrast in Hinsicht dieses Phänomens in Gegenden, so wenig von einander entfernt, und bei welchen sich dem Anschein nach die Verschiedenheit der Bedingungen so leicht auffinden lieſs, die Theorie des Hagels mit der gröſsten Klarheit hervortreten müsse. Indeſs findet sich bald, wenn man sich die Erscheinungen aus bekannten Gesetzen zu erklären versucht, daſs die Naturforscher sich über die Natur des Hagels überhaupt noch nie eine klare Vorstellung gemacht haben; zum wenigsten scheint mir, was darüber in Schriften vorgetragen ist, sehr unbestimmt, zum Theil unrichtig und wenig zusammenhängend. Ein Versuch, die Erscheinungen in nähere Causalverbindung zu setzen, wird daher wohl einige Entschuldigung erhalten.

Der Hagel fällt gröſstentheils nur im Sommer, gerade wenn die Temperatur am höchsten steht: doch ist es gefrornes Wasser; — Wasser in einem Zustande, welcher dieser Temperatur so wenig angemessen ist. Man hat die Temperatur gesucht, in welcher das Wasser gefrieren könne, und sie leicht in der Höhe der Atmosphäre gefunden. Hagel bildet sich also in einer groſsen Höhe über dem Boden, und fällt durch die unteren Schichten schneller, als die Temperatur dieser Schichten die Hagelkörner

auflösen kann. So ist im Wesentlichen die Theorie, welche die meisten Lehrbücher vortragen. Frägt man, warum es denn im Sommer hagele, wenig oder fast gar nicht im Winter, so antwortet man, der Hagel sei offenbar und unläugbar ein elektrisches Phänomen. Gewöhnlich fällt er mit Gewittern; und oft habe man sogleich während des Falles sehr heftige Blitze bemerkt. Ueberdem sollen auch unmittelbare Beobachtungen, wenn es hagelt, eine vorzügliche Anhäufung freier Elektricität erweisen. Nun ist aber nach der Erfahrung die Beschaffenheit des Sommers der Elektricitätsentbindung viel günstiger, als der Winter. Diese Theorie beruht auf der besonderen, man möchte fast sagen, despotischen Achtung, in welcher die Elektricitätslehre in der Meteorologie sich gesetzt hat, ohnerachtet man die elektrische Materie noch immer nur als Werkzeug, nie als mitwirkende und verändernde Substanz hat kennen lernen. Die Verbindung, welche zwischen einem Hagelkorn und der Elektricität seyn möge, hat niemand bestimmt, und nur Lichtenberg hat gemuthmafset, Elektricität könne wohl Ausdünstung befördern, und dadurch Kälte erzeugen. Aber Herrn Erman's Versuche sind dieser Meinung entgegen.

Warum aber dieser Umweg durch die Elektricität? Warum können wir nicht gleich den Hagel als das Produkt eines Verdunstungsprocesses ansehen, nicht in den oberen Schichten, wo dem Raume in den kälteren Temperaturen wenig Dampfcapacität zukommt, sondern vielmehr in den untersten, in den erwärmtesten Schichten, wo die Intensität der hervorgebrachten Kälte sich nahe verhalten wird, wie die sehr schnelle Zunahme der Verdunstung fallender Tropfen in den erhöheten Temperaturen?

Wir dürfen nur ein Hagelkorn genau ansehen, um uns hiervon zu überzeugen. Sind die Körner nicht aneinander zerbrochen, so sind sie birnförmig oder pilzartig gestaltet. Eine Spitze oben, ein Halbzirkelsegment am unternn Rande, wie in Fig. I. Sehr häufig scheint die untere Hälfte sogar nur eine Halbkugel, in welcher oben die Spitze eines Kegels steckt. Dafs diese Spitze aber wirklich die obere, die Kugel die untere sei, habe ich bei zwei Hagelwettern auf dem Altensfiord und bei Kängis in Lappland deutlich beobachtet. An beiden Orten fiel der Hagel sehr senkrecht, und wenig vom Winde bewegt; die ganze Erscheinung war nur von wenigen Minuten. Alle sahe ich in dieser Form und in dieser Lage herabkommen. Auch folgt das schon aus der bloßen Ansicht der Figur, und aus der Lage des Schwerpunkts darinnen. Aber eben aus dieser Figur

folgt auch das Anwachsen des Hagelkorns von unten her, nicht von oben herab, und dahin deuten auch die concentrischen Lagen der unteren Hälfte. Man könnte zwar im ersten Augenblick glauben, vielleicht fliefsen Regentropfen am Korn herunter, und gefrieren im Laufe; — allein das macht wieder die Gestalt der Körner nicht wahrscheinlich, da die Spitze und die Halbkugel sich nicht allmählig, sondern sogar durch einen erhöheten Rand mit einander verbinden, und es scheint durch die Betrachtung völlig unmöglich, dafs ein Wassertropfen nie schneller fallen kann, als das Hagelkorn selbst. Aber der untere Theil des Korns wird auch zuerst Wassertropfen und Schneeflocken aufnehmen, und durch schnelle Hervorbringung des Condensationspunkts in der Schicht, welche er durchfällt, auch selbst durch Zusammendrückung des Dampfes in der Heftigkeit des Falles, Tropfen hervortreten lassen, welche sich nur der unteren Fläche anhängen können, und durch den Fall nach den Seiten getrieben, allmählig das Korn von unten gegen die Spitze vermehren. — Man nennt gewöhnlich den Hagel ein Eiskorn. Das, glaube ich, ist nicht richtig. Es ist offenbar ein kleiner fallender Gletscher. Nie sieht man ein Korn durchsichtig wie Eis, sondern stets milchig und trübe, und in helleren und dunkleren Schichten, wie in den Gletschern. Das Gletschereis ist aber schon vom Wasser durchdrungen, und mit diesem wieder zu einer Masse gefroren, und so müssen wir uns auch das Hagelkorn vorstellen. Denn die unmittelbare Bildung eines Eiskorns scheint überall, unseren jetzigen Erfahrungen zufolge, kaum möglich.

In der That, was ist der Schnee anders, als kristallisirtes Wasser? Was ist er anders, als die ersten Rudimente des Eises? Aber Schneefiguren sind Sterne in einer Fläche, welche sich endlich, wenn die Beobachtungen nicht trügen, zu einem regelmäfsigen Sechseck ausfüllen. Kristallisation ist Aufhebung der Anziehung der Theile nach gewissen Richtungen; denn sonst würden sie einer auf sie wirkenden äufseren Kraft keinen Widerstand zu leisten im Stande seyn, da im Flüssigen die anziehenden Kräfte auf ein zu bewegendes Theilchen von allen Seiten gleich sind. Nun scheint es, nach der Figur der Schneeflocken, könne man sich diese Form vorstellen, als sei die Anziehung nur noch in einer Fläche geblieben; diejenige aber, rechtwinklig auf die Fläche gegen die auf der Fläche selbst unmerklich geworden. Ein sphärischer Wassertropfen wird also durch die Eisbildung gleichsam in lauter Zirkelflächen zerfallen, und diese sich nur in der Richtung ihrer Durchmesser verbinden. Um in dieser Verbindung den

Raum auszufüllen, müssen sie sich zu Sechsecken bilden; und diese Sechsecke an einander zu Sternen, welche die Halbmesser gröfserer, endlich ganz ausgefüllter Sechsecke werden. Es wird also das Eis eine dünne Fläche, oder eine Sammlung dünner Flächen übereinander, wenn die äufseren Umrisse durch äufsere Ursachen nicht mehr deutlich hervortreten. Und in dieser Hinsicht ist die Form der unteren Fläche eines gefrornen Pferdehuftritts von einem Schneeflocken durchaus nicht verschieden. Es kann also nach dieser Ansicht durch innere Kristallisationskraft sich nicht ein rundes Eiskorn bilden; auch habe ich, so viel ich gekonnt, die Schneeflocken, vorzüglich die reineren, welche mit nordlichen Winden fallen, untersucht, ob sie, statt in der Fläche, sich wohl nach mehreren Richtungen vergröfsern, ob sie, aus innerer Anziehung, statt flacher Sterne auch wohl Morgensterne bilden möchten. Nie ist es mir gelungen. Kommen mehrere Sterne zusammen, so sieht man gewöhnlich gar leicht, dafs sie in der Luft auf einander gefallen, und nun ohne bemerkbare Regel durch Cohäsion, meistentheils durch ungefrornes Wasser, mit einander zusammenhängen.

Und so ist auch das Hagelkorn. Ein Schneestern bildet den Kern; Schnee tritt durch die Verdunstung hervor; es wird vom Wasser der Tropfen durchdrungen, und dieses gefriert. Beide zusammen würden sich in einer Fläche vereinigen, wenn nicht die ihnen äufsere Bedingungen des Falles sie zum Gletscherkorn formten.

Eben darinnen scheint mir auch die Ursache zu liegen, warum der *Gresil*, der Graupenhagel, gröfstentheils nur im Frühjahr erscheint, und nur bei niedriger Temperatur, niemals im Winter, wenig oder gar nicht im Sommer. Es ist nothwendige Bedingung, dafs Regen und Schnee zugleich falle, dafs also die Temperatur der unteren Schichten den Gefrierpunkt übersteige. Dann vereinigen sich Regen und Schnee zum kleinen Gletscherkorn. Kann es nicht regnen, wie bei einer Temperatur unter dem Gefrierpunkt, bei welcher der Dampf den ganzen Weg durch den liquiden Zustand, vom gasförmigen bis in den festen, gleichsam in einem Augenblick durchläuft, so werden nur Schneesterne fallen. Ist die Temperatur sehr erhöht, so wirkt das Spiel der mächtigen Ausdünstung und Erkältung in den unteren Schichten, und es wird Hagel entstehen.

Graupenhagel, (*Gresil*), würde daher der Anfang des Hagels seyn, und träte nicht der gefrierende Dampf sogleich in einer sehr warmen Atmosphäre hervor, welches wohl nur bei Vulkanen geschehen mag, wo so

häufig die Vermehrung des Dampfes gleichsam gewaltig geschieht, und nicht mehr von der Temperatur erzeugt wird, nie aber im gewöhnlichen Laufe meteorologischer Phänomene, so wird man im ersten Entstehen des Hagels nur Graupen finden, nicht Körner, wie sie Häuser und Felder verwüsten. Auch dafür spricht die Erfahrung. Auf hohen Bergen hagelt es nicht, oder nur wenig. Aber *Gresil* fällt nicht selten mitten im Sommer. Scheuchzer und Beccaria erzählen dies ausdrücklich, als Resultat eigner und fremder Erfahrung (Gehler Wortb. II. 553). Saussure hat es nicht anders auf dem Col de Géant gesehen; und auch andere Beobachter reden nur selten, und fast nie von beträchtlichem Hagel. Sollte auch die Temperatur wirklich in diesen Regionen hoch genug seyn, eine Hagel bildende Verdunstung zu verursachen, so wird doch selten auf Bergen und auf solchen Höhen Ruhe genug in der Luft seyn, welche der schnellen Vermehrung des Hagelkorns nothwendig ist. Nur bei dem senkrechten Falle wird der Dampf der unteren Schicht hervorgepreſst, zum Tropfen, zum Schnee, zum Gletscher gebildet. Durch Winde wird sehr schnell die lokale Erkaltung durch Verdunstung, die kleinen polarischen Atmosphären um die verdunstenden Tropfen wieder in die groſse wärmere Zone geworfen, und dann wird durch allgemeine Erniedrigung der Temperatur dem ferneren schnelleren Verdunsten und dem ferneren Anwachsen des Hagels Gränzen gesetzt. Deswegen ist fallender Hagel, wenn schon der Gewittersturm eingetreten ist, wegen seiner Gröſse weniger zu fürchten, als wenn mit seinem Falle die Gewittererscheinungen anfangen.

Es geht hieraus deutlich hervor, warum es im Sommer hagele, und nicht im Winter; warum nur bei Tage, kaum in der Nacht. Das Licht mag wohl ganz unschuldig daran seyn, und eben so sehr die elektrische Materie. Die unteren Schichten sind nämlich bei Nacht zur Hagelbildung nicht erwärmt genug. Ist uns dagegen eine, uns fremdartige, tropische Wärme gekommen, wie das nicht selten im Herbste mit Süd- und Südwestwinden geschieht, mit welchen zugleich eine bedeutende Dampfatmosphäre, dem Maximo nahe, ankommt, fällt nun auf höhere Schichten ein erkältender dampfaustreibender Nordwind, so kann dieser Regen leicht in den unteren Schichten zu Hagel verdunsten. Und da diese Temperatur der unteren Schichten von der Wirkung der Sonne unabhängig war, so wird es dann so gut des Nachts als am Tage hageln. In unsern Gegenden kommen Süd- und Südwestwinde nicht mehr mit so bedeutenden Atmosphären von Dampf,

daher wird auch diese Wirkung seltner seyn. Aber an den Ufern des atlantischen Meeres ist sie häufiger, und in Seeland, in Norwegen, selbst an Frankreichs Westküsten ist Hagel des Nachts im Herbst oder im Winter gar nicht ein so unbekanntes Phänomen, eben so wenig als die Gewitter im Winter.

Es ist ferner aus dieser Verdunstungsansicht gar leicht begreiflich, dafs die Hagelkörner dort am gröfsten seyn werden, wo die Differenz der Temperaturen in den Luftschichten, daher die Intensität der Verdunstung am gröfsten ist. Und wir werden uns weniger wundern, dafs Stücke wie Hühnereier in Italien und Syrien fallen, wenn nur bei uns im höchsten Extrem taubeneigrofse Massen. Denn eben die Zone zwischen 30 und 40 Grad ist, nach Lamberts gelehrten Berechnungen, diejenige, welche auf der ganzen Erdfläche der wärmsten Sommer geniefst, deren Wärme nur selbst gar zu oft noch durch glühende Wüstenwinde vermehrt wird. In der That kommen uns die Nachrichten von den gröfsten Hageln gerade aus dieser Gegend. Hasselquist erzählt in seiner Reise nach Palästina (p. 17), dafs ihn am 28sten Oktober 1749 auf seiner Fahrt von Marseille nach Syrien, 12 Meilen westlich von Sardinien, ein fürchterliches Gewitter überfallen habe. Ein Sturm aus Norden, mit Wetterleuchten von allen Seiten, mit Platzregen und Hagel. Es war 9 Uhr des Abends: also fiel auch dieser Hagel, als schon lange das Licht entfernt war. Die Körner waren theils oval, theils sphärisch, theils elliptisch und glatt. Die gröfsten waren gröfser als Wallnüsse, die kleineren als Muskatnüsse. Sie waren auswendig weifs und klar, und hatten inwendig einen Kern, erbsgrofs, der in das Blaue fiel (Ein Gletscher, Gresilkorn). Einige, die Hasselquist gewogen, waren bis eine Unze schwer. — Noch immer, sagt Dolomieu in seiner Beschreibung der liparischen Inseln (p. 85), erinnert man sich auf diesen Inseln des Wetters vom 11ten Oktober 1692. Das Meer tobte schrecklich. Es hagelte Eisstücke bis zu 5 Pfund (?) von unregelmäfsiger Gestalt und spitzigen Ecken. Inwendig hatten sie eine Luftblase, die einem Auge nicht unähnlich sahe.

Beide Gewitter waren im Oktober, am Ende des Sommers; das ist auch nur die Zeit, in welcher Italiens Himmel getrübt wird. Dann nämlich, wenn überall die Temperaturdifferenzen wieder bedeutender werden, und nun die wärmere Luft südlicher Zonen gegen Norden hervordringt, und sich hier bis weit unter den Condensationspunkt des über die Meere

mitgebrachten Dampfes erkältet. Aber zu solchem Hagel, als den, welchen Hasselquist und Dolomieu beschreiben, mag wohl glühender und vom Meere dampfhaltender Scirocco aus Libyens Wüsten durch Nordwinde tief erkältet, und der Dampf in Tropfen durch die warme Schicht gejagt worden seyn, welches durch das Fallen in der Nacht noch wahrscheinlicher wird. — Das Eiförmige der Körner entsteht aus dem allmähligen Anwachsen des Birn- und Pilzförmigen im Anfange; und die Luftblase im Innern mufs uns einen Begriff von der Schnelligkeit des Hervortretens, der Verdunstung des Coagulirens der Schneesterne zum Gletscherkorn geben, da die Luft nicht Zeit gehabt hat, durch die sich verbindende Masse zu entfliehen. Durch Rotation der Körner und daraus bewirktes Zusammentreiben der im Schnee eingeschlossenen leichteren Luft in der Mitte, kann diese Blase nicht entstanden seyn: denn sonst wäre das Hagelkorn nicht wie ein Ei, die Luftblase nicht wie ein Auge gestaltet gewesen.

Offenbar ist es nicht nothwendig, wie De Luc will, an eine durch chemische Ursachen bewirkte Erkältung in der Gewitterwolke zu denken, durch welche der Hagel in der Wolke selbst entstanden seyn soll. Im Gegentheil ist diese Meinung aller Erfahrung und aller Consequenz geradezu entgegen. In Gewitterwolken mag wohl noch nie Hagel gewesen seyn; so etwas hat noch Niemand beobachtet, ohnerachtet man doch wohl auf Bergen durch starke Gewitter gegangen ist. Und dann ist hieraus die Relation vom Hagel mit der unteren Erwärmung gar nicht begreiflich. Und wie, wenn sich unmittelbar erweisen liefse, dafs der Hagel am Boden in gröfserer Höhe Wasserregen gewesen ist? — Das ist an den Gebirgen doch möglich. In Cressier über dem See von Neufchatel verhageln die Weinberge recht häufig; Lignieres am Abhang des Chaumont liegt unmittelbar darüber, 1200 Fufs höher. Dort regnet es zu gleicher Zeit sehr stark, aber es hagelt dann wenig oder auch gar nicht. Der Hagel vermehrt und vergröfsert sich erst in der 1200 Fufs hohen Schicht bis zum Grunde des Thals. — Aus dem Thale von Travers kommen im Sommer Gewitter hervor, welche sich über die erwärmten Weinberge des Seeabhanges ziehen und grofse Hagelkörner auf die Weinreben werfen. Im hochliegenden Thale hatte es auch geregnet, ehe das Wetter die Tiefe erreichte, allein gehagelt nur wenig. — Bei Clermont in Auvergne, ganz nahe am Fufse des Gebirges, sind Gewitter äufserst gemein, und fast immer sind sie von Hagel begleitet, welcher die ganze Gegend verwüstet. Die Dörfer Blanzat, Chateaugué,

gué, Sayat scheinen jährlich zu dieser Zerstörung verdammt. Dagegen versichert Herr de Savigné, Pfarrer in Vernet auf dem Gebirge, dafs solche Wetter zwischen dem Montdor und dem Puy de Dome höchst selten sind, und dafs er es in 23 Jahren nur ein einziges mal habe hageln sehen. Die Orte sind doch von den ersteren oft vielleicht nicht ½ Meile weit entfernt, allein sie liegen auf dem Gebirge 1500 Fufs höher (*Legrand d'Aussy Voyage d'Auvergne* 1788. *p.* 74). — Auch wird De Luc's auf ganz unbekannte und hypothetisch angenommene Operationen gegründete Meinung schon überhaupt durch die Thatsache ganz widerlegt, dafs es auf Bergen nicht hagelt. Gewitterwolken aber gehen in der Regel im Sommer viel höher, als die Spitzen der Berge.

Was die Verdunstung in erwärmten Schichten bewirken könne; wie sehr sie im Stande ist, schwere Hagelkörner zu bilden, das hat noch vor kurzem Wollastons eleganter kleiner Versuch gezeigt, das Wasser in einer Kugel des Pulshammers in ziemlich erhöheten Temperaturen gefrieren zu machen, wenn die andere Kugel in eine kaltmachende Mischung gesetzt wird. Die Theorie dieser Erscheinung ist dem ersten Anblick nach einfach, da wir sie ohne Mühe auf bekannte Thatsachen und Gesetze zurückführen. In A, (Fig. II.) der warmen Kugel, ist Wasser; in B, der kalten, aber nicht. Der Dampf, welcher der Temperatur von A gehört, verbreitet sich, und stürzt in den Raum B, wie in einen Abgrund, weil seine Elasticität bei der Temperatur von B nur unbedeutend gegen die im Raum A ist. Da nun durch die Vertheilung die Dampfelasticität A im Verhältnifs beider Räume vermindert worden, so entsteht neuer Dampf aus dem Wasser in A, um diesen Verlust zu ersetzen. Die zum Dampfe gehörige latente Wärme kann nur da hergenommen werden, wo der Dampf entsteht, nämlich auf der Oberfläche des Wassers; und da die Zerstörung in B sogleich der neuen Dampfbildung folgt, so wird endlich die Wärmeberaubung des Wassers weit gröfser als die, welche es vom umgebenden Mittel erhalten kann, und das Wasser in A gefriert. — Das Glücken und die Schnelligkeit des Versuches scheint also ganz von der Differenz der Dampfcapacitäten in A und B abzuhängen; und da die Elasticitäten mit den Temperaturen in einer sehr schnell wachsenden Progression sich vermehren, so sollte man glauben, eine gleiche Differenz würde in hohen Temperaturen mehr bewirken, als in niederen, und wenn z. B. die Kugel A in einer Temperatur von + 20 Grad steht, B in 0, die Eisbildung schneller bewirkt werden müsse, als wenn A in 10 Gr., B in — 10 Gr. steht. Denn im ersteren Falle wird doch weit mehr

Dampf zerstört und wieder gebildet, daher in A mehr Kälte erzeugt, als im letztern Fall. Die etwas bedeutende Dampfcapacität des Raums A ist auch zum Gelingen so nothwendig, dafs, wenn der neugebildete Dampf den oberen Raum durch mitgetheilte Kälte in seiner Temperatur so weit herabgebracht hat, dafs der Dampf des umgebenden Mittels sich an dem oberen Gewölbe ansetzt, auch wohl zu Reif gefriert, der Versuch durchaus nicht mehr gelingt; ein Umstand, welchen man leicht verhütet, wenn man im Anfange des Versuchs den Finger auf das Gewölbe der Kugel legt. Ist das untere Wasser erst durchaus erkältet, so ist ein Strom im umgebenden Mittel entstanden, welcher die kalte Luft um das Wasser herabführt, dem Dom aber in jedem Augenblick wärmere Luft zuführt, welche erkältet, sogleich an der Kugel herab dem Wassersegment zufällt.

Allein, wenn auch die Differenz der Dampfcapacitäten beider Kugeln der Hauptgrund der Erscheinung ist, so zeigt doch die Erfahrung sehr bald, dafs er nicht derjenige ist, welcher über die vortheilhaftesten Bedingungen des Versuches entscheidet. Wahrscheinlich wird er stets viel leichter bei einer Differenz von — 10 zu + 10 Gr. gelingen, als bei einer gleichen von 0 zu + 20 Gr. — Denn die latente Wärme des Dampfes, welche dem Wasser in A entzogen war, und die nach Rumfords neueren Erfahrungen 6 — 7 mal gröfser ist, als die, welche eine gleiche Quantität eiskaltes Wasser zum Kochen bringt, wird in B wieder abgesetzt, und mufs schnell abgeführt werden, wenn die Dampfcapacität von B nicht bis zum Stillstehen des Versuchs anwachsen soll. Diese Wegführung ist aber nach bekannten Gesetzen, im Verhältnifs der Wärmedifferenzen mit dem umgebenden Mittel; so ungefähr, dafs, um z. B. 20 Grad Wärme in einem Mittel von 0 Grad abzusetzen, $\frac{1}{3}$ Zeit mehr gehört, als eben diese 20 Grad wegzubringen, wenn das Mittel bis — 10 Grad erkältet ist. Diese gröfsere Schnelligkeit des Wegführens hat denn auf den Versuch einen gröfseren Einfluss, als die vermehrte Dampfcapacität von A in höheren Temperaturen. Bedenkt man nun, dafs, um die vortheilhaftesten Bedingungen des Versuchs zu bestimmen, noch die Oberfläche der Kugeln in Rechnung gebracht werden mufs, die Menge des Wassers, und die Wärme, welche darinnen enthalten ist, dann die Bewegung und die Wirkung des Mediums, in dem A sich befindet: so wird man endlich geneigt, den Versuch für einen der verwickeltsten in der Physik zu halten.

Den letzteren Wirkungen ist der Hagel nicht ausgesetzt, sondern

nur dem Unterschiede der Dampfcapacitäten; denn er durchfällt zu schnell die Luftschichten, um andere als die Wirkungen aufzufassen, welche unmittelbar in seiner Nachbarschaft und in seiner Berührung sich äufsern. Es sei das Maximum der Elasticität des Dampfes in einer gewissen Höhe überschritten, in welcher die Temperatur 10 Grad beträgt. Es wird also ein Tropfen hervordringen und herabfallen. Er fallt bis b Fig. III. und findet hier eine Temperatur von 15 Grad; es ist nun völlig, als sei hier dem Tropfen ein dampfleerer Raum von 5 Grad eröffnet worden, wie dem Dampfe der Kugel A in der Kugel B. Er wird also schnell verdunsten und erkalten. Mit dem Ueberrest fällt er nach c und findet hier einen neuen leeren Raum von 5 Grad, der noch viel mehr Dampf zu fassen vermag, da es eine gleiche Differenz zwischen weit höheren Temperaturen ist. Der Tropfen wird also gefrieren, oder auch ganz aufgelöst werden und verschwinden. Das letztere geschieht häufiger, und weit öfter als man in Ebenen wohl glaubt. Es regnet, allein der Regen erreicht den Boden nicht; er bleibt in der Luft hängen. Wie oft bin ich nicht an den Bergen von Neufchatel in 900 Fufs über dem See vom Regen durchnäfst worden; und unten regnete es nicht, ohnerachtet hier der Himmel ebenfalls von derselben Wolke bedeckt war. Auch in flachen Ländern kann man sich mit einiger Aufmerksamkeit oft davon überzeugen. Mit Recht sagt man, wenn man parallele, aus einer Wolke ausfahrende, schiefe oder senkrechte Striche gegen den Horizont sieht, es regne in der Ferne. Allein käme der Regen bis zum Boden herab, so würde man vom entfernten Horizont durch die Striche gar nichts mehr sehn. Aber sie endigen sich nicht selten in ansehnlicher Höhe, und beweisen damit, dafs es nur von einer Wolke bis zu einer Region regne, in welcher durch die Verdunstung das Maximum der Dampfcapacität noch nicht erreicht wird.

Das Hervortreten der Tropfen sei aber bedeutend genug, um in diesen Zonen nicht ganz verzehrt zu werden, so werden sie gefrieren und Gresilkörner bilden. Diese werden im weiteren Fall durch Erkältung und Zusammendrückung neue Tropfen hervorreifsen, welche tiefer geführt, zum Theil schnell wieder verdunsten, zum Theil als Schneesterne gefroren, das Gresilkorn, das sie mit sich herabreifst, zum Hagelkorn vergröfsern. Schneller ist diese Wirkung in den unteren Schichten, daher auch schneller die Vergröfserung des Hagelkorns. Nach und nach vertheilen sich die einzelnen Erkaltungen in der ganzen durchgefallenen Zone, sie erreichen vielleicht

einen tieferen Wärmegrad, als den des Condensationspunktes des hier enthaltenen Dampfes. Daher fängt nun auch diese Zone an zu regnen, und stärker als die obere; denn es wird, bei gleicher Temperaturdifferenz, mehr Dampf hervortreten, und auf gleiche Art tiefere Zonen. Aber da durch alle diese vereinten Wirkungen und durch die mechanisch von oben herabgebrachten Temperaturen die Wärme der unteren Schichten verzehrt, daher auch der schnellen Verdunstung endlich Gränzen gesetzt werden, so können die Tropfen nicht mehr zu grofsen Hagelkörnern gefrieren. Es kann daher nur im Anfange eines Gewitters Hagel sich bilden; kaum in der Mitte oder am Ende, wenn nicht neue Umstände zutreten. Und so lehrt es auch die Erfahrung.

Dafs Hagelwetter fast immer auch zugleich schwere Gewitter sind, dafs mit dem Hagel gemeinhin auch Blitze und Donner von den Wolken ausfahren, ist zuverlässig noch kein Beweis, dafs die Elektricität den mindesten Antheil an der Bildung des Hagels haben müsse, sondern es begründet nur die Vermuthung, dafs beide Erscheinungen aus einer gemeinschaftlichen Quelle entspringen. Und diese Quelle scheint keine andere, als die Isolirung des Phänomens in einem angewiesenen Raume. Gewitter und Hagelwetter sind locale Phänomene, keine allgemeine meteorologische, wie z. B. dasjenige, welches wir gewöhnlich einen Landregen zu nennen pflegen. Auf diesen in der Meteorologie so wichtigen und so nothwendigen Unterschied hat zuerst, so viel ich weifs, der Genfer Physiker Du Carla hingewiesen, der zugleich mit dieser Lehre in physischen, zum Theil etwas abenteuerlichen Heften (*Septième cahier, des météores locaux, Genève* 1780) vor 30 Jahren die zusammenhängendste Theorie des Hagels vortrug; aber seine Meinungen sind weniger bekannt, oder weniger beachtet worden, als sie es zu verdienen scheinen.

„Eine Luftsäule, sagt Du Carla, werde durch tausend denkbare Ursachen mehr als die umliegenden erwärmt. Sie wird in die Höhe steigen müssen, und mit ihr die Dämpfe. Sie wird sehr hoch steigen, wenn sie sehr warm ist, ehe sie sich mit der umgebenden Luft in Gleichgewicht der Wärme gesetzt hat; selbst die erlangte Geschwindigkeit führt sie noch höher. Sie erreicht die Eisregionen. Wasserbläschen treten heraus, und bilden eine Wolke; aber sie gefrieren auch zu Schneeflocken, fallen langsam herab, begegnen den immerfort von unten aufsteigenden Bläschen, verbinden sich mit ihnen zu Eiskörnern, zu Hagel, und können sich in dieser

Form stundenlang als drohende Wolke erhalten, weil der Stofs der aufsteigenden Säule sie am Herabfallen hindert. Endlich überwiegt die Schwere der Wolke, und alles fällt mit Macht auf den Boden.

Nicht alles, vorzüglich nicht die Bildung des Hagels in den oberen Regionen, wird in dieser Vorstellung als richtig erkannt werden können, aber doch wohl die Hauptsache; und dann geht sehr schön aus ihr die Erklärung einer Menge den Hagel begleitender Phänomene hervor, wovon ich nur einige der vorzüglicheren durchgehen will.

Die Hagelwetter bilden sich gemeinhin im höchsten Sommer, weil dann die Temperaturdifferenz auf dem Boden am gröfsten ist, und daher die aufsteigende Luftsäule schneller und merkbarer seyn kann. Auch wird sie um so höher steigen. Aus gleichem Grunde ist diese Erscheinung am Nachmittag häufiger als am Morgen, am Tage und nicht in der Nacht. Im Grunde ist aber doch dies mehr auf die Bildung der Gewitter anwendbar; auf den Hagel nur der vorher angeführte Umstand der schnelleren Verdunstung in den wärmeren Schichten.

Hagelwolken sind Gewitterwolken, durch constante schnelle Aenderung der Form. Tritt eine Wolke schnell aus der Atmosphäre, so wird die bei dieser Formänderung entbundene elektrische Materie nicht so schnell, als sie erscheint, abgeführt werden können. Sie häuft sich und fährt in Blitzen theils in benachbarte Wolken, theils in die Erde. Dafs Wolken nicht Magazine von Elektricität sind, dafs sie die Elektricität nicht erhalten können, da sie dazu nie isolirt genug sind, hat De Luc überzeugend erwiesen. Dafs die Wolken auch an sich nie elektrisch, sondern nur Leiter höher sich findender Elektricität sind, hat Saussure gezeigt (*Voyages III.*). Aber mit sehr schnellem Hervorkommen der Wolken sind auch allemal sogleich Blitze verbunden. Der Blitz erscheint nicht vor der Wolke, sondern ganz bestimmt erst nachher; nicht vor der Aenderung der Form, sondern nachdem sie geschehen ist. Ein sehr neues Beispiel war hiervon das Westgewitter und der Hagel, die man am 15. November 1813 in Berlin sahe. Der Himmel war heiter im Zenith, trübe umher. Plötzlich weht schneller der warme Wind von Westen, die Wolke bildet sich schnell, und es schien mit einemmale Nacht geworden zu seyn. Blitz und Donner, die man sogleich erwartete, erschienen auch eine halbe Minute darauf. In den Oktoberregen von Italien, wenn tagelang schon der Himmel bezogen war, und es geregnet hatte, nun aber die Dunkelheit in einem Augenblick durch

neues Hervortreten dicker Wolken sich vermehrt, erfolgt gewöhnlich gleich darauf Blitz und Donner. Die Entziehung des Sonnenlichtes wird uns mit gleicher Geschwindigkeit merklich, als die Erscheinung des Blitzes. Es bildet also wohl Hagel und Platzregen Gewitter, allein die Gewitter keine Hagel und Platzregen.

Hagel fällt nach drückender Hitze und Windstille. Denn da es ein lokales Phänomen ist, so darf es, soll es seine Wirkung äufsern, durch die gröfseren und beständigeren meteorologischen Erscheinungen nicht gestört werden. Es mufs der in schönen Tagen wehende Nordwind zurückgehalten seyn. Er würde eine lokale aufsteigende Säule so leicht nicht erlauben, und ihre Temperatur, wenn er nicht zu schwach ist, bald mit der umgebenden Luft in Gleichgewicht setzen. Ist aber kein allgemeiner Wind, so kann das Aufsteigen des Lokalwindes von dem, der sich darinnen befindet, nicht anders als durch das gleichmäfsige Aufsteigen undurchsichtiger Theile in der Luft bemerkt werden. Die Luft wird drückend scheinen, da kein Seitenwind uns neue athmungsfähige Luft zuführt, und wir uns wie im eingeschlossenen Raume befinden. Und das ist es eben, was wir drückende Luft zu nennen pflegen, wenn wir uns nicht von der Atmosphäre zu befreien vermögen, welche die animalischen Funktionen unseres Körpers stets um uns bilden.

Hagelwetter und Gewitter erkälten die ganze Atmosphäre umher, oft für Tage lang, weil sie die Temperaturen aus sehr grofsen Höhen herabbringen, aufser der Kälte, welche die Verdunstung in den unteren Schichten bewirkt. Dafs diese den Niederschlag des Regens überwiegt, beweisen die von dem Regen ausgehenden Stürme, welche auf diese Art dem Gewitter vorhergehen, und ist es vorbei, zurückzukehren scheinen, und die Saussure sehr glücklich aus der plötzlichen und sehr starken Vermehrung der Luftmasse durch die verdunstenden Tropfen erklärt, welche in dieser Form 1680mal mehr Raum einnehmen, als vorher. (Hygrométrie p. 394.)

Hagel ist nur einzelnen schmalen Strichen verderblich, denn der Strich kann nur die Breite der Wolke haben, welche über dem sehr erwärmten Punkt des Bodens entstanden ist. Die umherliegende Luft hat an dem ganzen Phänomen wenig Antheil. Auch wird sich alles sehr bald wieder in Gleichgewicht setzen, und die Heiterkeit des Sommers zurückkehren, da ein Band von einer Meile lang und $\frac{1}{8}$ Meile breit doch gegen die Gröfse des Luftoceans gänzlich verschwindet; — wenn nicht etwa die zur Gewit-

terbildung nöthige Ruhe durch Entgegenwirkung von südlichen und nordlichen Winden hervorgebracht worden ist: dann freilich wird die gröfsere Elasticität der wärmeren und feuchteren Winde nun in der mehr erkalteten Atmosphäre überwiegen, und dem Nordwind andere Wege gegen niedere Breitengrade zu nehmen nöthigen. Auf solche Art könnte auch ein lokales Gewitter einen allgemeinen Landregen herbeiführen. In der Mitte des Sommers, wo überall Gleichgewicht der Temperatur ist, wird das seltener der Fall seyn.

Du Carla's Theorie ist also reich an einzelnen Anwendungen, die leicht aus ihr fliefsen. Und im Grunde beruht sie auf gar einfachen und kaum zu läugnenden Grundsätzen; welches sich keine andere Theorie dieser Erscheinungen rühmen darf. Das Auszeichnende und Fruchtbare seiner Meinung ist die Trennung der Gewitter von den allgemeinen meteorologischen Phänomenen; dann die Betrachtung der Nothwendigkeit, dafs erwärmte Luft aufsteige, und das nach Verhältnifs ihrer Erwärmung; dafs also ungleich erwärmte Theile des Bodens lokale aufsteigende Luftsäulen verursachen.

Wie mag man aber an diesem Aufsteigen der erwärmten Luft zweifeln, wenn schon in Glocken, in erwärmten Stuben, bei jeder geöffneten Stubenthür die Wirkung so auffallend ist! — Die Verschiedenheit der Erwärmung in verschiedenen Schichten der Atmosphäre ist wahrlich grofs genug, um diesem aufsteigenden Strome eine ganz merkbare Bewegung zu geben. Nach den Beobachtungen, die man in Genf lange fortgesetzt hat, stand das Thermometer, vor den Strahlen der Sonne geschützt, 3 Zoll über einem grasreichen ausdunstenden Boden nicht selten 40 Grad, wenn in der Luft 4 Fufs über dem Boden nur 24 Grad; und der Mittelstand des Thermometers im ersteren Fall stieg im August bis 19 Grad, wenn in freier Luft nur bis auf 15 Grad (*Bibliothèque Britannique, Août* 1796). Auch sieht man ohne Mühe im Sommer leichte Körper bis zu ansehnlichen Höhen aufsteigen, senkrecht, nur durch eine Kraft von unten, nicht von seitwärts getrieben.

Dieses Prinzip des aufsteigenden Luftstroms (*courant ascendant*) möchte man in der That den Schlüssel der ganzen Meteorologie nennen. Die gröfsten wie die kleinsten Phänomene gehen daraus ungezwungen hervor; der tropische Ostwind, welcher die ganze Erdkugel umgiebt, wie die einzelnen Wolken, welche nur flüchtig im Sommer einen kleinen Theil

des Himmels bedecken; die gröfsten Orkane, wie die nie getrübte Heiterkeit des italienischen Sommers. Es erklärt die täglich wechselnden Meer- und Landwinde wärmerer Zonen, die periodischen Regen der Tropen, die Verschiedenheit der Climate unter gleichen Polhöhen. Es ist der Hauptgrund des wechselseitigen Tausches der Temperaturen verschiedener Breiten, durch Aufhebung des Gleichgewichts in der Luft.

Und wie leicht wird nicht hierdurch das sonderbare Phänomen der Anziehung der Wolken durch Berge begreiflich! — Wenn auch die Meinung, dafs eine wirkliche Anziehung der Masse eines so lockeren Körpers, als die Wolken sind, stattfinde, jetzt allgemein verlassen ist, so glaubt man doch noch gar häufig, es müsse dieser Erscheinung ein noch nicht entdecktes Geheimnifs zum Grunde liegen, eine Anziehung irgend eines Stoffes in der Wolke gegen einen anderen im Berge, wie z. B. positive und negative Elektricität seyn würden. Man sagt, die Wolke liegt tagelang auf dem Berge ohne sich zu bewegen. Daher mufs doch irgend eine Ursache sie mit besonderer Beständigkeit dort befestigen.

Allein bei näherer Untersuchung ist es wohl klar, dafs, wenn man sagt, die Wolke hat nun den ganzen Tag in gleicher Gröfse und Form den Gipfel umgeben, man ohngefähr sich so unbestimmt ausdrückt, als wenn man zu sagen pflegt, der Planet Mars leuchte immerfort mit demselben röthlichen Lichte. Offenbar ist es doch in jedem Augenblicke ein anderes. Und so auch die Wolke. Sie mag noch so grofs seyn; nach einer Viertelstunde ist in demselben Raum gewifs nicht ein Bläschen mehr, von allen, welche vorher darinnen sich fanden. Die wahre Ursache scheint diese.

Der aufsteigende Strom ist im Verhältnifs der Erwärmung. Es folgt daraus, dafs die Abnahme der Wärme bis zu einer gewissen Höhe über warmen Flächen langsamer sei, als über weniger erwärmten. Es wird also eine Temperaturdifferenz in gleicher Horizontalschicht sich finden. Die Erfahrung ist dem nicht entgegen. An den steilen Bergen von Aigle steigt man viel höher, ehe man das Thermometer um so viel sinken sieht, als schneller an langsam sich hebenden Gebirgen, in welchen man von mehreren in verschiedener Höhe liegenden Horizontalflächen ausgeht. Dieser Unterschied kann bedeutend seyn und vielleicht bis auf 4 oder 5 R. Grad steigen. Es komme ein Wind in der Richtung a h, Fig. IV. Der Dampf, den er mit sich führt, habe über der Höhe a b den Condensationspunkt nahe erreicht, allein noch nicht ganz. Die Luft ist also nicht getrübt worden

Der

Der aufsteigende Luftstrom ed des warmen Thales B hat d zu höherer Temperatur erhoben als A. Der Condensationspunkt entfernt sich noch mehr. Allein weit weniger erwärmt ist f, daher weniger warm auch o; noch geringer k; nun ist senkrecht über k in l der Condensationspunkt des über dem Berge hinströmenden Dampfes erreicht. Bläschen treten hervor, die Wolke bildet sich und umgiebt völlig den Gipfel. Das Bläschen l kommt aber nach m und findet hier neue Wärme vom Boden herauf; es verschwindet aufs Neue, und über i wird von der Wolke nichts mehr gesehen werden. Die Wolke des Berges ist also nichts festes, sondern in ihren Theilen stets wechselnd; der Geschwindigkeit des Windes gleich treten Bläschen in l hervor und verschwinden in m, vielleicht nur wenige Minuten als solche, um diesen Weg zu durchlaufen. Aber die Form der Wolke wird beständig seyn, so lange die einzelnen Luftsäulen in gleicher Intensität und Geschwindigkeit des Aufsteigens bleiben. Von eben dem Einfluss und von gleichen Folgen ist die unmittelbare Wärmestrahlung vom Boden, welche von Thälern herauf gröfser ist, als von weniger erwärmten Abhängen.

Noch mehr wird diese Wolkenbedeckung befördert, wenn die aufsteigende Luft in c und f nicht in der Länge des Thales ersetzt werden kann, sondern wenn diese an den Abhängen der Berge von k nach c herunterfliefst, wie das in Wallis und in Aosta geschieht. Denn alsdann wird unmittelbar dem Gipfel g kältere Luft aus höheren Regionen zugeführt, und der Condensationspunkt des Dampfes wird noch schneller erreicht.

Wenn man nach einer solchen feststehenden Wolke hinaufsteigt, wird man sie nie ruhend finden, sondern stets in der Bewegung des herrschenden Windes. Auf Pässen der Alpen ist dies Hervortreten, Bewegen und Wiederverschwinden des Nebels eines der schönsten, lebhaftesten, auffallendsten Schauspiele. Nicht selten ziehen die Nebel an dem Hospiz des Gotthards pfeilschnell vorüber. Mächtig und dicht drängen sie sich mit Gewalt in das plötzlich herab-türzende Thal von Tremola und über die Levantine hin. Man möchte glauben, in wenig Augenblicken sei nun die ganze Lombardei mit Nebel bedeckt. Allein die Wolken erreichen nicht einmal den Ausgang des Thales von Tremola; der aufsteigende Strom aus dem Levantinerthal hat sie zernichtet, und über Airolo ist von ihnen auch nicht mehr die Spur.

Es ist nicht nöthig, dafs die Wolke stets den Gipfel des Berges umgebe. Sehr häufig ist sie von ihm getrennt, und schwebt darüber als ein feststehender Hut (Fig. V.). Nur erst in dieser Höhe liegt dann der Condensationspunkt des Dampfes, aber noch nicht unter dem Berge. Das ist recht häufig in den Alpen. Wer erinnert sich nicht, dafs oft die Wolken der Höhe den Umrifs der darunter liegenden Berge zu bezeichnen scheinen, mit ihnen abfallen und wieder aufsteigen, als wäre dann eine Abstofsung zwischen der Wolke und der Bergreihe bis zu einer bestimmten Gränze.

Hierinnen liegt auch ein Hauptgrund der zertheilten Wolken auf Ebenen *). Sie entstehen und verschwinden, je nachdem sie über Wälder hinziehen, Moräste, Flüsse und Seen, oder über erwärmte Felder und trockne baumleere Flächen. Dies Spiel der Wolken ist höchst anziehend und lehrreich, wenn man von einer bedeutenden Höhe das Land übersieht, und nun aus ihrer stets wechselnden Form bestimmen kann, wenn jetzt die Wolke über das Thal, über den Flufs, den See oder die Bergreihe zieht. Und dies bestimmt was freundliche Wolken sind, was feindliche. Bei dem lokalen Hervortreten werden sie in der Mitte dicht, an den Rändern, wo sie schon wieder wärmere Luftsäulen berühren, schwächer und locker. Sie scheinen daher weifslich und rund. Ist es aber ein warmer Südwest, der sich erkältet, so ist die Wolkenschicht in gleicher Höhe über den Boden. Die Wolke ist an der unteren Fläche scharf begränzt, langgezogen wie der hervortreibende Wind, gleich dicht überall, und also gleichfarbig auf der ganzen Erstreckung. Eine graue Decke zwischen Sonne und Erde, welche die verschiedene Erwärmung des Bodens, und mit ihr das Spiel der mannigfaltigen, einzelnen aufsteigenden Luftsäulen verhindert. — Aber ein im Sommer nur am Horizont umzogener Himmel ist noch eine solche ungünstige regenverkündende Decke nicht. Der Horizont scheint uns nur umzogen; er ist es in der That nicht. Herr Prevost in Genf hat das schon vor mehreren Jahren schön auseinandergesetzt. Nur Entfernungen von Planeten, nämlich, gegen welche die Entfernung des scheinbaren vom wahren Horizont fast verschwindet, können am Himmel auf einer Kugelfläche projicirt werden. Allein der Abschnitt, den wir von der uns so nahen Wolkenkugel und auch von der Erdfläche übersehen, ist im Verhältnifs des Ganzen so klein, so we-

*) Auch die vom Boden strahlende Wärme mufs auf die Wolken bedeutend einwirken. Sie ist grofs über unbedeckten Flächen, geringe über Wasser und Wälder.

nig gebogen, dafs er für uns eine gerade Fläche seyn mufs. — Die Gegenstände am Horizont werden jetzt nicht mehr unter gleichen, sondern in stets abnehmenden Winkeln gesehn. Und da wir doch Wolken sehen können, welche horizontal viele Meilen von uns entfernt sind, so wird endlich der Gesichtswinkel ihres Abstandes so klein werden, dafs er der Vorstellung verschwindet, und die Wolken werden für uns eine fortgesetzte, nicht unterbrochene Masse zu seyn scheinen (Welches die VI. Figur erläutern möge, in welcher die Luft nur noch in dem Winkel HAG sichtbar ist, bei den übrigen aber schon die Wolken sich decken). Doch sind es eben so leichte, getrennte, unschädliche Wolken als die, welche dann über uns in der Höhe des Himmels zerstreut sind. — Am Abend, wenn die aufsteigende Säule die Wolken nicht mehr hält, und die abnehmende strahlende Wärme vom Boden auch den Condensationspunkt des Dampfes weniger hoch heraufschiebt, sinken diese Wolken langsam herunter in wärmere Zonen, lösen sich auf und verschwinden. Die Nacht wird heiter und hell, und der Mond kann nun frei sein Licht über die Erde ausgiefsen. Da sagt man, der Mond habe die Wolken verzehrt; und glaubt auch wohl an eine Sympathie zwischen Wolken und Mond.

Auch dies Niedersinken und Verzehren der Wolken in der höheren Temperatur ist eine der freundlichsten Erscheinungen auf Bergen. Die letzten Strahlen der Sonne erleuchten noch, oft mit den lebhaftesten Farben, die von der Wolke langsam herabsinkenden Fäden. Sie verwandeln sich unten in Dampf, und stofsen nun plötzlich mit Gewalt hierhin und dorthin die feinen Nebel, die leuchtenden Bläschen, welche sich jetzt in der Unendlichkeit des Raumes verlieren. — Ueber den Ebenen sinken die Wolken auch, aber wir sehen ihre Bewegungen nicht. Das ganze zusammengesetzte und ineinandergreifende Leben in der Atmosphäre geht für uns auf Ebenen verloren. Wie könnte es auch anders? Wir messen die verschiedene Entfernung der Erscheinungen am Himmel nicht mehr. Was nahe über uns steht, scheint uns mit der Wolke gleich hoch, die doch weit über die höchsten Spitzen der Berge weggeht. Und was uns nicht die untere Fläche der Wolken verdeckt, das sehen wir aus zu grofser Entfernung, um unserer Beobachtung noch deutlich zu seyn.

Es sinke z. B. die Wolke A gegen B (Fig. VII.); wir sehen sie vom Boden in c aus, unter dem Winkel AcB, und projiciren ihren Endpunkt nach E, weil keine auffallende Theile uns ihre gröfsere Nähe verrathen.

Statt gesunken zu seyn, glauben wir also ganz irrig, die Wolke sei um AE breiter geworden. Und ist diese Entfernung nur klein, so verschwindet uns die ganze Erscheinung. Nicht so dem auf dem Berge in D. Was ihm unter dem Winkel BDA erscheint, kann ihm so leicht nicht entgehen; denn diese Winkel wachsen wie die Tangenten AE und AG (wie die Tangenten der Summe des Gesichts- und des Zenithwinkels), und so ungeheuer, als die so vergrösserte Tangente AG, projicirt keine Einbildungskraft. Da in solcher Entfernung der Gegenstand so sehr viel kleiner erscheinen sollte, und er im Gegentheil doch gröfser gesehn wird, so würde die Vorstellung eher nach dem Ungeheuren als nach dem Einfachen greifen, und das thut sie, ohne vorbedachte Anstrengung, nie.

Wenn also ein Sommertag sich erwärmt, so fängt die ganze untere Luft nach und nach an zu steigen. Der Raum, den sie verläfst, mufs mit neuer Luft ersetzt werden. Gegen Süden war die Luft nicht, welche sie herauftrieb, denn südlich ist sie noch mehr erwärmt; von Westen kommt sie nicht, denn auch gegen Westen ist der Unterschied der Temperatur nicht sehr bedeutend. Von Osten kommt die erwärmende Sonne. Es bleibt nur die Nordseite, welche, in höheren Graden immer kälter, niederen Breiten zufliefsen kann. Ist die Sonne etwas gestiegen, so erhebt sich sanft dieser Wind, und treibt die Wolken, welche durch lokale wärmere und kältere Säulen erscheinen, vor sich nach Süden. Und da die kommende Luft von Norden sich erwärmt, so vermag sich in ihr mehr Dampf zu erhalten, und die Wolken verschwinden. Daher die stete Heiterkeit des italischen Himmels. Die fortdauernde Tramontana ist ein sicherer Bürge dafür. — Wird es ganz still, oder irgend eine Stelle des Bodens so sehr erwärmt, dafs die Luft darüber vom schwachen Nordwind in ihrem Aufsteigen nicht gestört werden kann, so werden die Gewittererscheinungen hervortreten, welche Du Carla beschreibst. Und erhält sich die Wolke nicht mehr, fällt der Dampf als Regen herunter, so wird er nun in den unteren Schichten zu Hagel. Es liegt also in einem bedeutenden Unterschiede der einzelnen aufsteigenden Luftströme der Hauptgrund der Gewitter und Hagel, Vielleicht oft in Kleinigkeiten nur, welche doch hinreichend sind, diesen Unterschied bis zur zersörenden Wirkung bedeutend zu machen. In unbedeckten Gegenden daher häufiger, als zwischen Morästen und Sümpfen. Scheinen doch auch in unseren Gegenden die Gewitter viel häufiger, wenn die Ernte einzelne Felder einer besonders grofsen Erwärmung bloßgestellt hat. — Herr

D'Onofrio, in einer Abhandlung über den Hagel (Dresden 1794), behauptet als eine bekannte Sache, dafs völlig bewaldete Gegenden dem Hagel nicht ausgesetzt sind; aber desto mehr solche, in denen man einzelne Striche abgeholzt hat. Ein besonders eindringendes Beispiel, sagt er, ist Casalbero in der Provinz degl'Irpini in Neapel; dort ward man von einer ehedem bewaldeten Bergkette in Nordwesten geschützt, und es hagelte nicht. Seit der Abhang in Ackerland verwandelt worden ist, hat man periodisch die Hagelwetter jährlich am Ende des Frühlings und im Anfange des Sommers gesehn, und oft von schrecklich verwüstenden Wirkungen. Er sieht die Bäume als Elektricitätsableiter an, und meint, mit der Elektricität wäre das zur Bildung des Hagels Nothwendige abgeführt worden. Genügender werden wir glauben, über dem entkleideten Abhang habe sich ein verderblicher aufsteigender Luftstrom gebildet. Auch ist ein sanfter Abhang in Nordwest solcher Wirkung noch mehr ausgesetzt, als selbst die Fläche; denn die Sonnenstrahlen der höheren Breiten fallen senkrechter darauf.

Das Gewitter, welches durch solchen Luftstrom gebildet wird, mufs daher von grofsen Höhen herabkommen. Es giebt Physiker, welche daran zweifeln, und meinen, die Gewitter gingen in der Regel sehr tief. Ich weifs nicht warum. Alle Gewitter, welche ich in der Nähe hoher Berge habe vorüberziehen sehen, waren stets höher als die Berge; nämlich die untere Gränze der Wolke, aus welcher der Regen sich ergofs. So über der 9000 Fufs über das Thal erhobenen Dent de Midi bei Bex. Häufig sieht man Gewitter über die Kette des Finsteraar und des Schreckhorn, ohne dafs die Berge verdeckt wären. Freilich erzählen nicht selten Reisende, welche vielleicht eben nicht gewohnt sind Berge zu besteigen, sie hätten Gewitter unter ihren Füfsen gesehen und den Donner tief unten gehört. Die Sache ist möglich; allein wenn man die gewöhnlichen Erzählungen solcher Thatsachen genau untersucht, so beruhte die Meinung auf Täuschung. Man glaubte unter den Füfsen, was man sehr entfernt sah. Hirten der Alpen haben mich dagegen versichert, dafs sie solche Gewitter unter den Füfsen nicht kennen. Wenn auch die Blitze aus den mittleren Zonen so gut hervorgehen, als aus der oberen Wolke, und vielleicht noch eher und stärker; denn der stärkere Niederschlag des Dampfes mag unten noch weit mehr Elektricität entbinden, so befindet man sich denn doch nicht mehr über dem Gewitter, sondern darinnen, und das geschieht auf Bergen nicht selten.

Eben in diesem hohen Aufsteigen der sehr erwärmten Luftschichten liegt wahrscheinlich die Ursache, warum warme, geschlossene, Cretin erzeugende Thäler, wie Wallis und Aosta, vom Hagel verschont sind. Sie sind gleichsam von der übrigen Atmosphäre getrennte Gefäfse. Die Luft, welche im Thale aufsteigt, kann nicht von fernher ersetzt werden. Der allgemeine Nordwind dringt in das Thal nicht. Die kalte Luft schiefst daher von oben an den Seiten der Berge herunter, und der Raum, den sie oben an den Gipfeln verläfst, mufs von der gestiegenen Luft ausgefüllt werden. Daher strömt die gestiegene Masse aus der Mitte des Thales zu beiden Seiten gegen die Gebirge. Diesen Zug verstärken überdies ansehnlich die grofsen Schneemassen und Gletscher, durch welche die Luft mehr erkältet wird, als es der natürlichen Progression der Wärmeabnahme zukommt. Sie sinkt also an sich schon herab, und zieht die Luft von der Mitte des Thales an sich. Hier erkaltet, tritt der Dampf als dichter Nebel hervor. Wolken bilden sich an den Bergen jeden Tag, im Verhältnifs als die Sonne in das Thal eindringt und die Wärme des Tages heraufsteigt. Am Nachmittag ist es häufig ein Gewitter, das aber nicht wieder über das Thal zurück, sondern meistens über die Bergreihe hin, mit allgemeinen Winden weiter fortgeht. Der vom Thale noch immer aufsteigende Strom würde sich dem allgemeinen Strome widersetzen, käme die Wolke zurück, und wäre hierzu seine Elasticität zu schwach, so würde seine Wärme die Wolke auf das Neue auflösen, und sie abermals als Dampf zurückschicken. — Es ist möglich, dafs hierdurch die Wolken an den Bergreihen hin bis zum Ausgang der italienischen Thäler geführt werden, vorzüglich da auch die auf den Flächen am Ausgange aufsteigende Luft von den Bergen herunter ersetzt werden mufs; es liefse sich dem Procefs auch im Einzelnen ganz wahrscheinlich nachgehen; und dadurch wäre der fast stets fallende Hagel dieser Gegend begreiflich. Jedoch ist dieses Erklären wenig rathsam, so lange die wichtigeren Umstände des Phänomens unbekannt sind. Denn man weifs nicht, ob diese hagelbringende Wetter von der Seite der Bergreihe kommen, oder von der Ebene her.

Mögen aber die Erscheinungen nach dieser Ansicht in noch so genauem Zusammenhange mit einander zu stehen scheinen, so würde man sie doch gänzlich verlassen müssen, wären die Einwürfe durchaus nicht zu heben, welche De Luc bewogen haben, ein ganz neues System zu erdenken, in dem zwei unbekannte, den Sinnen entweichende, noch nie einzeln gefun-

dene Stoffe die Hauptrolle spielen, und in welchem der Zusammenhang der Erscheinungen unter einander eben nicht deutlich hervorgeht. Ich werde es nicht unternehmen dürfen, den Schleier dort zu heben, wo ein De Luc völlige Dunkelheit zu sehen glaubte; allein es kommt mir doch vor, als wären viele der von ihm angeführten Thatsachen einer anderen Zusammenstellung wohl fähig, und dann verschwindet, wie mir scheint, um Vieles die Schwierigkeit, mit der einfachen Theorie der Dämpfe in der Meteorologie auszureichen. De Luc's Haupteinwürfe lassen sich, glaube ich, in drei verschiedenen Thatsachen zusammendrängen, welche alle drei gleich stark die Unzulänglichkeit der Dampfatmosphäre beweisen würden, um aus ihnen die Entstehung der Meteore abzuleiten.

1) Es bilden sich die Wolken plötzlich und schnell in einer Höhe, und in einer Luft, welche vorzüglich trocken ist. In der Nähe der Wolke, ja bis zu ihrem Rande zeigt das Hygrometer keine Feuchtigkeit an; aber sogleich den höchsten Grad, sobald man die Bläschen der Wolke berührt. — Es entsteht daher die Wolke nicht durch Niederschlagung des Dampfes, weil dieser doch nothwendig erst alle Zwischengrade bis zur höchsten Feuchtigkeit hätte durchlaufen müssen, und weil sich in der Wolke mehr Wasser befindet, als die trockene Luft hätte geben können. Aus solchen Wolken und aus solcher Luft fallen aber Platzregen nieder.

2) Im gewöhnlichen Laufe eines schönen Tages geht das Hygrometer jederzeit weit mehr der Trockenheit zu, als es vermöge der vermehrten Wärme thun dürfte. Es verschwindet daher der Dampf und entzieht sich der Beobachtung.

3) Es fällt ungleich mehr Regen auf den Boden, als aller Dampf in der Atmosphäre zu liefern vermöchte. Das Wasser entsteht daher nicht blofs aus dem Dampf, sondern noch von einer unbekannten Ursache her.

Es ist nicht zu leugnen, dafs man bei dem ersten dieser Gründe wohl Ursache hat, stutzig zu werden. Ein Mann, so vertraut mit dem, was auf den Gipfeln der Berge vorgeht, beruft sich zugleich auf die Erfahrung aller, welche mit Aufmerksamkeit auf Bergen verweilt haben. — Doch bei näherer Betrachtung fällt es gar zu sehr auf, wie doch diese Beobachtung recht unvollkommen beschrieben ist, und wieviel wesentliche Nebenumstände nicht angegeben sind, wie etwas, das vielleicht recht häufig vorgehen mag,

als nie fehlendes beständiges Phänomen angeführt ist. — Wäre man auch nicht auf Bergen gewesen, wenn der Südwest anfängt die langen allgemein die Fläche bedeckenden Wolken hervorzurufen, die zuerst die Seiten der kälteren Berge umgeben, so würde man doch schon aus dem Gange des Hygrometers der Fläche, unabhängig von seinem gewöhnlichen Gange am Tage, man würde aus der Art des Hervortretens der Wolken in der Höhe schon schliefsen, dafs diese zum wenigsten sich nicht in einer trocknen, sondern in sehr feuchter Luft bilden. Auch hat wohl De Luc nicht gemeint, dafs die Luft der Höhe, unabhängig von den Wolken, niemals höhere Feuchtigkeitsgrade erreiche, dafs daher jede Wolke in trockner Luft sich bilden müsse. Er scheint nur zu glauben, dies letztere sei vorzüglich bei Gewittern der Fall, also in einem Zustande der Atmosphäre, in welchem allgemeine Winde wenig bemerkbar sind. — Nun lassen sich aber in solchem Zustande eine grofse Menge Fälle erdenken, in welchen das von De Luc beschriebene Phänomen sich äufsern wird; und zu solchen Fällen wird man doch immer lieber zurückgehen, wenn sie der Möglichkeit nur nicht widersprechen, ehe man nach unbekannten Ursachen und verwickelten Hypothesen greift. Es sei z. B. Fig. VIII. ein umschlossenes Thal, das sehr stark erwärmt wird. Die Luft steigt von a nach b, und wird durch Luft von oben herunter ersetzt. Gewöhnlich strömt diese letztere durch die spaltenähnlichen Oeffnungen der Seitenthäler mit sehr empfindlichem Zuge, und verbreitet sich von hieraus über das Hauptthal; welches allen denen sehr merkbar und sehr erinnerlich ist, die bei heraufrückendem Tage im Hauptthale des Wallis vor den Spalten der Seitenthäler vom Anceindaz, von Hérin, von Anivier vorbeireisen. Am Abend hört dieser Wind auf; und nur am späteren Morgen erhebt er sich wieder. In die Seitenthäler selbst kommt die Luft von oben herunter. Das ist die Ursache einer jedem Alpenbewohner sehr bekannten und sehr nutzbaren Erfahrung. Soll nämlich das Wetter schön bleiben, so mufs es Thal ab blasen; Thal auf aber beweist eine Störung des gewöhnlichen Kreislaufes, das Eindringen eines allgemeinen regenbringenden Windes. — Der niedersinkende Strom sei fode und auf der Höhe in c finde sich ein Beobachter. Die Wolke in b wird gegen die Eisfelder in f gezogen. Ein kleines Lüftchen, durch so viele verschiedene sich verdrängende einzelne Luftströme gebildet, kommt mit dem Dampf in h dem Beobachter in c zu, und in die niedersinkende kalte Luftsäule hinein. Schnell wird der Dampf h den in dieser Temperatur kurzen

kurzen Weg von der grofsen Trockenheit bis zur Nebelbildung durchlaufen, und schnell in einer gröfseren Trockenheit oder in einer höheren Temperatur wieder verschwinden. Da mag wohl das Hygrometer ganz nahe an der Wolke noch eine grofse Trockenheit anzeigen. Dafs die Wolke in derselben Luft entstanden, und in derselben Luft kurz darauf wieder verschwunden sei, wie De Luc sagt, hat man wohl Grund zu bezweifeln. Denn solche Ruhe ist an schönen Tagen im Luftmeere nirgends, und an bedeckten und Regentagen noch weniger. Dafs aber stets die Wolken an heiteren Tagen von solcher Trockenheit umgeben sind, ist ebenfalls nicht erwiesen und nicht glaublich. Saussure (Hygrom. p. 577.) erzählt im Gegentheil ganz ausdrücklich, wie er oft, das Hygrometer in der Hand, das allmählige Fortschreiten des Instruments zum gröfsten Feuchtigkeitsgrade beobachtet habe, je mehr er der Wolke sich näherte, bis es endlich in der Wolke selbst den höchsten Grad erreichte. — Dafs nun aus solcher Wolke und aus solcher Luft Platzregen fallen, ist wieder nicht sehr zu glauben. Nebel und Platzregen sind Dinge, welche wir gewöhnlich in unserer Vorstellung nicht vereinigen, und die Natur thut es wohl eben so wenig.

Ist im Verlaufe des Tages das Fortschreiten des Hygrometers zur Trockenheit gröfser, als die vermehrte Temperatur es erlaubt, so scheint es doch wahrlich natürlicher und einfacher anzunehmen, dafs durch die Bewegungen in der Luft, welche die gröfsere Wärme hervorbringt, trocknere Luft angezogen werde, und das um so mehr, je höher die Temperatur, je lebhafter die erwärmte Luft in die Höhe steigt; es komme nun diese trockene Luft von oben oder von Norden herunter; — einfacher wird gewifs solche Annahme seyn, als diese Erscheinung zum Haupthebeweise einer uns ganz unbekannten und nicht begreiflichen Verwandlung des Wassers in Luft zu erheben, um so mehr, wenn wir bedenken, dafs der an schönen Tagen sich erhebende Nordwind eine Thatsache ist. Da er sich erwärmt, so nimmt seine Dampfcapacität zu, und das Hygrometer mufs zurückgehen.

Aber, sagt endlich De Luc, Fluthen von Regen, Tausende von Centnern, commentirt Lichtenberg, fallen aus der Atmosphäre auf den Boden. Es ist fast lächerlich, zu glauben, dafs so ungeheure Massen sich durch Verminderung der Temperatur einer Luftschicht um wenige Grade

niederschlagen können, da wohl die ganze Atmosphäre nicht so viel Wasser in Dampfform enthält.

Das mufs nun freilich eine Berechnung entscheiden. Um die Sache im Allgemeinen etwas übersehen zu können, da sie freilich gänzlich entscheidet, was man mit der bloßen Dampftheorie vermöge, habe ich eine solche Berechnung versucht.

Es fange aus einer Höhe von 7200 Fufs an zu regnen. Das ist gar keine bedeutende Höhe für einen Regen im Sommer. Im Gegentheil, kaum werden je in dieser Jahreszeit so niedrig die Regenwolken stehen. Gewitterwolken gehen weit über die Höhe des Montblanc bis über 14000 Fufs hin. Die Wärme der Höhe nehme im arithmetischen Verhältnisse ab, 120 Toisen auf einen Grad Reaumur, wie das im Sommer ohngefähr so seyn wird. Die Temperatur unten am Boden sei 22 Grad Reaum., so ist sie auf der Höhe 10 Grad Reaum. niedriger oder 12 Grad.

Nach diesen Annahmen und der von La Place angegebenen hygrometrischen Formel habe ich nun die nebenanstehende Tabelle berechnet. Sie zeigt die Elasticitätshöhe des Dampfes für jeden halben Grad Aenderung. Das Gewicht des Dampfes, wenn er in der ihm zukommenden Temperatur im Maximo ist. Dann endlich das Gewicht dieses Dampfes in einer Schicht von 560 Fufs, welches die zu einem halben Grade Temperaturänderung gehörige Höhe ist. Diese einzelne Schichten summirt geben als Resultat für die unter diesen Umständen auf einen Quadratfufs Grundfläche ruhende Wasseratmosphäre (das Gewicht eines Pariser Kubikfufses Wasser zu 659,590,4 Gran gerechnet) 1,743 Zoll oder 20,952 Linien Wasser. — Das ist wohl 6mal, und in den bei weitem häufigsten Fallen wohl 10mal so viel, als wirklich fällt. Denn es ist schon ein für uns ganz ungewöhnlicher Regen, wenn er auf einmal bis zur Höhe von 3 Linien steigt. — Das Wasser, welches niederfällt, kann also wirklich als Dampf vorhanden seyn. Aber der Dampf in den Schichten wird nie im Maximum stehen, und aufserdem wird nur ein kleiner Theil dieses Dampfes durch die wenigen Grade der Temperaturänderung sich niederschlagen. Demohnerachtet doch immer noch genug, um vollkommen Alles zu liefern, was Gewitterregen auf dem Boden verbreiten. — Es sei der hygrometrische Zustand der Atmosphäre 4 Grad

vom Condensationspunkt, und, der gröfseren Einfachheit der Berechnung wegen, dies in der ganzen Höhe der Luftsäule gleich. Das Saussuresche Hygrometer wird dann einige 80 Grad stehen, welches noch nicht eben eine sehr bedeutende Feuchtigkeit ist. Dann ist es so gut, als finge man, statt bei 22 Grad Temperatur, bei 22 — 4 = 18 Grad R. an zu rechnen, bis 8 Grad hinauf. Die Temperatur sei nun nach dem Gewitter bis 14 Grad erkältet, welches ebenfalls selten die Gränze der Erkältung seyn mag. Es wird nun aus der Luftsäule aller Dampf niedergefallen seyn, der zwischen 18 und 8 und zwischen 14 und 14 - 10 = 4 Grad enthalten ist. Nun ist, nach der Tabelle, die Summe der Dampfmenge

von 18 bis 8 Grad = 69341,1 Gran
von 14 — 4 Grad = 51433,6 —
Differenz 17907,5 Gran.

Das ist $\frac{17907,5}{639590,4}$ Fufs Wasserhöhe, oder 4,032 Linien. —

Dies ist die Höhe, welche bei so mäfsigen Annahmen in einem Augenblicke herabfallen kann. Ein schöner Platzregen, den wir leicht für eine Sündfluth halten würden, käme er auf einmal herunter! —

Wenn es im Frühjahr oder im Herbst den ganzen Tag geregnet hat, alles von Wasser durchdrungen ist, neue Bäche überall von den Bergen herabstürzen und verwüstend die Thäler überschwemmen, so erschrickt man vor dieser Fluth, und meint freilich, solche Begebenheit müsse ein sich allen uns bekannten Gesetzen entziehendes Naturphänomen seyn. Nicht wenig ist man alsdann überrascht, wenn unmittelbare Beobachtungen erweisen, dafs solche Regen niemals die Höhe von 12 Linien in einem Tage erreichen. — Am 15ten December 1801 fielen in Genf 18 Linien. Das war die gröfste Menge, welche man je gesehn hatte. Am 22sten September 1801 waren in Genua 18,6 Linien Regen gefallen, und man hielt diese Höhe dort für ein wenig erfahrnes Extrem. — Man darf nicht übersehen, dafs dies nicht Regen weniger Minuten sind, sondern die Höhen des Tages. Es sind Regen, welche durch Erkältung des heftigen Süd- und Südwestwindes sich niederschlagen. In jedem Augenblick erscheint neue Luft aus den wärmeren Zo-

nen, und mit ihr eröffnet sich in jedem Augenblick ein neuer Regenquell. Herr Gilbert hat aus den Schallversuchen der Pariser Akademiker berechnet, dafs der damals wehende Südwind mit einer Geschwindigkeit von 55 Fufs fortlief. Das war noch kein Sturm, wie die Regenwetter des Herbstes. Nun ist aber Luft von dieser Geschwindigkeit, kommt sie nach Genf, vor 24 Stunden bei Malaga und Carthagena gewesen, vor zwei Tagen über den Numidischen Flächen. Ein solcher Wind bei Berlin hätte vor zwei Tagen die Nähe der Canarischen Inseln berührt. Er mag auf dem Wege nur wenig Ueberschufs sich erhalten, von der grofsen Differenz seiner Wärme, mit welcher er die niederen Breiten verlassen hat, und er wird zollgrofse Regen noch bis Petersburg und bis Archangel hin ergiefsen können. — Wie wenig gegründet, bei solcher Geschwindigkeit des Windes, De Luc's Einwendung ist, es müsse stets in der Nacht regnen, oder doch ungleich mehr, als am Tage, ist einleuchtend. Auch zeigen die Beobachtungen hinreichend, wie die Stärke des Windes so sehr auf die Temperatur wirke, dafs es sogar oft im Herbst oder im Frühjahr in der Nacht wärmer ist, als am Tage.

Ich gehe in diesen Betrachtungen nicht weiter fort. Denn ich glaube, sie geben Grund genug zu vermuthen, die Theorie des Regens und der Meteore aus der einfachen Niederschlagung des Dampfes durch Erkältung möge sich wohl noch gegen De Luc's Angriffe erhalten, vielleicht wohl mit der Zeit siegreich hervorgehen können. Nur eine Anmerkung über das auffallende Phänomen der grofsen Trokkenheit oberer Luftschichten werde ich mir noch erlauben, vorzüglich, weil auch dies von De Luc als ein Beweis der Verwandlung des Dampfes in Luft angeführt wird.

Es sind uns vorzüglich drei Ursachen bekannt, durch welche in den oberen Schichten die Menge des Dampfes geringer ist, als in den unteren. Wegen ihrer verminderten Temperatur. Wegen verminderter Dichtigkeit des Dampfes vermöge des Mariottischen Gesetzes. Wegen gröfserer Entfernung von der Feuchtigkeitsquelle. Nur die beiden letzteren Gründe würden auf den niederen Stand des Hygrome-

ters einwirken können. Aber ihr Einfluſs ist noch nie gehörig untersucht worden. Wenn man jedoch sieht, wie auch untere Schichten auf Feldern, noch mehr auf Sandstrecken, so viel trockner sind als über Wiesen und Morästen; wenn man im Herbste den Lauf der Flüsse bis zu ansehnlicher Höhe durch Nebel darüber bezeichnet sieht; wenn man selbst in Glocken den gröſsten Feuchtigkeitsgrad nur dann zu erreichen glaubt, wenn man die Glocke überall an ihren Wänden befeuchtet, und sich nicht mit einer bloſsen Wasserschicht am Boden begnügt: so muſs man sich wohl überzeugen, wie viel Zeit und Bewegung dazu gehören müsse, den Dampf gleichförmig bis zu hohen und von feuchten Flächen sehr entfernten Schichten in der Atmosphäre zu verbreiten. Man sollte sich gewiſs nicht mehr verwundern, daſs es auf dem Montblanc trockner ist, als der Hygrometerstand unten, vereinigt mit der Temperatur oben, und das Mariottische Gesetz es verlangen. Ehe der Dampf bis dort oben heraufdringt, wird er theils weiter geführt, theils als Wasser, als Regen, zu neuer Fruchtbarkeit anderen Erdschichten wiedergegeben.

Und so mögen wir immer Du Carla's Theorie der Gewitter und die daraus folgende Theorie des Hagels als der Natur nicht ganz widersprechend ansehen. Sie haben zum wenigsten den Zusammenhang so vieler einzelnen Erscheinungen für sich, die sich leicht als Ursach und Wirkung verbinden; und, wie es mir scheint, in weit höherem Grade, als jede andere über diese Phänomene geäuſserte Meinung. Es lieſsen sich aus ihr sogar einige praktische Vorschriften ziehen, den schädlichen Wirkungen des Hagels zu entgehen, die vielleicht der Aufmerksamkeit der höheren Policei nicht ganz unwürdig sind. — Man hat Hagel-Assekuranzen gebildet, deren Direktionen sich sorgfältig nach jedem Hagelwetter ihres Distrikts erkundigen, weil die Reklamationen über Hagelschaden zum Theil durch solche Berichte bestimmt werden. — Wenn nun jedes Hagelwetter auf solche Art verfolgt würde, man bezeichnete die Breite des Phänomens, und trüge seinen Lauf auf eine Karte, so würde man bald finden, wo es entstanden ist. Fände es sich, wie das wohl möglich ist, daſs mehrere dieser Hagelstreifen nach demselben Punkt zurückführten, so wäre offenbar

an diesem Punkt eine physische Ursache der Hagelentstehung vorhanden. Vielleicht eine Stelle, welche im Sommer weit mehr als die umherliegenden erwärmt wird, und daher einen schnellen aufsteigenden Strom bildet. Ein wüster Sandfleck, oder eine baumleere Stelle in Wäldern. Ist man davon überzeugt, so würde eine Verdeckung, eine Bepflanzung dieses Ortes alle Hagelwetter von dortaus, und vielleicht das Unglück von ganzen Provinzen, verhüten.

Tabelle

über die Elasticität und das Gewicht des Wasserdampfes im Maximum, in einer vertikalen Luftsäule, in welcher die Temperatur arithmetisch abnimmt, 1 Grad R. auf 120 Toisen.

Das Gewicht eines Kubikfufses Wasserdampf bei 28 Zoll Elasticität zu 500 Grains gerechnet. Denn, nach Lavoisier, wiegt Luft unter 28 Zoll und eiskalt 1 Unze 3 Drachmen 3 Gran oder 795 Grains, oder bei 10 Grad 800 Gran. Und nach Gay Lussac ist die Schwere des Dampfes zu der Schwere der Luft wie 0,625 : 1.

Die Elasticitäten sind nach der von La Place angegebenen und von Herrn Tralles etwas in der Form veränderten Formel berechnet

log. vulg. $p = -0{,}55516 + 0{,}033008\,\theta - 0{,}0000978\,\theta^2$. $\frac{13}{16}$ Pariser Zoll.

worinnen p = die gesuchte Elasticität,

θ = die Temperatur nach Reaumur weniger 10 Grad.

	Temperatur nach Reaumur. Grade.	Elasticität. Pariser Zoll.	Gewicht eines Kubikfufses. Grains.	Gewicht des Dampfes in einer Schicht von 360 Fufs Höhe. Grains.
1	22	0,9994	17,85	6426
2	21,5	0,96262	17,19	6188,4
3	21	0,92967	16,604	5977,4
4	20,5	0,89663	16,013	5766
5	20	0,86517	15,452	5564
6	19,5	0,83455	14,9	5364
7	19	0,80529	14,38	5176,8
8	18,5	0,77682	13,872	4994,6
9	18	0,74925	13,38	4816,8
10	17,5	0,72254	12,9	4644
11	17	0,69672	12,44	4479

	Temperatur nach Reaumur. Grade.	Elästicität. Pariser Zoll.	Gewicht eines Kubikfufses. Grains.	Gewicht des Dampfes in einer Schicht von 360 Fufs Höhe. Grains.
12	16, 5	0, 67177	11, 998	4319, 3
13	16	0, 64845	11, 58	4168, 8
14	15, 5	0, 62305	11, 127	4005, 7
15	15	0, 60174	10, 747	3869
16	14, 5	0, 57987	10, 356	3728, 2
17	14	0, 55881	9, 98	3592, 8
18	13, 5	0, 53843	9, 61	3459, 6
19	13	0, 51994	9, 25	3330
20	12, 5	0, 49971	8, 92	3213
21	12	0, 4813	8, 6	3096
22	11, 5	0, 46355	8, 28	2980, 8
23	11	0, 44742	7, 99	2876, 4
24	10, 5	0, 42482	7, 587	2731, 3
25	10	0, 4138	7, 39	2660, 4
26	9, 5	0, 39851	7, 117	2561, 2
27	9	0, 38273	6, 84	2464, 2
28	8, 5	0, 3652	6, 532	2344, 7
29	8	0, 3558	6, 454	2323, 4
30	7, 5	0, 34268	6, 12	2203, 6
31	7	0, 32935	5, 88	2117, 5
32	6, 5	0, 31804	5, 679	2044, 4
33	6	0, 30644	5, 417	1950
34	5, 5	0, 29427	5, 256	1892
35	5	0, 28459	5, 08	1829, 3
36	4, 5	0, 2743	4, 898	1763, 4

Bemerkungen

über

das Berninagebirge in Graubündten.

Von Herrn L. v. Buch *).

Das Profil der Alpen über den Bernina, vom Veltlin nach Bündten, ist wenig bekannt. Noch hat man keine Höhe dieser Strafse bestimmt, oder der Berge und Gletscher, welche diese Thäler beherrschen; und auch die Lage der Thäler gegeneinander ist auf den besten Karten so fehlerhaft vorgestellt, dafs selbst eine, nur nach dem Augenmaafs entworfene Zeichnung, wie ich sie hier vorlege, einer ganz anderen Gegend zu gehören scheint. — Doch ist die Kenntnifs dieses Passes in mehr als einer Hinsicht zur Kenntnifs der Zusammensetzung der Alpen von grofsem Interesse, und somit kann seine Beschreibung der ganzen Geognosie nicht unwichtig seyn.

Es lauft in den Alpenreihen eine Kette in der Mitte fort, welche gröfstentheils aus krystallisirten (primitiven) Gesteinen gebildet wird, welche man deshalb die Centralkette zu nennen gewohnt ist. Man findet sie auf den Karten leicht, wenn auch hin und wieder einige beträchtliche Arme sich davon trennen. Denn sie bildet fast überall zugleich den Wassertheiler, und ist sie auch zur Tiefe der Alpenpässe gesunken, so erhebt sie sich doch bald wieder zu ewigen Schneemassen und Gletschern. — In der Ge-

*) Vorgelesen den 30. Junius 1814.

gend des Bernina hingegen geräth man in Verlegenheit sie zu finden. Ein grofses Thal, das Engadin, zieht sich hier zwischen zwei gleich hohen, gleich bedeutenden Ketten fort. Man fragt: welche von beiden ist die Fortsetzung der Centralkette? Verfolgt man sie vom Gotthardt aus, so ist man sehr bestimmt, die Reihe für die vorzüglichere zu halten, über welche die Pässe des Septimer, des Julier, der Albula, der Scaletta hinlaufen. Allein der Inn, welcher hiernach italienischen Meeren zulaufen sollte, wendet sich gegen Norden, und statt die südliche Begränzung primitiver Gesteine zu bilden, sieht man ihn durch ganz Tyrol am Fufs mächtig hoher, neuerer Kalkketten. — Dagegen führt auch wieder die Kette des Bernina ununterbrochen mit Gletscherspitzen und Schneefeldern bis hoch über die Ufer des Comersee's, wo sie südlich von Chiavenna plötzlich abfällt, und jenseit des tiefen Thales durchaus nicht mehr fortzusetzen ist. Das Alpengebirge ist also hier offenbar unterbrochen, zersplittert. — Ob eine so bedeutende Veränderung auch in den zusammensetzenden Gebirgsarten bemerkbar seyn möge: ob in ihrer Ordnung und Lagerung? und wo und auf welche Art der Zusammenhang beider Ketten sich wieder herzustellen scheint, das mufs aus der genauen Aufzählung der Thatsachen hervorgehen, und aus der Kenntnifs ihrer Folge hintereinander.

Von der Messung der Höhen des Berninapasses.

Ich habe mich eines Pistorschen Barometers zu diesen Messungen bedient, welches nach Art der Marine- oder Englefieldschen Barometer eingerichtet war; in welchem das *Niveau* durch das bekannte Verhältnifs des Durchmessers der Büchse zum Durchmesser der Röhre berichtigt wird. Herr Horner in Zürich hatte während des Sommers 1812 an vielen Stunden des Tages meteorologische Beobachtungen angestellt, in der freundlichen Hinsicht, den in den Sommermonaten mit Barometern in der Schweiz Reisenden zu correspondirenden Beobachtungen zu dienen; diese habe ich denn auch als solche benutzt, vor und nach meiner Rückkunft aus Bündten das meinige mit dem Hornerschen Barometer verglichen, und die Beobachtungen nach der Differenz corrigirt. Da aber nicht selten die Atmosphäre in engen Thälern, theils durch Wärmeausdehnung und aufsteigende Luftsäulen,

theils durch verschieden zusammenstofsende Winde, anderen und schnelleren Bewegungen folgt, als in den Ebenen, so ist es fast sicherer, verläfst man die Umgebung des Thales nicht, oder kommt man wohl gar im Verlaufe des Tages an den Anfangsort wieder zurück, sich der eigenen Beobachtungen zu correspondirenden zu bedienen, und die Wärme der Luftsäule zwischen beiden Stationen nach Wahrscheinlichkeiten zu schätzen. Das habe ich einigemal gethan, vorzüglich wenn nur eine Beobachtung irgend eines Punkts zu benutzen war. Daher glaube ich, dafs die folgenden Höhen von der Wahrheit wenig abweichen mögen. Sie mit anderen Beobachtungen in den Alpen vergleichbar zu machen, war die genaue Bestimmung irgend eines Ortes über die Meeresfläche nothwendig. Viele Höhen-Angaben in der Schweiz sind nur deshalb so wenig mit einander übereinstimmend, weil man sich nicht über die Höhe des Ortes, von dem man ausging, verständigt hatte. Der See von Zürich war in dieser Hinsicht nur unvollkommen bestimmt. Genauer und wirklich zuverlässig scheinen die Berechnungen des M. Roesch, damals in Marchlins, welche im Churer Sammler bekannt gemacht worden sind. Aus 5½jährigen fortlaufenden Beobachtungen findet er die mittlere Barometerhöhe von Chur 37 Fufs über der Plessur 26 Zoll 3,07 Linien, die mittlere Temperatur 7,1 Gr. R. Er vergleicht diese Höhe nach Trembley'scher Formel mit der von Schuckburgh angegebenen Höhe am Meere von 28 Zoll 2,24 Linien, welche mit Toaldo's und Chiminello's Bestimmungen für das Mittelländische Meer übereinkommen. Mittlere Temperatur 10,8 Gr. R. — Daraus ergiebt sich nach allen Correctionen die Höhe von Chur über die Meeresfläche zu 1857 Fufs.

Nun folgt aus dem Mittel von vier an sehr verschiedenen Tagen angestellten Beobachtungen, die unter sich nicht sehr abweichen, eine Erhebung von Chur über Zürich von 560,475 Fufs; aus Beobachtungen, welche ohngefähr in gleicher Höhe gemacht worden sind, als die von M. Roesch benutzten. Daher würde Hrn. Horner's Zimmer in Zürich 1276,5 Fufs über dem Meere liegen. Da aber dieses Zimmer, nach Wahlenberg's Angabe in *Flor. Helvet.*, 45 Fufs über dem See liegt, eine Bestimmung, die wahrscheinlich von Hrn. Horner selbst herrührt, so würde hiernach der See von Zürich 1231,5 Fufs über die Meeresfläche erhöht seyn. Wahlenberg setzt diese Höhe auf 1252 Fufs, welches kaum verschieden genannt werden kann. Mittlere Beobachtungen in Zürich geben 1201 Fufs Seehöhe

nach Hornerschen Tafeln; das mag vielleicht etwas zu wenig seyn, so wie die älteren Angaben von 1278 Fuſs den See zu hoch setzen mögen.

Die Höhen des Berninaprofils würden also nach folgender Tafel in ihrer Reihenfolge bestimmt werden müssen. Sie sind nach Oltman's hypsometrischen Tafeln berechnet.

	Par. Fuſs.		Par. Fuſs.
1. Tirano . .	1381	23. Lerchengränze an der Südseite des Thales über dem Sauerbrunnen	6983
2. Madonna di Tirano	1441	a. Ueber der Albula.	
3. Ponte del Diavolo über der Via Mala .	2434	24. Schon tief unter Lerchengränze über Ponte . .	6688
4. Bruschio Kirche .	2648	25. Albula Scheideck	7238
5. Lago di Poschiavo	2962	26. Etwas über Lerchengränze . . .	6785
6. Poschiavo . . .	3094	27. Weifsenstein .	6282
7. Pischiadell .	4518	28. Sennhüttendorf unter Weifsenstein .	5459
8. La Rosa . .	5775	29. Brücke oberhalb Bergün . .	4876
9. La Mötta . . .	6138	30. Bergün . .	4264
10. Lerchengränze .	6927	31. Fillisur . . .	3173
11. Bernina Scheideck des Weges . .	7181	32. Alveneuer Bad an der Albula . .	2768
12. Bernina lago bianco	6799	b. Ueber dem Julier.	
13. Bernina Wirthshäuser	6205	33. Silva plana, Ober-Engadin. See .	5469
14. Lerchengränze über Bernina . . .	6970	34. Juliersäulen, Scheideck des Passes .	7631
15. An der Brücke des Flatybachs .	5675	35. Bivio Julierbrücke	5357
16. Monte Minu .	8923	36. Brücke oberhalb Mühlen oder Als Molins	4758
17. Munteratsch .	9440	37. Tinzen Mühle, Vall d'Err	3826
18. Lerchengränze am Munteratsch .	7108	38. Conters . .	3634
19. Ponte Resina Kirche	5400, 2		
20. Cresta Ober-Engadin	5231, 6		
21. St. Mauriz untere Flugi	5571		
22. Brücke über den Inn nach dem Sauerbrunn von St. Mauriz .	5391		

39. Tiefenkasten Brücke über der Albula .	2612	44. Parpan . .	4585
40. Höhe von Brienz .	5485	45. Tannengränze ost. von Parpan . .	5669
41. Lenz . .	3909	46. Churwalden .	3767
42. Auf der Heid .	4621	47. Malix . .	3435
43. Parpan Scheideck	4592	48. Chur . .	1837

Das Alpengebirge ist daher sichtlich in der ostlichen Gegend von Bündten ganz vorzüglich erhaben. Bis dahin finden sich der Pässe viel, welche nicht 6400 Fufs übersteigen, ja die meisten und die bekanntesten Strafsen über die Alpen sind unter dieser Höhe. Nur erst vom Splugen weg giebt es nirgends mehr einen Einschnitt zwischen den höheren Bergen, der unter 7000 Fufs herabkäme. So hoch ist der Septimer.

Den Julier giebt obige Angabe 7621 Fufs,
der Albula . . . . . 7238 —
die Scaletta steigt bis zu . 8067 — nach Hrn. Escher's Bestimmung.

Und noch höher ist der unwegsame Fluelapafs aus dem Davosthale nach dem unteren Engadin. — Die Berninakette zu übersteigen, um das obere Engadin zu erreichen, findet sich kein anderer als der Berninapafs, alle übrigen sind Gletscherwege; und auch diese Strafse ist schon nahe so hoch, als der Weg über den grofsen St. Bernhardt.

Das Thal zwischen beiden Ketten scheint damit in Verhältnifs. Wenn man es erreicht, glaubt man kaum vom Bernina heruntergestiegen zu seyn, und würde sich nicht verwundern, sich hier zwischen Sennhütten und Alpenwohnungen zu finden. Allein ein solches Thal, das Ober-Engadin, welches in jeder anderen Lage selbst ein sehr hohes Gebirge seyn würde, und zu dem man heraufzusteigen Tagelang Zeit gebraucht hat, so bewohnt, mit so grofsen und schönen Dörfern in seiner ganzen Ausdehnung besetzt zu finden, wird allemal sonderbar überraschen. Die Gränze der Bäume läuft wenig hoch über dem Grunde an den Abhängen des Thales fort, die Alpennatur ist auf den Wiesen entwickelt, und Schneegipfel steigen von beiden Seiten ganz nahe über den grünen Alpen hervor. Doch sind es hier nicht Alpenhütten, welche die Menschen bewohnen, sondern nicht selten möchte man sie für Palläste halten, so grofs, so ansehnlich und zierlich sind die Häuser gebaut. Balkons mit künstlicheu eisernen Geländern, grofse

Freitreppen, symmetrisch vertheilte Fenster über die weifse Fläche des Ganzen, lassen keine Alpenhirten hinter solchen Mauern erwarten. Noch weniger die Menge der schnell rollenden Wagen auf ebenen und trefflich erhaltenen Chausseen im Thale fort, auf einer Höhe, zu welcher man die Saumpferde nur eben mit grofser Mühe auf schmalen Fufswegen sich hat heraufarbeiten sehen. Ein solches Schauspiel bietet Europa schwerlich zweimal dar, und bei dieser Lebhaftigkeit und Kultur würde man die so nahe sichtliche Gränze des aufhörenden Lebens an den Bergen gern für Täuschung halten. Sie ist es aber nicht. Noch hat man in den Alpen nicht blofs kein ähnliches, sondern überhaupt kaum ein höher bewohntes Thal gefunden; denn das Thal von Urseren am Gotthardt, welches man oft für das Aeufserste der Bewohnung hält, weicht ihm an Höhe bedeutend; — es ist nur 4500 Fufs über der Oberfläche des Meeres; dagegen wohnt man in St. Mauriz 5571 Fufs hoch, und in Cresta, welches ohngefähr die Höhe der gröfseren Hälfte des oberen Engadins ist, immer noch 5231 Fufs hoch. — Dem Klima verdankt das Thal wenig, aber alles der Anhänglichkeit an den väterlichen Boden, der Betriebsamkeit und der Freiheit seiner Bewohner.

Von der Zusammensetzung des Berninagebirges.

Wenn man von Tirano in den Engen heraufsteigt, durch welche der Poschiavino der Adda zustürzt, so sieht man sich überall von grofsen Gneufsblöcken umgeben, in welchen der Feldspath deutlich und stark hervorleuchtet. Der Glimmer liegt nicht selten in isolirten Blättchen darinnen, wie er im Granit zu seyn pflegt, und dadurch werden denn auch viele Blöcke dem Granit ganz ähnlich. So dauert es fort, einige Meilen über Bruschio herauf, bis zum See von Poschiavo. So ist es in allen Thälern an der Südseite der Centralkette; vom Glimmerschiefer steigt man in granitähnlichen Gneufs herab, und wird von ihm bis zum Ausgange der Thäler begleitet. Es ist der Grund des Alpengebirges; und hierdurch würde sich die Berninakette auffallend genug als die wahre Centralkette beurkunden. — An einer Brücke unter Bruschio, welche man, ohne dafs sie eben sehr auffallend wäre, die Teufelsbrücke nennt, Ponte del Diavolo, tre-

ten die festen Felsen nahe hervor und sind deutlich geschichtet. h. 3,4 mit 50 Grad fallen gegen NW.

Es scheint die allgemeine Schichtung der unteren Berge, und ist deshalb der näheren Aufzeichnung werth. Auch wird dadurch das Aufliegen des Glimmerschiefers bestimmt, den man am Ende des Sees von Poschiavo erreicht und immerfort an seinen Ufern verfolgt. Anfangs dickschuppig, dann zickzack- wellenförmig mit fortgesetztem Glimmer, endlich am Anfang des Sees mit vielen Lagern von weifsem und dunkelgrauem feinkörnigem Kalkstein, wie er im Glimmerschiefer häufig ist, zum Theil mehrere Lachter mächtig ganz rein, zum Theil nur zwei Zoll stark, mit Glimmerschiefer wechselnd, oder auch mit kleinen Quarzlagern durchzogen, und wie diese zickzackförmig gewunden. Deutlich streichen diese Schichten h. 4,4 und fallen 60 Grad gegen NW., also in das hohe Gebirge hinein. Auch dieses Erscheinen und Aufliegen des Glimmerschiefers kommt völlig mit dem überein, was man bei dem Heraufgehen am Splügen, am Gotthardt oder am Simplon bemerkt; und immer mehr mufs man in dem Glauben bestärkt werden, man habe die Hauptkette der Alpen betreten. — Der Kalkstein setzt prächtig weifs durch das Thal bei Poschiavo, feinkörnig wie der Kalkstein von Carrara, und fähig sich in gewaltigen Platten zu theilen. Doch immer ist er von glänzendem Glimmerschiefer umgeben.

Seitdem aber von Poschiavo das Gebirge schneller ansteigt, das Thal zum Pafs herauf fast zur Spalte wird, verändert sich die Masse der Felsen wieder zu Gneufs, in welchem der schuppige Glimmer den weifsen Feldspath grobflasrig umgiebt; ja oben bei Pischiadell, wo sich eine Gebirgskette eröffnet, und ostwärts des Weges eine ganze und sehr hohe Kette dem Vall Grofina zulauft, sieht man wirklichen Thonschiefer anstehen; als sei diese mit Gletschern bis im Hintergrunde des Thales bedeckte Kette aus Thonschiefer gebildet. Das scheint sie doch nicht, sondern dieser Thonschiefer scheint nur eine wenig dauernde Anomalie der herrschenden Gebirgsart. Merkwürdig aber ist es, dafs diese ablaufende Kette die Richtung ihrer Schichten verändert, und dafs diese, statt gegen Nordwest, so weit man die Gipfel verfolgen kann, nun stets gegen Nordost fallen. Das nordwestliche Einschiefsen erhält sich um so bestimmter an allen Bergen über dem Berninapafs selbst, und die der Strafse gegen Westen liegen, bis zu den beschneieten Gipfeln, welche man in Poschiavo Monti dell' Oro nennt.

Es ist diese Schichtung ein weitverbreitetes Gesetz dieses Theils des Gebirges.

Immer noch auf Gneufs erhebt sich der Weg von Pischiadell über einer ungeheuren Schutthalde hinauf, welche von höheren Bergen auch nur Gneufsblöcke herabbringt. Er ist dickschuppig, mit schwarzem Glimmer und glänzend, ganz wie der Gneufs von Freyberg; doch auch noch aufserdem mit grofsen, schönen, rothen Granaten darinnen, nicht selten wie Nüsse grofs, was so häufig, sonst der feldspathreichen Gebirgsart nicht eigenthümlich zu seyn pflegt. So steigt man einige Stunden herauf bis zur letzten Wand des Gebirges, an welcher die Wirthshäuser La Rosa und La Motta gebaut sind. Da findet sich der Glimmerschiefer auf das Neue, und setzt nun fort bis zur gröfsten Höhe des Passes. — Es ist nicht zu zweifeln, dafs dieser Gneufs nicht vom Glimmerschiefer umschlossen werde. Die Schichtung beweist es zu deutlich. Und diese Abwechslung beider Gebirgsarten findet sich noch einigemal wieder auf der Höhe des Passes.

Ich hatte auf dieser Höhe einen runden freistehenden Berg zu besteigen beschlossen, der auf der Ostseite des Passes der höchste zu seyn schien, und nicht nur eine Ansicht der ungeheuren Eismassen versprach, welche gegen Westen aufstiegen, sondern auch aller Berge und Ketten noch weiter nach Osten hin, gegen das Unter-Engadin und Tyrol. Hirten nannten ihn den Monte Minur. Er war in der That der höchste Berg der näheren Gegend, 8925 Fufs hoch. Kleine Felsen, mit grünen und bunten Alpenkräutern bedeckt, stiegen bis zum Gipfel hinauf; kein Schnee, selbst auch nicht einmal bedeutend grofse Schneeflecke lagen oben, aufser einem langen Schneefeld am Abhang gegen die Nordseite; ohnerachtet doch diese Höhe weit über die Schneegränze heraufreicht. Aber der Berg ist rings umher von tieferen Thälern umgeben, welche von unten her durch strahlende Wärme und aufsteigende erwärmte Luftschichten auf den Schnee des Abhangs wirken und ihn zernichten. Grofse Schneefelder auf weiter erstreckten Bergen erkälten dagegen die Atmosphäre umher, und verhindern auch das Schmelzen des Schnees an den Abhängen.

An diesem Berge sahe ich häufig Gneufs und Glimmerschiefer mit einander wechseln, nur schien der erstere doch am Ende die Oberhand zu gewinnen: er war es, der die höchste Spitze bildete, und hier umschlofs er wieder, wie am Schuttabhang über Pischiadell, recht grofse und schöne Granaten. Die Schichten schienen h 5 zu streichen, 50 Grad gegen Norden zu fallen;

fallen; die Abstürze oder die Schichtenköpfe standen gegen Südost hinaus. Inzwischen könnte diese Richtung der Schichten in der allgemeinen Ansicht sich leicht um eine oder anderthalb Stunden vermindern. h. 4 scheint die Allgemeinere zu seyn.

Die grofsen Eisgebirge in Westen sind von hier aus durch die näheren Umschliefsungen des Berninapasses verdeckt. Man sieht nur ihre leuchtenden Gipfel über kleinere Gletscher hervorragen. Dagegen ist die Ansicht freier gegen Osten hin, wo man den Fortlauf dieser Schneekette erwartet. Allein da erscheint kein Schneegipfel mehr. Italien und das Engadin sind gegen Bormio hin nicht mehr durch Eisfelder von einander geschieden; und nur erst in weiter Ferne erscheinen Schneeberge wieder, deren Verbindung und Fortlauf von hieraus nicht zu verfolgen ist.

Eine sonderbare schmale und scharfe Reihe, ein spitzer Kegel in der Profilansicht vom Passe aus, steht dem Monte Minur nahe gegenüber, und fast unmittelbar über den drei Wirthshäusern des Bernina. Er fällt mächtig auf durch seine blendende Weifse und Schroffheit. Man nennt ihn den Sasso Bianco. Vom Gipfel fallen Kalksteinblöcke in Menge herunter und bedecken den Fufs so hoch hinauf, dafs man das untere Gestein kaum noch darunter hervorragen sieht. Das ist ein dichter, hellgrauer, splittriger, und im Sonnenlicht sehr feinkörniger Kalkstein, der vom Urkalkstein gar keine Merkmale trägt, und in dem man, nach seinen Kennzeichen zu urtheilen, fast nach Versteinerungen sich umsehen möchte. In gleicher Richtung mit diesem Grat liegt westlich der Strafse noch ein ähnlicher, allein kaum über 100 Fufs hoher Hügel, in welchem ein gleicher Kalkstein von unten anfängt und bis oben hin fortsetzt. Schwer ist es zu glauben, dafs diese Massen hier nicht gleichsam fremdartig und eingeschoben, und keinesweges der herrschenden Gebirgsart des Passes untergeordnet sind. Sie unterscheiden sich völlig in äufserem Ansehn, in Lagerung, in Mächtigkeit, im Fortstreichen und Form des Aeufseren von den vielen untergeordneten Kalksteinlagern der Gegend von Poschiavo.

Auch ist die umgebende Gebirgsart immer weniger von der Art, wie sie sonst wohl Kalksteinlager einschliefst. Glimmerschiefer verschwindet ganz; die Gemengtheile des Gneufses trennen sich immer mehr, sie liegen körnig nebeneinander, und werden ganz zum Granit. Nur in gröfseren Massen tritt noch das Schiefrige hervor. Es ist daher nicht ohne Grund,

wenn man sagt, von den Wirthshäusern Bernina bis zum Dorfe Ponte Resina gehe man über Granitschichten herunter. Nur ist es ein Granit von einer ganz anderen und neueren Formation, als der, welchen man unter dem Gneuſse wieder erwartet.

Nicht weit unterhalb den Wirthshäusern Bernina kommt einer der ansehnlichsten von allen Schweizergletschern im engen Thale von den Eisfeldern des Bernina herunter; nach der Sennhütte am Fuſse heiſst er der Flatygletscher. Ich stieg hinauf, und südlich am Abhange, über Felsen und Granitblöcke fort, bis zum Gipfel des gegen 9440 Fuſs hohen Munteratsch. Da gelang es, diese groſse Masse von Eisbergen zu übersehen. Fast alles umher ist vom ewigen Schnee blendend weiſs, und hin und wieder laufen schwarze Grate, die Köpfe der Schichten, an den Abhängen fort. Der Flatygletscher zieht sich mehr als eine Stunde herauf, zertheilt sich in zwei groſse Arme von Eis, diese wieder in mehrere, und alle hängen sich endlich an den Circus von Schneegipfeln, der in weitem Umkreise dieses Eismeer umgiebt; eine Masse von Bergen, welche in der Ansicht nur noch mit dem Anblicke des Mont-Blanc und seiner Umgebungen vom Glacier de Talefre zu vergleichen seyn möchte. Der höchste Gipfel heiſst den Bewohnern der Monte Edretta; gewiſs ist er nahe an 11000 Fuſs hoch, vielleicht mehr, und zuverlässig einer der höchsten Gipfel der Alpen überhaupt. Da wo beide Hauptarme des Gletschers in scharfen Winkel zusammenkommen, steht ihnen ein schwarzer Fels entgegen. Der vom Monte Edretta sich senkende Arm reiſst unaufhörlich Blöcke von diesem Fels und führt sie mit sich in die Tiefe. Daher ist er ganz mit solchen Massen bedeckt; und sonderbar auffallend ist es nun, wie, nach seiner Vereinigung mit dem anderen Arme, die eine Hälfte des Gletschers über eine halbe Meile lang ganz schwarz bleibt, und von der blendenden Weiſse des anderen Theils in der ganzen Länge herunter scharf und bestimmt getrennt ist, wie zwei Flüsse, die mit verschiedenen Farben neben einander fortlaufen. Das beweist recht einleuchtend die allmählige, unaufhörlich fortschreitende Bewegung der Gletscher, durch den Druck von oben herunter, im Verhältniſs als ihr Ende im warmen Thale weggeschmelzt wird. Die Blöcke selbst verändern ihre Lage auf dem Gletscher nicht; nur die Unterlage von Eis ist beweglich, führt sie mit sich herunter, und häuft sie am Ende zu berghohen Morainen.

Sehr deutlich übersieht man vom Munteratsch, ohnerachtet des Schnees, die Schichtung dieser gewaltigen Massen; denn auf der Seite der Köpfe der Schichten sind die Abstürze zu steil, um auf andern Flächen als bloſse Vorsprünge den Schnee zu erhalten. Diese Vorsprünge aber entstehen durch die Trennung der Schichten selbst, und laufen daher parallel in dem Streichen der Schichten fort. Aber diese Abstürze sind an allen Spitzen nach derselben Seite gerichtet, und die Vorsprünge ziehen sich alle in gleicher Richtung hin. Daher findet sich auch hier noch überall dieselbe Schichtung wieder. h. 3 mit 40 bis 50 Grad fallen gegen Nordwest. Auch noch eben so bestimmt am Munteratsch selbst, und an den Spitzen, welche bis zum Engadin vorgehen, ja selbst noch an den Bergen, welche über dem Pafs der Maloja und dem Septimer gegenüber liegen. Es folgt daraus, dafs alles, was man von Poschiavo herauf gesehn hat, und alles, was auf dem Berninapafs selbst vorkommt, den Gebirgsarten des Engadin unterliegend, nicht angelehnt ist. Dem schönen Gneufs des Munteratsch, so grobschiefrig und feldspathreich, hätte man ohne diese Ueberzeugung leicht ein gröfseres Alter zuschreiben mögen. Am ganzen Abhang des Berges bleibt er derselbe, bis zum Gipfel. In Glimmerschiefer verändert er sich zum wenigsten hier nicht, auch nicht in Granit.

Sehr sonderbar ist es, dafs diese so bestimmte Schichtung sich an der Bergreihe ostlich vom Berninawege, zwischen den Wirthshäusern und Ponte Resina, gänzlich verändert. Wie ostlich von Pischiadell fallen hier die Schichten nicht gegen Nordwest, sondern ganz bestimmt gegen Nordost, im rechten Winkel mit jenen. Und auch die Gebirgsarten sind nicht übereinstimmend. An der Seite des Munteratsch erhält sich der Gneufs bis zum Rosetschthal; jenseit hingegen erscheint überall nur Granit, oder vielmehr Syenit, die Hauptgebirgsart des oberen Engadin. Quarz, weifser Feldspath, isolirter Glimmer und Hornblende sind in kleinkörnigem Gemenge verbunden, deutlich und schön. Und daraus besteht denn endlich auch die steile und hohe nächste Thalumgebung des Engadin selbst, zwischen St. Mauriz und dem Rosetschthale; die Hornblende wird hier sogar noch immer häufiger, und das Gestein wird dadurch immer auffallender schwärzer, dem älteren Granit weniger ähnlich.

Wie sehr nahe dieser Syenit wirklich immer der Formation des Gneufses, oder vielleicht näher noch des Glimmerschiefers verwandt bleibe,

scheint das häufige Hervortreten beider letzteren Gebirgsarten im Thale anzudeuten; gleichsam als bildeten sie hier den Grund des körnigen Gesteins. An dem See von St. Mauriz bei der Sägemühl erscheint unter andern der Gneufs recht grobschiefrig, mit Glimmer in Flatschen, nicht schuppig und deutlich geschichtet; auch nach Cresta herunter findet sich dieser Gneufs wieder; und bei Celerina steht eine einzelne zerstörte Kirche auf einer kleinen Hügelreihe des ausgezeichnetsten Glimmerschiefers, mit vielem, zum Theil schuppig auf einander liegendem Glimmer. Um so mehr würde man geneigt seyn, diese Gesteine für die Unterlage des Syenits zu halten, da wirklich von Ponte herauf, auf der Strafse der Albula, im Anfange immer nur Gneufs anstehend ist, und nur erst auf der gröfsten Höhe verändert sich alles zum bestimmtesten Granit. Die wüste Fläche des Albulapasses ist von beiden Seiten von zwei hohen, sehr steilen Felsmauern umschlossen; eine ungeheure Menge von Blöcken trennt sich von oben, und füllt dieses hohe Gebirgsthal in seiner ganzen Erstreckung; beide Schutt- und Gerüllhalden begegnen sich in der Mitte der Fläche und stürzen übereinander; und mit Ueberraschung sieht man, wie sie hier, durch ihre ganz verschiedene Natur, schon von sehr weit sich unterscheidend auszeichnen. Aus vieler Hundert Schritte Entfernung kann man ganz bestimmt angeben, welcher Block von der östlichen Umgebung, welcher von der westlichen Felsreihe heruntergestürzt ist. Denn die letzteren sind graue, bemooste Granite; jene hingegen bestehen aus weifsem, hellleuchtendem Kalkstein. So sind auch die Bergreihen selbst; die östliche zackig und grau; die westliche steil, fast senkrecht und auffallend weifs. Und diesem auffallenden Contrast hat wahrscheinlich die Albula den Namen zu danken. Der Granit dieser Höhen ist schön, kleinkörnig, häufig porphyrartig, mit beträchtlichen Feldspathkristallen; der Glimmer in isolirten und gruppirten Blättchen und Hornblende so wenig, dafs man an Syenit nicht sogleich denken möchte. — Der Kalkstein hingegen ist so sehr weifs nur auf der Oberfläche der Felsen. Die Farbe des Innern ist dunkelrauchgrau; dabei ist er dicksplittrig im Bruch, völlig dem Uebergangskalkstein ähnlich, wie er in mancherlei Ketten Bündten durchstreicht. — Auch zeigt sich das noch deutlicher, wenn man nur wenig auf der Bündtner Seite vom Albula herabsteigt. Denn schon bei dem Wirthshause Weifsenstein wechselt der Kalkstein mit Thonschiefer, und ver-

räth dadurch ganz seine Natur als Uebergangskalkstein. Er verdrängt auch bald die primitiven Gebirgsarten gänzlich. Es liegt unter dem Weifsenstein ein Dorf von Sennhütten an einem Gletscherbach, der vom hohen Cimult zur Albula herabkommt. Da, ist mir vorgekommen, setzt auch der Kalkstein auf der linken Thalseite herüber, und bildet nun alle Berge und Reihen zu beiden Seiten des Thales. Diese Gränze kommt auch ziemlich mit dem überein, was in Hinsicht des Wechselns von Syenit und Kalkstein im Herabsteigen vom Julier nach Bivio zu beobachten ist. Die noch nie erstiegene, zehntausend Fufs hohe, kegelförmig und frei hoch über ihre Nachbaren hervorragende Spitze des ewig beeisten Cimult's würde dann dem Gebiet des Syenits gehören, und die Kalksteinreihe nur erst an ihrem Fufse fortlaufen.

Da nun dieser Uebergangskalkstein in so hohen Felsen das höchste Gebirge ostlich der Albula bildet, ganz dem entgegen, was man von der Centralkette erwartet, ganz im Widerspruch mit dem, was man bis dahin über Zusammensetzung der Centralkette in Savoyen, im Wallis, am Gotthardt beobachtet hat, so bestärkt man sich um so mehr in dem Urtheil, die Albulakette könne die Centralkette nicht seyn, sondern das Berninagebirge müsse allein als wesentlicher Theil der Centralkette angesehn werden.

Der Syenit, der so sehr das Obere Engadin auszeichnet, erscheint in seiner gröfsten Ausdehnung an den Bergen des Julier. Denn, ohnerachtet wenig Alpenpässe so breit sind, daher auch so wenig steil aufsteigend, dafs sie leicht mit Wagen zu befahren wären, so scheint doch auf der ganzen Länge des Passes keine andere Gebirgsart anzustehen. Selbst die Gletscherbäche, welche in der Mitte zusammenkommen, führen von den höheren Bergen keine andere Stücken herunter. Hornblende fehlt in solchen Stücken niemals, allein auch Glimmer nicht. Beide Fossilien sind gewöhnlich in gleicher Menge mit Quarz und Feldspath verbunden. — Sobald man jedoch von den Säulen des Juliers auf dem nordlichen Abhang nur wenig Hundert Schritt herabsteigt, tritt Thonschiefer hervor, und wenig tiefer schöner, silberglänzender Glimmerschiefer, mit einigen Quarzlagern; beide im Streichen von h. 2,4 mit 70 Grad fallen nach Osten. Sie fallen

daher dem Syenit zu, und verbergen sich offenbar darunter. Es kommt ein grofses Thal und ein starker Gletscherbach in dieser Gegend vom hohen Cimult herunter. Jenseit des Thales bis in die äufserste Tiefe stehen weifse Kalkfelsen, wie auf der Albula, und wahrscheinlich auch derselben Kette gehörig. Der Glimmerschiefer aber bildet auch noch den Fufs dieser Berge, der Kalkstein steht deutlich darauf. Beide Gebirgsarten verschwinden wieder, weiter im Thale des Juliers nach Bivio herunter. Ueber dem Glimmerschiefer drängt sich schwarzer feinschiefriger Thonschiefer vor, dort wo ein ganzes Dorf von Sennhütten steht, und in der Höhe verdeckt die Kalkreihe eine, vielleicht noch höhere, von dunklem Serpentinstein, welcher schon unten im Thale über dem Thonschiefer aufsteigt, und nun zwischen dem Julierthale und dem Vall d'Err in steilen zusammenhängenden Bergen hinläuft, bei Bivio, bei Marmorera, bei Rofen bis Tinzen herunter alle Felsen bildet, und bei Mühlen vom Oberhalbsteiner Rhein durchbrochen wird. Diese Serpentinkette setzt gleich bestimmt noch jenseit des Oberhalbsteiner Thales fort, zwischen den Thälern von Falleer und Nandro, und verliert sich ohngefähr da, wo das Ferrerathal in dem des Hinterrheins ausgeht.

Das ist der Wechsel aller Gebirgsarten, welche in den beiden Hauptketten vorkommen, die das Engadin einschliefsen. Es scheint in ihrer Folge nichts zu liegen, welches mit bisherigen Annahmen sich nicht vereinbaren liefse. Von unten, von Tirano, fängt die Reihenfolge an, mit bestimmtem granitähnlichen Gneufs.

Es folgt Glimmerschiefer am See von Poschiavo.

Gneufs auf das neue von Pischiadell her; und nun noch einigemal beide Gebirgsarten im Wechsel; doch wahrscheinlich so, dafs am Ende der Glimmerschiefer der überwiegende seyn möchte. Dieser wird es seyn, der an der Nordseite des Julier hervortritt.

Darauf primitiver Thonschiefer; im Julierthale herunter.

Ueber diesen in grofser Mächtigkeit der Serpentinstein, mit dem ihm untergeordneten Gabbro.

Nun die Grauwacke, welche von Fillisur hinauf im Thale der Albula ansteht.

Dann endlich der Uebergangskalkstein, der in einer fortlaufenden Reihe, schon unter dem Oberhalbsteiner Thal, südlich der Albula, ausgezeichnet ist, zwischen Tiefenkasten und Conters durchbrochen wird, dann in spitzen Kegeln, und weit bemerkbar durch die Farbe, von Conters gegen die Höhen von Fillisur hinläuft, auf das Neue unter Bergün an den Bergüner Stalden durchbrochen wird, und nun bis auf das hohe Gebirge der Albula ansteigt.

So entsteht also ein ziemlich regelmäfsiges Alpenprofil, wenn man nur auf das Hintereinanderliegen der Gebirgsarten achtet, und man würde gern sich überzeugen, dafs man auch hier dem oft befolgten Grundsatz, der Wassertheiler müsse auch zugleich den Lauf der inneren Centralkette bestimmen, sich mit Vertrauen hingeben könne. Diese Kette würde daher von den Bergen des Septimers durch den Pafs der Maloja zum Berninagebirge übergehen, und dann südlich des Unter-Engadins weiter gegen Tyrol.

Allein so überzeugt man davon auf dem Bernina selbst seyn möchte, in so grofse Verlegenheit geräth man doch, wenn man diese Reihe in ihrer weiteren Erstreckung verfolgt. Schon in der Ansicht vom Monte Minur war es auffallend, dafs eine so bedeutende Kette im Fortlauf gegen Osten nirgends mehr in die Schneeregion heraufreichen sollte. Aber noch mehr: im Luvinerthal geht man über das ganze Gebirge, fast ohne zu steigen, so dafs man in diesem Thale sogar eine Kanalverbindung queer über die Alpen nicht für unmöglich gehalten hat. Und mit dieser Erniedrigung geht alles verloren, was einer primitiven Kette eigenthümlich seyn kann. Jenseit des Luvinerthals, in der weiteren Fortsetzung gegen Osten, besteht das Gebirge aus schwarzem Uebergangskalkstein; die Ofenscheideck, ein Pafs nach dem Thale von St. Maria und Glurns, 6753 Fufs hoch (nach Herrn Escher's Beobachtung), die Berge zwischen Glurns und dem unteren Engadin sind gänzlich daraus zusammengesetzt; höchstens sieht man sie mit Thonschiefer abwechseln, der zu eben dieser Formation gehört, und in dem auf der Ofenscheideck selbst, wie

so häufig in den Alpen, Gypslager vorkommen. Endlich verliert man sich gänzlich auf der Reschenscheideck, zwischen Glurns und Finstermünz, wo auf dem Wassertheiler selbst, auf der gröfsten Höhe zwischen beiden Meeren, noch Korn gebaut wird und reift. Die Reschenscheideck liegt nur 4559 Fufs über dem Meere, und ist nicht etwa eine Spalte, sondern eine breite und flache Ebene quer über die vorausgesetzte Centralkette. Wohin soll man sich nun wenden, um sie noch weiter zu verfolgen? Und wie sehr hat sie bis hierher durchaus ihren Charakter verleugnet, den sie doch in Tyrol, in Salzburg, so bestimmt wieder behauptet? — Vom St. Mariathal südlich, gegen den hohen Orteles diese Kette zu suchen, würde noch weniger gelingen; diese Reihen führen ganz in Italienische Ebenen herunter, und nie wieder gegen Tyroler und Salzburger Gebirge herauf. Und auch die Gebirgsarten widersprechen dem gänzlich. Den Orteles bildet unten Uebergangsthonschiefer, oben Kalkstein. Die Pässe nach Bormio gehen über Kalkstein hin; und auch selbst noch die heifsen Quellen von Bormio, wie die Quellen der Adda, brechen aus dichtem Kalkstein hervor. Nicht eher als bei Isolaccio, auf der Strafse gegen das Luvinerthal, erscheint das primitive Gestein, Glimmerschiefer und Gneufs, unter dem Kalkstein herauf, und setzt gegen das Berninagebirge fort.

Es ist daher nothwendig, um die wahre Verbindung zwischen den Gletschern des Oezthales und des Bernina, zwischen dem Plateykogel und dem Monte Edretta einzusehen, nur allein dasjenige aufzusuchen und zu verfolgen, was die Centralkette bilden sollte, und ihren Lauf nach dem Vorkommen dieser Gebirgsarten zu bestimmen, wenn überhaupt noch durch sie eine Verbindung dieser Punkte bewirkt werden sollte. Eine solche Verbindung findet sich wirklich. Alle primitiven Gesteine, Glimmerschiefer, und vorzüglich Gneufs, erscheinen wieder in den hohen, noch nie gemessenen oder bestiegenen Bergen über dem unteren Engadin, aus welchem die grofsen Hauptthäler von Prettigau, von Montafun, von Trofana entstehen, die überall bei den Anwohnern unter dem Namen des Vermund oder Fermont bekannt sind. Von diesem ewig beeisten und mit gewaltigen Gletschern umgebenen Mittelpunkt gehen nach allen Richtungen kleinere Aerme aus, und durch sie

werden

werden die kristallisirten Gesteine noch gegen Orte verbreitet, wo man sie gar nicht erwartet. Der Gneufs bildet noch die Höhe des Schlappiner Jochs zwischen dem Prettigau und Montafun, und verliert sich im Montafunerthale nicht eher, als eine und eine halbe Meile unter Pludenz. — Gneufs zieht sich in den äufsersten Winkel des Unter-Engadins herunter, und bildet die Engen und Berge zwischen Martinsbruck und Finstermünz. Glimmerschiefer und Gneufs, zum Theil auch Granit, erscheinen, und nur sie allein, auf den Höhen und in den Thälern von Sardaska, Veraina vom Fluela und Dismar, und nur erst seit dem Sertigthale steigt der Kalkstein der Albula auf, der auch mit ihr zusammenhängt *). — So sehr gewifs also das Berninagebirge ein Eigenthum der Centralkette war, eben so wenig kann ihr der Fermunt und seine Umgebungen bestritten werden, ohnerachtet beide Centralmassen durch das tiefe Thal des Engadin von einander getrennt sind. Ihr Zusammenhang ist doch auch wirklich durch das Thal noch zu verfolgen. Denn bei Zernetz ist noch überall auch in der Tiefe der Gneufs anstehend, und wahrscheinlich auch wohl in den Thälern, welche sich gegen den Pafs der Scaletta oder am Fluela erheben.

Es folgt hieraus, dafs die primitive Centralkette in dem ostlichen Theile der Schweiz dreimal durchbrochen ist; einmal bei dem Uebergang nach dem Berninagebirge von der Maira im Bregellthale; dann vom Inn, unter der kleinen Bergreihe der Casanna bei Zernetz; endlich wieder vom Inn, bei Martinsbrück und Finstermünz, wo aber doch immer noch eine Verbindung durch eine Bergkette zwischen dem Plateykogel und dem Fermunt ganz deutlich ist; zum wenigsten viel ausgezeichneter und bestimmter, als über den Wassertheiler auf der Reschen Scheideck.

Und es bestätigt sich auch hier, dafs sich das ganze Alpengebirge endlich in einzelnen grofsen Massen auflöst, welche gleichsam durch Dämme mit einander zusammenhängen. Diese Massen sind Centralpunkte, welche Aerme nach vielen Seiten hin aussenden. Begegnen sich zwei solche Aerme, so entsteht daraus eine fortlaufende Gebirgsreihe. Führen die Ursachen der

*) R. v. Salis Marschlins von Davos. Alpina I. Auch wird der Bergbau bei Monstein unter Davos schon im Hornblendschiefer betrieben, der hier dem Gneufs untergeordnet scheint.

Erhebung irgend einen Arm nicht so weit fort, so bleibt zwischen beiden Hauptbergen ein trennendes Thal.

Spätere Formationen sind nicht in solchen Mittelpunkten versammelt, sondern beharren weit mehr und bestimmter in einer angenommenen Richtung, und so sehr, dafs dieser Zug fast nie, auch durch die tiefsten Thäler nicht, unterbrochen oder gestört wird. Die Bildung der Thäler scheint überall in den Alpen ein späteres Phänomen, als die Erhebung der Gebirgsmassen; allein wahrscheinlich verdanken auch sie ihre Entstehung einer allgemein und vielleicht zu gleicher Zeit wirkenden Ursache.

Ueber

den wechselseitigen Einfluſs von Elektricität und Wärmethätigkeit.

Von Herrn Erman *).

Daſs einiges Verkehr zwischen der elektrischen und der Wärmethätigkeit statt finde, scheint aus mehreren Analogien zu ergehen. So sind im Allgemeinen die guten Leiter der Wärme, wie z. B. die Metalle, auch gute Leiter der Elektrizität; und Glas, Federn, Wolle, Haare und Seide sind vorzügliche Isolatoren für beide Thätigkeiten. Zwar finden sich einige Ausnahmen dieses Parallelismus, wie bei Holzkohle und Demant, bei den trokkenen Holzarten, bei mehreren Oelen u. s. w., und es würden sich diese Ausnahmen vielleicht vermehren, wenn uns die Abstufungen des spezifischen Wärmeleitungsvermögens, und vorzüglich die korrespondirenden Grade der elektrischen Leitung besser bekannt wären.

Eine andere Analogie für das Verkehr zwischen freier Wärme und freier Elektrizität liegt in der Thatsache, daſs durch bloſse Erhöhung der Temperatur mehrere, wo nicht alle Isolatoren der elektrischen Thätigkeit in Leiter derselben verwandelt werden. Mit Sicherheit weiſs man es für atmosphärische Luft, Glas und Holz ohne Veränderung des Aggregatzustandes, und für Harz und Schwefel bei eintretender Schmelzung. Ueber diesen Berührungspunkt zwischen elektrische und Wärmethätigkeit ist meines

*) Vorgelesen den 3. März 1814.

Wissens nur die einzige Ansicht zur Sprache gekommen, dafs die isolirende Substanz selbst es sei, die durch Einwirkung der Wärme auf eine uns verborgene Weise permeabel wird für die Thätigkeit, gegen die sie früher kohibirend wirkte. Eine andere Ansicht wäre die, dafs durch erhöhte Temperatur die Expansibilität der Elektrizität selbst vermehrt wird, so dafs in diesem Zustande der gesteigerten Repulsivkraft sie fähig wird, Substanzen zu durchdringen, welche früher sie zu sperren vermochten.

Als ein sehr kräftiger analogischer Beweis für irgend ein Verkehr zwischen freier Wärme und Freiwerden der elektrischen Thätigkeit mufs unstreitig die Erscheinung des Turmalins anerkannt werden. Das Räthselhafte dieser Wirkungen würde zum Theil verschwinden, wenn es wirklich erlaubt wäre anzunehmen, dafs Temperaturerhöhung die elektrische Thätigkeit expandiren und zur Freiheit entbinden könne. Diese Ansicht würde, wenn die Erfahrung sie dermaleinst bestätigt, die Erwartung erfüllen, die Canton von seinen Versuchen mit hermetisch verschlossenen Glaskugeln hatte, dafs ein Uebergang zur Theorie des Turmalins in ihnen liege. Er nahm bekanntlich sehr dünne Glaskugeln von beiläufig 7 bis 8 Tausendtheilen eines Zolles Glasdicke, an eine Glasröhre von 8 bis 10 Zoll geblasen; lud ihre innere Oberfläche mit positiver oder negativer Elektrizität, und verschlofs sie dann hermetisch. In diesem Zustande gaben die Kugeln, an das Elektrometer gebracht, keine Divergenz. Sobald er sie aber mäfsig erwärmte, zeigten sie eine sehr starke Ladung und gaben Funken. Da diese Wirkung der Wärme oft wiederholt werden konnte, ehe sie ganz verschwand (wie denn Canton dergleichen Kugeln besafs, die nach sechs Jahren dieselben Erscheinungen gaben, obgleich in etwas geringerem Grade), so pafst die Vorstellung einer durch Wärme bedingten Permeabilität des Glases nicht gut auf diesen Fall, weil in dieser Voraussetzung bei der ersten Erwärmung des leitend gewordenen Glases die ganze Ladung hätte verschwinden müssen, sogar vor dem ersten Funkenziehen. Allerdings könnte man sich von diesem Vorgang Rechenschaft geben, wenn es erlaubt wäre anzunehmen, dafs die an die nach wie vor isolirende innere Glasfläche gebundene Elektrizität, durch die Wärme bethätigt und expansibeler geworden, ein kräftigeres Spiel der Atmosphären durch die Dicke des Glases einleite, und so an der äufseren Fläche den entgegengesetzten Zustand bedinge. Doch ehe diese Erklärung des Cantonschen Versuchs und eine Anwendung desselben auf die Theorie des Turmalins gemacht werden darf, mufs eine

sorgfältige Wiederholung des Versuches den wichtigen Umstand genau bestimmen, ob die am Elektrometer nach der Erwärmung angezeigte Elektrizität wirklich die entgegengesetzte, oder vielleicht die gleichnamige ist der früher an die innere Fläche gebrachten.

Auch eine Wechselseitigkeit bei diesem Einfluss der Wärme auf elektrische Verhältnisse ist an sich denkbar, dass nämlich ein gewisser Grad von Spannung elektrischer Thätigkeiten auf die Temperaturverhältnisse der Körper Einfluss haben möchte. In der That, wenn die Repulsivkraft der Wärme die Leitung der Elektrizität so bedeutend modifizirt, so ist, möchte man fast sagen, zu erwarten, dass auch ein hinzukommender Grad von elektrischer Repulsivkraft modifizirend einwirken werde, sowohl auf die Fortpflanzung der Wärme durch die Masse der Körper, als vorzüglich auf die Ausstrahlung von ihren Oberflächen. Wie man es sich auch erklären mag, dass eine metallisch-glänzende und polirte Oberfläche so viel weniger Wärme ausstrahlt, als eine dunkele und rauhe, so läuft die Sache am Ende doch darauf hinaus, dass eine geringe Modifikazion derjenigen mechanischen Anziehungs- und Abstofsungskräfte, die an der äufsersten Begränzung der Körper (in diesem den tiefsten und wichtigsten Mysterien der Natur geweihten Raume) thätig sind, die Ausstrahlung der Wärme ausnehmend verändert. Nun ist aber eben diese äufserste Gränze der Körper der eigenthümliche Sitz der elektrisch repulsiven Thätigkeit bei den Leitern; es sei daher erlaubt, in einer Zeit, wo so vieles in der Physik sich gegen alle bekannte Analogien faktisch ergeben hat, einige Untersuchungen über den angeregten Gegenstand an Analogien zu knüpfen, deren Schwäche und Unvollständigkeit gern zugegeben wird.

Ich wünschte zu wissen: ob ein Körper, dessen Temperatur über die des umgebenden Mittels erhöht ist, schneller erkaltet, wenn seine Oberfläche eine bedeutende elektrische Spannung erhalten hat, als wenn er sich im elektrischen Gleichgewicht mit seinen Umgebungen befindet, und zwar in den zwei Fällen einer leitenden und einer isolirenden Oberfläche, bei übrigens ganz gleichen Umständen.

Getriebene Kugeln von sehr dünnem Kupferblech, von $1\frac{3}{4}$ Zoll Rheinländisch Durchmesser, die beiläufig 7,10 Gran Wasser fafsten, wurden in ihrem Mittelpunkt mit einem sehr feinen Thermometer versehen, welches mit Hülfe eines Verniers und eines Mikroskops die Zehntelgrade der Fah-

renheitischen Skala genau angiebt. Das Wasser in der Kugel wurde über die genau beobachtete Temperatur des Zimmers erwärmt; der ganze Apparat vollkommen isolirt; die Kugel in leitende Verbindung gebracht mit einer Batterie von gewöhnlich 5 Fuſs, und oft auch von 10 Fuſs belegter Fläche. Dann mit einer Sekundenuhr die Zeiten der Erkaltung von 10 — 10 Grad gemessen, theils für den Fall, wo während des ganzen Verlaufs die Batterie, und folglich die Oberfläche der Kugel, eine starke stets gleich unterhaltene Ladung erhielt, theils für den Fall, wo die vollständig entladene Batterie, und folglich auch die sie berührende Kugel, im elektrischen Gleichgewicht mit den umgebenden Körpern sich befand.

Meine Erwartung, daſs diese so einfach scheinende Beobachtung bei der darauf verwendeten Sorgfalt das erwartete Resultat sogleich mit Bestimmtheit aussprechen würde, ohne daſs man auf die Nothhülfe von Mittelzahlen seine Zuflucht nehmen müſste, ging nicht in Erfüllung. Wenn ich unter Umständen, die ich möglichst gleich erhielt, und die dem Anscheine nach wirklich ganz identisch waren, den progressiven Gang der Erkaltung in mehreren unmittelbar auf einander folgenden Reihen verglich, so fanden sich meistens Unterschiede von mehreren Sekunden, oft sogar von 30 — 55; und einigemal sogar von einer ganzen Minute und drüber. Der objektive Grund dieser Abweichung liegt wahrscheinlich in den Oszillationen der Temperatur des Zimmers, die nie ganz zu vermeiden sind, und sich am empfindlichsten Thermometer kaum aussprechen können, weil sie zu sehr vorübergehend sind, auf die Erkältung hingegen denselben Einfluſs haben mögen, wie auf die Beobachtung der verdunstenden Menge in den Daltonschen hygrometrischen Beobachtungen; 2) ferner in Luftströmungen, die ebenfalls nie ganz zu vermeiden sind; 3) in dem Niederschlagen und Wiederverdunsten eines Theiles des durch den verschlieſsenden Korkstöpsel nicht ganz zu entfernenden Wasserdampfs aus der Kugel an ihre Oberfläche. Doch glaube ich eingesehen zu haben, daſs subjektive Fehler der Beobachtung auch etwas zu diesen Abweichungen beitragen. So fein auch in meinem Instrumente der auf dem durchsichtigen Elfenbein gezogene Strich ist, der den Quecksilberstand angiebt, so erscheint er doch beim Gebrauch des Mikroskops mit einer Breite, welche der Schärfe einer ganz genauen Beobachtung hinderlich ist, weil in den niedrigen Intervallen der Erkaltung die langsam sich zusammenziehende Quecksilbersäule oft über zwei Minuten braucht, um diesen Raum zu durchwandern. Freilich muſs man sich

bemühen, nur den Appuls zum oberen Rande des Strichs zu beobachten; doch liegt auch hierin eine kleine Unbestimmtheit, welche, vorzüglich wenn die Sekundenuhr gleichzeitig beobachtet werden muſs, in ein mehr oder weniger scharfes Abschätzen für den Betrag einiger Sekunden ausartet. Ich versuchte oft die Messung mit einem ebenfalls sehr guten Thermometer, aber ohne Mikroskop, fand jedoch, daſs alsdann die Parallaxe noch viel gröſsere Ungewiſsheit in der Abschätzung der wahren Sekunde herbeiführte. Wählte ich zu den Beobachtungen sehr groſse Ueberschüsse über die Temperatur des Orts, so fiel zwar das Quecksilber rascher, und sein Appuls an den obern Rand des Striches war entschiedener; von der andern Seite aber wurde die Beobachtung der Uhr um so mehr erschwert, wenn der ganze Verlauf gewissermaſsen tumultuarisch erfolgte, bei der geringen Masse des erkaltenden Wassers; auch wurden hierdurch die gesuchten etwanigen, von dem elektrischen Zustande der Fläche herrührenden Unterschiede auf jeden Fall zu einer so geringen Aliquote des Ganzen, daſs sie sich noch mehr in den unvermeidlichen Fehlern der Beobachtung verbergen muſsten. In den meisten Versuchen über diesen Gegenstand begnügte ich mich deshalb nur, die Erkaltungen von dem 120sten bis zum 90° zu beobachten; während die bestehenden Temperaturen des Zimmers zwischen 67 und 73 gewählt wurden. Die Erkaltungen unter den 90° fand ich wiederum zu langsam und die Beobachtung minder günstig, um so mehr, da es zu beschwerlich wurde, die gleiche Ladung der Batterie mehrere Stunden hindurch zu unterhalten.

Das Resultat dieser Untersuchung ist, daſs innerhalb der Gränze von Genauigkeit, die ich bis jetzt zu erreichen vermochte, der elektrische Zustand der Oberflächen durchaus keinen Einfluſs hat auf die Ausstrahlung der Wärme; denn die Unterschiede der beobachteten Zeiten der Erkaltung in komparativ entgegengesetzten Zuständen fielen nie gröſser aus, als diejenigen, welche bei den Reihen sich zeigten, wo die Oberflächen in demselben Zustand, sowohl des elektrischen Gleichgewichts, als der Erregung, sich befanden; und zwar ergaben sie sich für elektrisch geladene Flächen eben so oft positiv als negativ.

So z. B.	+ E.	o E.	
Erkaltung von	Min. Sek.		Sek.
180 — 170	4, 24	3, 45	+ E langsamer um 39
170 — 160	4, 17	4, 42	+ E schneller — 25
160 — 150	5, 55	4, 42	+ E langsamer — 13
150 — 140	6, 31	6, 29	+ E langsamer — 2
140 — 130	8, 12	7, 20	+ E langsamer — 52
130 — 120	9, 30	9, 0	+ E langsamer — 30
120 — 110	12, 46	12, 5	+ E langsamer — 41
110 — 100	18, 13	18, 1	+ E langsamer — 12

In dieser Reihe scheint sogar die Elektrisation die Wärmeausstrahlung verzögert zu haben; aus einigen andern würde man umgekehrt auf die erwartetete Beschleunigung der Erkaltung durch Elektrisation schliefsen müssen.

Z. B.	+ E.	o E.	
	Min. Sek.		Sek.
120 — 110	11, 30	12, 4	+ E schneller um 34
110 — 100	16, 23	16, 57	+ E schneller um 34
100 — 90	23, 15	24, 54	+ E schneller 1 M. 39

Aber aus der Vergleichung aller Reihen ergeht, dafs gar kein konstanter Unterschied sich ergeben hat, und dafs der positiv elektrische Zustand bei leitenden Oberflächen keinen, bis jetzt wenigstens, wahrnehmbaren Einfluſs auf die Wärmeausstrahlung ausübte.

Eben so wenig fand ich einen Unterschied in dieser Hinsicht bei Vergleichung der positiven und negativen Elektrizität.

Auch konnte ich keinen wahrnehmen, als ich der erkaltenden Metallkugel einen schwarzen nicht leitenden Ueberzug gab. In diesem Zustande war an und für sich ihre Erkaltung bedeutend beschleunigt.

	Blank.	Schwarz.	Schwarze schneller um
Z. B. 120 — 110	8, 15	7, 42	0 M. 33 S.
110 — 100	12, 40	10, 01	2 M. 40 S.
100 — 90	17, 20	13, 48	3 M. 32 S.
		Summe	6 M. 45 S.

Als

Als aber die Erkaltung der schwarzen Kugel komparativ im Zustande des E Gleichgewichts und dem einer sehr starken E Ladung beobachtet wurde, zeigte sich durchaus kein Unterschied, den man auf eine Mitwirkung der elektrischen Thätigkeit beziehen könnte. Z. B.

Temperatur des Zimmers 68,50.

Geschwärzte Kugel.			
	+ E.	o E.	
120 — 110	6 M. 42 S.	6 M. 30 S.	+ E langsamer um 12 S.
110 — 100	9 - 4 -	9 - 10 -	+ E schneller um 6 S.
100 — 90	13 - 0 -	13 - 40 -	+ E schneller um 40 S.

Es soll allerdings der Versuch gemacht werden, die Zeiten der Abkühlung durch gleiche Grade mit mehr Schärfe zu bestimmen, als es mir hier bei Anwendung einer so geringen Wassermasse gelingen konnte. Vielleicht ergiebt sich alsdann doch noch ein geringer Grad von Einfluſs der E Thätigkeit, welcher sich hier innerhalb der Gränze verbirgt, wo die hier angewendete Methode ein sicheres Resultat giebt. Im Ganzen glaube ich doch nicht, daſs man je bei jedem einzelnen Fall Abweichungen, die bis auf 30 — 40 Sekunden gehen können, vermeiden wird. Und daſs ich im Ganzen die progressive Erkaltung richtig beobachtete, ergeht aus der ziemlich genügenden Uebereinstimmung der jedesmaligen mittleren Zeiten, wie ich sie fand, und wie ich sie für den gegebenen Ueberschuſs der Wärme des Wassers über die des Zimmers mittelst der Unterschiede der dazu gehörigen Logarithmen berechnete. Es scheint also aus diesen Versuchen mit einem nicht ganz geringen Grade von Zuverlässigkeit zu ergehen, daſs die freie E auf die freie Wärme keinen Einfluſs hat.

2) Bestätigt wird dieses Resultat durch folgende Prüfungsmethode. Ein zinnernes kubisches Gefäſs mit einer metallisch glänzenden, und einer schwarz bemalten und isolirenden matten Fläche, wurde im Fokus eines groſsen konkaven Metallspiegels gebracht. Die eine Kugel eines Rumfordtschen Thermoskops im korrespondirenden Fokus eines kleineren. Der Abstand beider Spiegel betrug 22 Zoll Rheinländisch. Der Index des Thermoskops war bei der Temperatur des Zimmers stationär bei 54°. Es wurde in das kubische Gefäſs Wasser von 170° gefüllt. Als nun die schwarze Fläche gegen den Reflektor gekehrt wurde, brachte sie den Index auf 53,

die blanke hingegen nur auf 43. Das isolirte kubische Gefäfs war von Anfang an in Berührung mit der inneren Belegung einer Flasche, welche von der gehörig entfernten Maschine aus augenblicklich geladen und entladen werden konnten, sowohl + als —. Es hatte aber durchaus keinen wahrnehmbaren Einfluss auf den jedesmaligen Stand des Index, und folglich auf die Wärmestrahlung, die er sehr genau angiebt, ob die Wärmeausstrahlende Fläche, gleichviel die metallisch leitende oder die durch den isolirenden Ueberzug geschwärzte, eine hohe elektrische Spannung bekam, oder in den Zustand der nicht erregten elektrischen Thätigkeit wieder versetzt wurde. Und da die Zusammenstellung des Versuchs es erlaubte, augenblickliche Uebergänge des einen Extrems in das andere zu bewirken, ohne dafs man sich dem Apparat zu nähern brauchte, so ist dieser Beweis ziemlich zuverlässig.

3) Um zu prüfen, ob die freie elektrische Thätigkeit das Reflexionsvermögen einer Metallfläche vermehre, isolirte ich den Reflektor, und verband ihn mit einer Flasche, die ich ebenfalls von fern laden und entladen konnte. Es fand sich aber, dafs bei übrigens gleichbleibenden Umständen das Reflexionsvermögen der Oberfläche durch die elektrische Spannung derselben weder vermehrt noch vermindert werde, wenigstens nicht innerhalb der Gränzen der auf diesem Wege wahrzunehmenden Unterschiede, welche doch bekanntlich sehr fein sind.

4) Die Verdunstung ist so entschieden eine Funktion der Wärme, und die Temperatur der Oberfläche steht wiederum so sehr unter dem Einfluss der Verdunstung, dafs wenn die elektrische Repulsion die Wärmethätigkeit (vorzüglich an den Oberflächen) unterstützte und bekräftigte, eine vermehrte Verdunstung die unmittelbare, und eine Veränderung der Temperatur eine mittelbare Folge dieses Verkehrs seyn müfste. Es ist mir zwar früher nie gelungen, einen Unterschied in der ponderabelen Menge von elektrisirten und nicht elektrisirten Verdampfungsschalen wahrzunehmen, so oft ich auch den Versuch wiederholt habe, als ich mich mit praktischer Ausübung der Daltonschen hygrometrischen Methode beschäftigte. Da jedoch die ponderabele Menge der Verdunstung bei gleicher Temperatur im Verlauf einer kurzen Zeit durch anderweitige Ursachen etwas schwankend befunden wird, wenn es auf einige Gran ankommt bei einer Oberfläche von 6 Zoll Englisch, so wäre es möglich, dafs der an und für sich geringe Einfluss der elektrischen Spannung sich innerhalb der Gränzen dieses Schwankens verberge. Es war deshalb nicht unwichtig, die Temperatur eines verdunstenden Kör-

pers mit einiger Schärfe komparativ zu untersuchen, im Zustande des elektrischen Gleichgewichts, und in dem der Exregung freier elektrischer Thätigkeit.

Es wurde die eine Kugel eines Rumfordschen Thermoskops (Differential-Thermometer) mit dünner Leinwand überzogen. Als beide Kugeln sich selbst überlassen wurden, kam der Index auf 40°, und beharrte in diesem Stande. Die überzogene Kugel wurde in Wasser getaucht, welches eine geraume Zeit in demselben Zimmer gestanden hatte; der Index kam auf 48½. Aus dem Wasser gezogen und der Verdampfung überlassen, brachte die Dampfbildung den Index auf 89½, und zwar ganz unverrückt während mehr als einer Viertelstunde. Nun war früher jede Kugel des Thermoskops in Berührung gesetzt worden mit einer Ladungsflasche; diese beiden Flaschen waren ganz gleich gewählt, um alle Umstände möglichst abzugleichen. Während das Thermoskop durch die Verdampfungskälte auf seinen beharrlichen Stand gehalten wurde, ertheilte ich aus der Ferne der die verdampfenden Kugeln berührenden Flasche sehr starke Ladungen, bald positiv, bald negativ; es erfolgte aber nie eine Spur von Bewegung des Index, woraus man auf irgend eine Vermehrung der Dampfbildung hätte schliefsen können. Die ihr korrespondirende Temperatur blieb sich vielmehr stets gleich bei absolutem elektrischen Gleichgewicht der verdampfenden Oberfläche und bei sehr starker Spannung derselben.

Hieraus ergeht, dafs keine freie Wärme durch die elektrische Repulsion bethätigt wird; denn dieser Ueberschufs von frei gewordener und mit dem Wasser sich verbindender Wärme müfste ohnfehlbar die Temperatur des verdampfenden Körpers mehr erniedrigen, als wenn keine neu hinzugekommene Ursache den allmähligen Uebergang der Wärme aus dem Inneren der Masse in das Wasser an der Oberfläche beschleunigt. Diese Weise, eine Beschleunigung der Verdampfung durch elektrische Repulsion sich zu denken, fällt also weg; eine andere bliebe jedoch übrig, vorausgesetzt, dafs die Thatsache selbst faktisch erwiesen wäre. Man könnte nämlich sagen, die elektrische Repulsion vermehrt die Menge der Verdampfung nicht mittelbar und dadurch, dafs sie mehr Wärme aus dem Inneren des Körpers entbindet und an die Oberfläche desselben ausstöfst; sondern die Wirkung ist eine unmittelbare, die elektrische Repulsion vermehrt an und für sich die Elastizität des Dampfes; daher kann mit demselben Aufwand von Wärme eine viel gröfsere Menge von Dampf unter demselben Druck und

bei derselben Temperatur entstehen und bestehen, als wenn die Dampfbildung durch die Wärme allein und ohne Unterstützung einer anderen Repulsivkraft eingeleitet würde.

5) Aber auch diese Vorstellung fand ich ungegründet, und mit dem Erfolg folgender Prüfung ganz unvereinbar. Eine kleine Glasretorte hatte einen verhältnifsmäfsig sehr langen umgebogenen Tubulus; in diesem war ein Zuleitungsdrath auf das sorgfältigste Luft- und Dampf-dicht eingekorkt und eingekittet, so dafs ein Ende des Golddraths nach aufsen frei hervorragte, das andere in das die Retorte zur Hälfte anfüllende Wasser reichte. Der Schnabel der Retorte bildete eine zweimal rechtwinklich gebogene Röhre, die sich in zwei parallel neben einander stehende und nach unten mit einander verbundene Gefäfse erweiterte, und dann vom zweiten Gefäfs aus senkrecht in einer Länge von 30 Zoll heraufstieg. Die beiden Gefäfse und das sie verbindende Knie erhielten etwas Quecksilber. So bildete das Ganze einen manometrischen oder elaterometrischen Apparat, wo in dem den leeren Raum des Apparats über dem Wasser erfüllenden Dampf keine Vermehrung der Expansibilität statt finden konnte, ohne sogleich eine korrespondirende Quecksilbersäule zu erheben. Dieser Apparat wurde isolirend aufgehängt, und die Retorte nebst den Quecksilbergefäfsen in ein allmählig zu erwärmendes Bad getaucht. Ich wählte hiezu das Oel, weil es die Elektrizität isolirt, keine leitenden Dämpfe an den Apparat absetzt, eine hohe Temperatur annimmt und durchsichtig genug ist, um selbst die Wahrnehmung der ersten Grade des steigenden Quecksilbers zu erlauben. Das Oelbad wurde ganz allmählig erwärmt mittelst einer Lampe, deren Wirkung man durch Stellung des Dochts ganz in seiner Gewalt hatte; mehrere Thermometer waren in verschiedenen Tiefen des Oelbades vertheilt; und durch die Regierung der Lampe sowohl, als durch das Rühren in das Oelbad, war es leicht, die Temperatur des Ganzen auf eine beliebige Zeit stationär zu erhalten.

So wurde die Temperatur des in der Retorte enthaltenen Wassers ganz allmählig und mit absichtlich bewirkten Stillständen von 40 Reaumur bis auf 75 R. erhöht, und von da zurück wieder bis auf 40 erkältet. Die Augenblicke, wo das Elaterometer sowohl als die Thermometer im Stillstande erhalten wurden, benutzte ich, um das Wasser in der Retorte, und folglich auch die eingeschlossenen Dämpfe, mittelst einer Batterie und des zuleitenden Golddraths der Tubulatur abwechselnd in eine bedeutende posi-

tive und negative Spannung, und unmittelbar darauf in das elektrische Gleichgewicht zu versetzen. Aber in keinem dieser Fälle zeigte sich am Elaterometer irgend ein Einfluſs auf die Expansibilität der Dämpfe.

Das Resultat der empirischen Untersuchungen, so weit sie bis jetzt reichen, ist, daſs freie elektrische Thätigkeit die Wärmeausstrahlung nicht begünstigt und nicht verzögert. Dalton's frühere Ansicht, daſs selbst die ponderabeln expansibeln Flüssigkeiten ihre Repulsion nur auf das ihnen Homogene äuſsern, erhält für die imponderabeln expansibeln Thätigkeiten eine neue Bestätigung.

Bemerkungen

über

das Verhältnifs des unmagnetischen Eisens zur tellurischen Polarität.

Von Herrn Erman *).

Die Art und die Grade der Einwirkung des tellurischen Magnetismus auf das weiche unmagnetische Eisen bedürfen in mancher Hinsicht noch fernerer Prüfung. Morechini's Behauptungen und die früheren eines verdienstvollen Physikers, dafs in dem magnetischen Zustande des dem tellurischen Einflufs überlassenen Eisens periodische Veränderungen statt finden, welche auf astronomische Bedingungen beruheten, sind geeignet, eine erneuerte Aufmerksamkeit auf diesen tellurischen Einflufs überhaupt zu lenken und manchen nicht unwichtigen Aufschlufs zu gewähren.

Eine fast wichtigere Aufforderung, alle Umstände dieser Einwirkung mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, liegt jedoch in der früher schon zur Sprache und auch zur Ausübung gekommenen Methode, die wahre Richtung der magnetischen Kräfte der Erde mittelst ihrer Einwirkung auf weiches unmagnetisches Eisen aufzufinden, wobei man den fast unüberwindlichen Schwierigkeiten der Konstruktion und der Erhaltung einer Neigungs-Boussole überhoben wäre. Die erste dieser Methoden ist die Beobachtung

*) Vorgelesen den 1. December 1814.

der Polarität einer senkrechten Stange auf einem Schiffe, welches seinen Lauf aus höheren Breiten bis zum magnetischen Aequator nähme, und von da aus allenfalls wiederum in südliche Breiten. Diese Beobachtungen sind bekanntlich im Jahre 1683 von einem Engländer, aber ohne Genauigkeit, angestellt worden; seine Resultate stimmen nicht zu mit den zuverlässigeren neueren Bestimmungen des magnetischen Aequators; oft hat man daher den Wunsch geäufsert, diese Beobachtungen möchten wiederholt werden, welches aber meines Wissens nicht geschehen ist: aufser dafs Lamanon eine Reihe dergleichen Wahrnehmungen sowohl an den feststehenden als an beweglichen Stangen anstellte. Wenn man aber mit vollem Rechte einen grofsen Werth auf diese Beobachtungen legt, so darf dieses doch kein unbedingter seyn; man darf nicht voraussetzen, dafs der auch noch so genau durch Ablenkung der Boussole, oder besser durch Schwingungen oder Windungsgrade, in jeder gegebenen Breite gefundene magnetische Zustand der Stange etwas für diese Breite Konstantes und von jeder Korrektion für das Koerzitivvermögen des Eisens Unabhängiges sei, so dafs z. B. dasselbe Schiff, wenn es aus südlichen Breiten durch den Aequator zurück in die vorige gegebene nördliche Breite kommt, denselben Grad der Polarität an seiner Stange zeigen würde, den es daselbst vor der Reise zeigte. Diese Annahme beruht darauf, dafs man sich, wenigstens in diesem Fall, das weiche Eisen ganz ohne Koerzitivkraft denkt, so dafs es die tellurische Einwirkung für jede gegebene Lage in ihrem vollen Werthe erhalte und andeute, aus welcher anderen früheren Lage es auch in diese gekommen sei. Da dieses aber nicht angenommen werden darf, so sieht man ein, dafs eine Stange, welche vom Nordpole in die Breite von 45°, und eine andere, welche vom Aequator in dieselbe Breite von 45° gelangt, ganz andere scheinbare Werthe des tellurischen Magnetismus für die Breite von 45° geben werde; und dafs es hier um ein Korrektionselement zu thun ist, welches erst aufgefunden werden mufs.

Uebrigens sind die erwähnten Beobachtungen des Engländers mit anderen von derselben falschen theoretischen Annahme herrührenden zufälligen Fehlern behaftet, die sie, wenn seine Abschätzungen des magnetischen Zustandes der Stange auch noch so genau wären, doch unbrauchbar machen würden. Denn in der Voraussetzung, dafs die jedesmalige Polarität der Stange lediglich von dem jeder Breite zugehörigen Grad des tellurischen Magnetismus abhängt, nahm er oft seine Stange aus der senkrechten Richtung, brachte sie absichtlich in ganz andere Beziehungen auf Azimuth und

Höhe, und stellte sie nachher wieder senkrecht, um in den folgenden Breitengraden die Beobachtungen an die vorigen zu reihen: als wenn die Stange durch diese Behandlung nicht so bedeutend modifizirt worden wäre, dafs sie blofs deshalb ganz andere mit den früheren nicht mehr ohne Korrektion zu vergleichende Grade der Polarität erhalten hätte.

Die zwei andern Methoden, die Richtung der magnetischen Kräfte und namentlich die Neigung zu finden mittelst der tellurischen Einwirkung auf weiches unmagnetisches Eisen, sind aus späteren Zeiten, und doch nimmt die erste noch keine Notiz vom Koerzitivvermögen des Eisens, und ist deshalb fehlerhaft; die zweite aber betrachtet dieses Vermögen als ein nothwendig zu tilgendes Hindernifs, und wird dadurch abschreckend langweilig und fast unausführbar.

Konjema *) bringt eine um einen ihrer Endpunkte B bewegliche Stange AB in die durch eine Deklinations-Boussole gegebene Ebene des magnetischen Meridians und in horizontale Lage; er senkt nun das südliche Ende A der Stange allmählich, bis das nördliche B aufhört, auf die dicht neben B gestellte Boussole zu wirken; und der Winkel unter dem Horizont, unter welchem dieses geschieht, ist der Ergänzungswinkel von der Neigung, welche die Richtung der magnetischen Kräfte der Erde unter dem Horizont hat. Ist diese Richtung z. B. 70° Neigung des nördlichen Endes unter dem Horizont, so wird man das südliche Ende der Stange um zwanzig Grad unter den Horizont neigen müssen, um alle Spuren der tellurischen Einwirkung verschwinden zu sehn.

Doch dieses gilt nur für den Fall, wo der Stab an sich vollkommen indifferent wäre, was wohl selten oder vielmehr nie eintreffen wird. Gesetzt also, das der Boussole zunächst liegende Ende B habe für sich eine zufällige, von der jedesmaligen tellurischen Einwirkung unabhängige, nördliche Polarität, so wird man das entgegengesetzte Ende A nicht blofs um den Bogen y (z. B. 20) in Süden senken müssen, sondern noch um einen additionellen Bogen q; wovon die Wirkung ist in A nördliche und folglich in B südliche Polarität zu erregen; und zwar giebt man so viel additionelle Neigung q, bis die frühere nördliche Kraft von B durch die neuerregte südliche kompensirt werde, und folglich B gar nicht mehr auf die Boussole wirke.

*) Anton Burgmann's philosophische Versuche über die magnetische Materie, übersetzt von Eschenbach, S. 263.

wirke. Um nun den unbekannten Werth dieses additionellen Winkels q abgesondert zu erhalten von dem Neigungsbögen, der für eine unmagnetische Stange gehören würde, bringt Konjema die Enden des Stabes in relativ entgegengesetzte Azimuthe, so dafs A nunmehr nach Norden weise. Diese Umdrehung geschieht ganz genau in einer Ebene, welche auf die Ebene des Meridians senkrecht ist; die Konstruktion seines Instruments ist hierauf berechnet. Nun ist in unserm Beispiel der Stab um 20 Grad über den Horizont in Norden erhöht. Konjema nimmt an, seine zufällige nördliche Polarität sei noch dieselbe, die er am Anfange des Versuches hatte; also wird der Stab in der neuen Stellung am Punkt B wiederum die Boussole anziehn; man mufs also das Ende A ebenfalls um einen additionellen Winkel senken, damit diese nördliche Thätigkeit ebenfalls kompensirt werde; und zwar nimmt Konjema an, dieser additionelle Winkel werde in der zweiten Stellung gleich seyn dem zur ersten Stellung gehörigen: er hiefs daher ebenfalls q.

Der ganze Bogen, um welchen man in der ersten Stellung die Stange senken mufste, um sie indifferent zu machen, heifse a; er besteht aus y (= 20) + q. Der zur zweiten Stellung gehörige Bogen heifse b, und ist gleich y — q. Wenn daher $y + q = a$

und $y - q = b$

so ist $y = \frac{a + b}{2}$

Brugmanns, der dem Scharfsinne des Leuwardischen Erfinders Gerechtigkeit widerfahren läfst, und im Besitz kam des zur Anwendung dieser Methode von demselben konstruirten Instruments, fand jedoch, dafs bei der gröfsten Genauigkeit des Verfahrens ein Fehler von beiläufig 30 Minuten unvermeidlich bleibe, weil Konjema, das Eisen ebenfalls als ohne alle Koerzitivkraft betrachtend und den Einflufs einer vorhergegangenen Stellung auf die nächstfolgende folglich ganz übersehend, von der falschen Voraussetzung ausgeht, die zufällige nördliche Polarität der Stange, und folglich der ihr entsprechende Winkel q, bleibe sich während des ganzen Verfahrens gleich; welches jedoch nicht ist, indem die nördliche Polarität in der ersten Stellung während der Senkung in Süden durch den additionellen Bogen etwas stärker, und in der zweiten Stellung durch den additionellen Bogen an sich geringer wird; weshalb auch die beiden additionellen

Winkel q und q^1 nicht gleich seyn können, da sie ungleiche Gröfsen zu kompensiren haben.

Um diesem Mangel zu begegnen, modifizirte Brugmanns die Konjemasche Methode so wesentlich, dafs man sein Verfahren füglich als ein ganz eigenthümliches, als eine dritte für sich bestehende Methode betrachten kann. Er neigt die Stange durch irgend einen willkührlich angenommenen Bogen unter die horizontale Stellung; in dieser Lage ziehe ihr der Boussole zunächst liegendes Ende (o) den Südpol der Magnetnadel an. Dieses beweist, dafs besagtes Ende eine nördliche Thätigkeit hat. Er benimmt ihr dieselbe dadurch, dafs er das Ende o relativ erhöht, und durch Streichen mit einem harten Körper behandelt, bis o indifferent geworden. Alsdann führt er den ganzen Stab an den Punkt o herum, so dafs o, welches früher gegen Norden wies, nun gegen Süden zu liegen komme; wobei sorgfältigst vermieden werden mufs, dafs die Stange während der Wendung nicht aus derjenigen Ebene komme, welche die Stange der Länge nach durchschneidet. Fände sich nun, dafs in der neuen Stellung die Stange genau indifferent geblieben wäre, wie sie es in der vorigen war, dann hätte man geradezu den Beweis, dafs man die Stange wirklich in der gesuchten Ebene bewegt hat, auf welche die Richtung der magnetischen Kräfte senkrecht ist. Wenn aber, wie es in den meisten Fällen geschehen wird, die Stange in der umgekehrten Lage nunmehr den Nordpol anzieht und den Südpol abstöfst, dann bringt sie Brugmanns in die erste Lage zurück, senkt sie um 1 — 2 additionelle Grade tiefer, macht sie wiederum indifferent und versucht die zweite Wendung; und so nähert man sich allmählich der Lage, worin die Stange bei der Umwendung indifferent bleibt: auf diese Richtung ist die gesuchte senkrecht.

Brugmanns rühmt diese Methode sehr; er fand sie bei oft wiederholter praktischer Anwendung zuverlässiger, als die Untersuchung mittelst seiner doch nach guten Prinzipien und mit sehr vielem Fleifs verfertigten Neigungsnadel. In der That, die Gröfse der Bogen, welche seine Stange von 3 Fufs beschreibt, erlauben eine viel genauere Lesung, als die Bogen der nothwendig viel kürzeren Neigungsnadel. Die Konstruktion der Neigungsnadel ist von anerkannter Schwierigkeit; aber selbst wenn diese glücklich überwunden wäre, so ist man nie sicher, dafs zwischen der Stahlnadel und der kupfernen Armatur, welche die Axen trägt, sich nicht Rost erzeugt habe.

Von der andern Seite muſs man gestehen, daſs die Brugmannsche Methode höchst abschreckend ist durch die Langwierigkeit der Manipulation. Wie unzählige mal geschieht es nicht, daſs man durch die Reibung, welche bloſs Indifferenz hervorbringen sollte, den entgegengesetzten Pol erregt. Ferner hat man zu befürchten, konsequente Punkte zu erhalten, welches um so leichter ist, da das Reiben der Stange in der Nähe der Boussolnadel geschieht; und endlich erfordert die mechanische Vorrichtung, um eine so grofse Stange mit gleicher Genauigkeit in zwei Ebenen, in der vertikalen und in der auf dieser senkrechten Ebene, unverrückt zu wenden, ein sehr voluminöses an sich sehr wandelbares Gestell, welches mit sich zu führen durchaus keinem Reisenden zuzumuthen ist. Wahrscheinlich sind dieses die Gründe, die der praktischen Einführung der von Brugmanns so sehr empfohlenen Methode im Wege gestanden haben.

Wenn aber, statt das koerzitive Vermögen des weichen Eisens ganz wie der Engländer und wie Konjema zu übersehen, oder es wie Brugmanns als ein bloſs zu beseitigendes und zu tilgendes Hinderniſs zu betrachten, man den Versuch machte, sich vielmehr geradezu an dieses Vermögen zu wenden, um die Art der Beobachtung darauf zu gründen, so würde die Idee einer meines Erachtens ausführbaren und doch eben so sicheren Methode entstehen.

Das Nordende eines in der magnetischen Meridianebene horizontal liegenden Stabes unmagnetischen sehr weichen Eisens ziehe den Südpol der parallel darneben stehenden Boussole um irgend einen gegebenen Bogen an; man senke nun dieses Nordende des Stabes um eine Anzahl Grade, z. B. 20, und führe es zurück in die frühere horizontale Stellung. Der Stab wird nunmehr durch seine Koerzitivkraft einen Theil des höhern Werths der stärkern Einwirkung der tellurischen Kräfte beibehalten haben und den Südpol um eine gewisse Anzahl Grade stärker anziehen. Nun erhöhe man dasselbe Ende des Stabes um eine gleiche Anzahl Grade über den Horizont, und führe ihn wieder in die horizontale Stellung: er wird nun aus derselben Ursache den Südpol der Nadel weniger anziehen. Man bemerke die Differenz beider Anziehungen, und fahre so fort für immer gröfsere Bogen wechselsweise die durch Koerzitivkraft rückständigen Werthe des Erhöhens und Senkens um korrespondirende Grade zu suchen. Die Differenzen dieser Werthe müssen regelmäfsig zunehmen bis zu einem gewissen Grade

der Neigung, über welchen sie nicht mehr wachsen; diese Neigung ist die gesuchte.

Zur Verifikazion, und um Mittelzahlen zu erhalten, bringe man nun den Stab in die senkrechte Lage, und bemerke da die Einwirkung seines untersten Endes auf die daran gehaltene Boussole; nun bewege man die Stange in der Meridianebene um korrespondirende gleiche Bogen von beiden Seiten der senkrechten. Die Differenzen der jedesmaligen in der senkrechten Stellung beobachteten Einwirkungen auf die Nadel werden wachsen bis zu einem gröfsten, von wo an sie nach noch gröfserem Elongationswinkel wiederum abnehmen. Der Neigungswinkel, wo sie am gröfsten geworden, ist das gesuchte, und mufs mit dem vorigen übereinstimmen. Die etwanigen Abweichungen sind schätzbar, indem sie Mittelzahlen geben.

Diese Methode hätte das Vortheilhafte, dafs sie uns der so höchst mühsamen Brugmannschen Korrektion der Konjemaschen Methode durch Indifferenzirung des Stabes überhebt, da sie ganz unabhängig ist von dem Zustande des Stabes vor dem Versuch; weil es nur auf komparative und nicht auf absolute Grade seiner Polarität ankommt; und dafs sie uns in den Stand setzt, die Einwirkung des tellurischen Magnetismus nach den verschiedenen Neigungen an einer in demselben Stande und in derselben Entfernung und Lage gegen den Stab bleibenden Boussole angiebt; welches durchaus nothwendig ist, um vergleichbare Elongationswinkel oder auch Schwingungen von ihr ablesen zu können, und welches nicht statt finden würde, wenn man z. B. den Stab in jeder seiner verschiedenen Neigungen unmittelbar durch Anhalten der Boussole prüfen wollte.

Doch ehe man über die Ausführbarkeit dieser Methode absprechen kann, müfsten vorläufig mehrere Fragen beantwortet werden, welche die Koerzitivkraft des weichen Eisens überhaupt angehen, und deren Beantwortung von so grofsem Interesse ist, dafs die Untersuchung immer noch ein erfreuliches Resultat gewähren würde, wenn sie auch am Ende die Unausführbarkeit der Methode erweisen sollte.

So müfste, um nur einige dieser vorläufigen Fragen zu erwähnen, untersucht werden:

1) Ob wirklich das Koerzitivvermögen des ganz weichen Eisens der Art ist, dafs die rückständigen Werthe der vorhergegangenen stärkeren und schwächeren tellurischen Einwirkungen diesen proportional bleiben, wenn die Stange nach jedem Steigen und jedem

Neigen in dieselbe mittlere Stellung zurückgeführt und erst da geprüft wird.

2) In welchem Verhältnifs steht dieses koerzitive Vermögen für tellurische Einwirkung mit dem bereits vorhandenen dauernden magnetischen Zustande des Stabes? Es wäre daher von ungemeinem Interesse, einem möglichst indifferent gemachten Stabe in der Ebene des magnetischen Meridians eine Richtung zu geben senkrecht auf die der magnetischen Kräfte; ihn dann bis in diese Richtung zu neigen, und nachher in der früheren Stellung den Grad seiner dadurch erhaltenen und durch Koerzitivvermögen beibehaltenen Polarität zu messen: um darauf dem Stabe ganz allmählich zunehmende, durch Schwingungen zu bestimmende Grade von künstlicher Magnetisation beizubringen, und kontinuirlich die korrespondirende progressive Abnahme des Werthes der tellurischen Einwirkung zu suchen, und am Ende den Grad von künstlicher Magnetisation des Stabes zu finden, wo die tellurische Einwirkung keinen wahrnehmbaren Einfluſs mehr auf den Zustand des Stabes haben würde.

3) Steht der Werth der tellurischen Einwirkung in irgend einem Verhältnisse mit ihrer Dauer, oder bleibt hinsichtlich auf Koerzitivkraft der Werth immer derselbe, die Stange mag einen untheilbaren Augenblick oder eine sehr geraume Zeit in der gegebenen Lage geblieben seyn?

Endlich 4) Welche andere Umstände modifiziren den Werth der tellurischen Einwirkung, wie da sind bloſse Bewegung an und für sich, Erschütterung, Reibung, Temperatur, gefärbtes Licht, astronomische Beziehungen u. dgl.?

Eine völlig genügende Beantwortung dieser Fragen würde vor allen Dingen ein eben so feines und genau konstruirtes Instrument erfordern, als dasjenige seyn müſste, wodurch die erwähnte Methode selbst (wenn sie sich als ausführbar bewähren sollte) in Ausübung zu bringen wäre. Die vollkommene Erhaltung der Stange in der Meridianebene während aller ihrer Bewegungen: eine sehr präzise Lesung der verschiedenen Neigungswinkel: eine sehr bewegliche und zuverlässige Boussolnadel an einem Faden hängend, mit möglichst groſsem Limbus, um Theile des Grades ab-

lesen zu können, und endlich mehrere Stangen von verschiedener Länge und alle von demselben weichsten Eisen.

Es geht mir bis jetzt vieles ab von diesen Bedingungen. Ein grofser Apparat, den ich von Holz konstruiren liefs, um eine Stange von 3 Fufs daran zu beobachten, mifsrieth ganz durch die fehlerhafte Ausführung. Die Scheibe, welche die Theilung und den Stab trägt, bewegt sich schlotternd und weicht aus der vertikalen Ebene; und aufserdem fand sich, dafs gegen die Verabredung die Stange von einer solchen an Stahl gränzenden Härte war, dafs sie nur sehr geringe Empfänglichkeit für tellurische Einwirkung zeigte, und das Ganze war für meinen Zweck unbrauchbar.

Zwei andere Stangen, eine von 19½, die andere von 16 Zoll Rheinländisch, waren von besserem Eisen, die erste sogar von sehr vorzüglichem; das messingene Instrument selbst aber ist fehlerhaft. Die Stellung der Axen gab die Vertikalbewegung nicht vollkommen in derselben vertikalen Ebene, und als ich den Axen nachhalf, fand sich, dafs die Pfosten die sie tragen eine falsche Stellung haben, so dafs sie bei Azimuthalwendungen einen Konus beschreiben. Endlich hat die Boussole, die ich anwenden mufste, zu viel Reibung auf den Stift, zu wenig Radius und auch nicht die beste Theilung. Die Resultate, die ich bis jetzt erhielt, haben also nur einen bedingten Werth; die feineren Theile der Untersuchung und die Anwendung der Schwingungsmethode hoffe ich nachträglich liefern zu können, wenn ich im Besitz eines Apparats bin, welcher der Feinheit und der Wichtigkeit dieser Untersuchungen mehr entspricht.

Im Allgemeinen bemerke ich nur, dafs die Koerzitivkraft des weichen Eisens wirklich das leistet, was die Methode von ihr verlangt, so dafs nur von der Quantität des Geleisteten die Rede noch seyn kann.

Die Stange von 16 Zoll Länge, $\frac{3}{5}$ Zoll Breite und $\frac{1}{8}$ Zoll Dicke war möglichst indifferent gemacht worden, und in der Ebene des magnetischen Meridians in einer Erhöhung ihres nach Norden weisenden Endes von 20° über die Horizontale gebracht, also sehr nahe senkrecht über die Richtung den magnetischen Kräfte hiesigen Orts. Die Scheibe, welche die Grade der zu gebenden Neigungen und Erhöhungen mifst, stellte ich so, dafs ihr Nullpunkt an die so gerichtete Stange kam, und dafs folglich der Neigungsgrad 90 gleich ist einer Neigung von 70°. Das Ende des Stabes reichte bis gegen den Stift einer daneben stehenden Boussole, deren Nadel ohne Einwirkung des Stabes im Meridian und folglich parallel mit dem Stabe sich

richtete in der Entfernung von etwas mehr als der Radius der Boussole. Nun würde das nach Norden zeigende Ende des Stabes

um 20 Grad geneigt, dann zurückgeführt in die vorige Stellung;
es stiefs den Nordpol der Boussole ab um 13°
um 20 Grad erhöht, und zurückgeführt in die vorige Stellung; } Diff. 2½.
es stiefs den Nordpol der Boussole ab um 10°

um 30°	geneigt, dann zurückgeführt u. s. w.	. .	15°	Diff. 4.
— —	erhöht — —	. . .	9°	
um 40°	geneigt — —	. . .	14°	Diff. 6.
— —	erhöht — —	. . .	8°	
um 50°	geneigt — —	. . .	14½°	Diff. 7.
— —	erhöht — —	. . .	7½°	
um 60°	geneigt — —	. . .	15°	Diff. 8.
— —	erhöht — —	. . .	7°	
um 70°	geneigt — —	. . .	15½°	Diff. 9.
— —	erhöht — —	. . .	6½°	
um 80°	geneigt — —	. . .	16°	Diff. 9½.
— —	erhöht — —	. . .	6½°	
um 90°	geneigt — —	. . .	16°	Diff. 10.
— —	erhöht — —	. . .	6°	

Wir sehen zuerst an diesem Beispiele, dafs die Differenzen der Polarität durch Koercitivkraft wirklich zunehmen bis zu der Neigung 70° unter dem Horizont, von wo aus sie wiederum abnehmen. Die Progression dieser Zunahme ist 2½, 4, 6, 7, 8, 9, 9½, 10. Oder eigentlich, wenn wir bei diesen an sich sehr kleinen Bogen den Werth dieser Bogen als den ihrer Sinus betrachten, und die magnetische Abstofsung als unter dem Gesetze des umgekehrten, den Quadraten in Entfernung stehend uns denken, so ist die Progression wie die Zahlen 59, 88, 132, 154, 176, 188, 214, 220. Die mathematischen Verhältnisse dieser Zahlen zu den korrespondirenden Neigungswinkeln der Stange aufzusuchen, wäre vor der Hand vergeblich, weil aus den oben erwähnten Gründen die Beobachtung noch nicht als ge-

hörig genau betrachtet werden kann. Ein Umstand aber, der sogleich auffallend wird und woraus man geradezu auf die Unausführbarkeit der Methode schliefsen würde, ist der überaus geringe Unterschied der Differenzen für die letzten Grade, auf welche es doch ankommt, sogar wenn man sie wie hier von 10 zu 10 Graden nimmt. Ohne einige Vorliebe für die vorgeschlagene Methode mufs ich doch Folgendes bemerken.

1) Zu den Versuchen, wovon ich einen hier als Beispiel ausgehoben, konnte ich nur die kürzeste Stange von 15 Zoll anwenden, die obendrein nicht von sehr weichem Eisen ist. Die bessere und längere von 19½ Zoll kann ich wegen der Dimensionen des Gestelles nicht bis 90°, sondern nur bis auf 40° Neigung und Erhöhung über und unter den mittleren Stand vergleichen. Zum Beweis aber, dafs eine gröfsere Stange von besserem Eisen viel gröfsere Differenzen, und folglich mehr Sicherheit, gewähren würde, dienen schon die Angaben dieser Stange von 19½ Zoll. So weit ich sie nämlich wegen der Konstruktion des Instruments komparativ neigen und erhöhen konnte, waren sie

um 20 Grad	geneigt und zurückgeführt, Nordpol abstofsend				27°	Diff. 4.
	erhöht	—	—	.	23°	
um 30 Grad	geneigt	—	—	.	28°	Diff. 7½.
	erhöht	—	—	.	20½°	
um 40 Grad	geneigt	—	—	.	28½°	Diff. 10.
	erhöht	—	—	.	18½°	

Hier sind bei einer nur 3½ Zoll gröfseren Länge die Veränderungen des Standes der Boussole bereits schon viel beträchtlicher; schon bei 40° ist der Untersohied eben so grofs, wie er bei dem ersten Stabe für den Winkel 90 war. Da nun aber zu einem heterodromisch bewegten Stab von 3 Fufs Länge ein bequemerer und sichrerer Mechanismus nicht volumineuser zu seyn brauchte, als eine gewöhnliche Neigungsboussole, indem man bei dem Nichtgebrauch den Stab abnehmen und für sich transportiren kann, so läfst sich wegen der Kleinheit der obigen Differenzen noch nicht peremtorisch absprechen gegen die praktische Ausführbarkeit der Methode.

2) Der

2) Der Stand der Boussole war ferner in den angeführten Versuchen nicht günstig, um die gröfstmöglichen Elongationen zu erhalten. Denn der Mittelpunkt der Kräfte des Stabes korrespondirte beinahe dem Mittelpunkte der Nadel, um welchen sie sich auf dem Stifte wendet. Viel gröfser würden die jedesmaligen Elongationen ausfallen, wenn die Mittelpunkte der Kräfte, sowohl des Stabes als der Nadel, gerade gegenüber zu stehen kämen.

3) Ferner hatte meine Nadel nur 4 Zoll Radius und bewegte sich auf einem Stifte. Dafs eine längere an einem Faden hängende bedeutend gröfsere Differenzen angiebt, weifs ich aus Erfahrung, und versteht sich ohne diese; und endlich würde nichts hindern, beiden Endspitzen der Nadel einen sehr leichten am besten nicht metallischen Bogen als Nonius zuzugeben.

Folgende Ansichten, die ich vorläufig mittelst meines etwas unzuverlässigen Apparats abgewann, erwähne ich ebenfalls nur, so zu sagen, interimistisch, um in einer so wichtigen Sache nicht durch Fehler der Instrmente der Wahrheit etwas in den Weg zu legen.

I. Innerhalb gewisser Gränzen scheint eine bereits bestehende Polarisation des Stabes den erwähnten Erfolg des tellurischen Magnetismus und der Koerzitivkraft nicht zu stören, wenn beide Pole des Stabes sich in ihrem eigenthümlichen Azimuth bewegen. D. h. die Differenzen zwischen Heben und Neigen um gleiche Grade befolgen dieselbe Progression, wenn nur das nördlich bethätigte Ende nach Norden, das südliche nach Süden gerichtet ist. Wo aber diese Gränze liegt, mufs erst gesucht werden, oder ob es überhaupt eine solche wirklich giebt. Die Frage wäre eigentlich so zu stellen: Das Gleichgewicht der Thätigkeiten eines körperlichen Magnets als eines Faszikels von einfachen linearen magnetisch polarisirenden Urfibern besteht darin, dafs ein bedeutender Antheil der Thätigkeiten, die in jeder einzelnen Urfiber differenzirt waren, wieder in denselben gebundenen und neutralen Zustand zurücktreten, in welchem sie im Eisen waren. *Il se recompose du fluide naturel*, nach dem anschaulich bildlichen Ausdruck des französischen Physikers, dem die Physik des Magnets so viel verdankt. Es frägt sich nun, ob dieser Antheil neutralisirter Thätigkeiten (dieses *fluide naturel*) im Magnetstabe eben so

wie im unmagnetischen Eisen durch die tellurischen Kräfte affizirt wird, oder bei welchem Grade der Polarität, vom Minimum an gerechnet bis zur Sättigung, dieser Erfolg aufhört.

II. Wenn die Pole eines innerhalb gewissen Gränzen polarisirten Stabes widersinnig im Meridian liegen, und dann um die Aequatorial-Neigungsrichtung wechselseitig um gleiche Grade erhöht und geneigt werden, dann verändert sich der Werth jedes Pols in zwei alternirenden Progressionen bis zu einem gewissen Grad, wo ferneres Steigen oder Sinken keinen durch die Koerzitivkraft wahrnehmbaren Unterschied mehr gestattet; und zwar wird dieser konstante Zustand sehr bald erreicht.

Beispiel. Ein Stab von sehr weichem Eisen mit ziemlich starker Polarität wurde widersinnig im Meridian gelegt, und zwar in horizontaler Richtung.

Sein nach Norden weisendes Ende zog den Nordpol an um 41 Grad, geneigt bis 70° unter den Horizont, und zurückgeführt zur Horizontalen zog er ihn nur noch um . . . . . 24 (Diff. — 17.)
erhöht um 70 und zurückgeführt zur Horizontal. zog an 34 (Diff. + 10.)
geneigt um 70 . . . . . 30 (Diff. — 4.)
erhöht um 70 . . . . . 38 (Diff. + 8.)
geneigt um 70 . . . . . 35 (Diff. — 3.)
erhöht um 70 . . . . . 35 (Diff. 0.)

Also für Neigungen 17, 4, 3, 0, Verminderungen der südl. Kraft.
Für Erhöhungen 10, 8, 0, Vermehrungen der südl. Kraft.
Stationaire Zustand 35. Verlust 6.

Dafs die letzterwähnte Klasse von Beobachtungen geeignet ist, zur Lösung des eben erwähnten Problems beizutragen, ist augenscheinlich; aber gerade hier stöfst man auf die gröfsten Anomalien, so wie z. B. der Werth von 38° Elongation im vorigen Versuche schon eine solche zu seyn scheint. Es kommt alles darauf an, für die künstlichen Elongationen des Stabes jenseits und diesseits der Aequatorial-Neigungsrichtung einen Mechanismus zu finden, der den Bedingungen der Beobachtung entspräche, und der Sicherheit eines Kreis- oder Passage-Instruments nahe käme.

Dafs die Koerzitivkraft des Eisens für einen gegebenen Grad tellurischer Einwirkung nicht durch die Dauer dieser Einwirkung zunehme, scheint

mir jetzt ausgemacht, so sehr auch gewisse andere Erscheinungen das Gegentheil zu fordern scheinen.

Ich brachte das Nordende des Stabes in die Neigung von 70 Grad, und bemerkte genau, um wieviel Grade es die Südspitze der parallel daneben gestellten Boussolnadel aus der Meridianstellung abgelenkt hatte. Nach mehreren Tagen fand ich die Boussolnadel in derselben Stellung, ohne die mindeste Zunahme von Polarität des Stabes. Liefs ich nachher das beobachtete Ende durch einen halben Kreis steigen und führte es sogleich wieder in die vorige Neigung von 70°, so kam augenblicklich die Boussolnadel in dieselbe frühere Lage zurück, obgleich sie doch während der Umdrehung in den Halbkreis ihre magnetische Verhältnisse kontinuirlich und sehr bedeutend geändert hatten.

Und eben so habe ich nie den mindesten Unterschied des durch Koerzitivkraft zurückgebliebenen Werthes einer eben vorhergegangenen tellurischen Einwirkung finden können, wenn ich absichtlich den Stab mit der gröfstmöglichen Schnelligkeit auf und nieder führte, so dafs er in der gegebenen äufsersten Neigung nur einen untheilbaren Augenblick verblieb, oder vielmehr nur durch diese Lage gleichsam durchging. Die durch Koerzitivkraft beibehaltene Polarität war immer dieselbe, als nach einem auch noch so langen Beharren in der nämlichen Neigung.

Ich habe oft eine Magnetnadel Monate lang vor dem einen Ende eines senkrecht stehenden Stabes von weichem Eisen stehen lassen, und nie wahrgenommen, dafs der Winkel, um welchen sie aus der Meridianstellung durch die tellurisch affizirte Stange abgestofsen war, auch im mindesten zugenommen hätte. Es versteht sich, dafs ich zu diesem Versuche, wie zu allen bis jetzt erwähnten, sehr leichte und kurze Nadeln wählte, deren Masse gegen die des Stabes so äufserst gering war, dafs eine Reaktion derselben auf den Zustand der Stange nicht zu fürchten war.

Hiemit streitet nun die Erklärung, die man gewöhnlich giebt von der Erzeugung eines dauernden Magnetismus in Eisenstangen, die lange unverrückt in einer senkrechten Stellung verbleiben. Die bloſse Dauer der tellurischen Einwirkung scheint mir aber nicht geeignet, das Phänomen zu erklären. Denn da mehrere Tage, Wochen, ja Monate keinen wahrnehmbar gröfseren Effekt hervorbrachten, als ein augenblicklich vorübergehender Durchgang durch eine gegebene Neigungslage, so ist nicht abzusehen, wie selbst einige Jahrhunderte eine so ungeheure Veränderung hervorbringen

sollten, als da ist die Verwandelung einer ursprünglichen indifferenten Stange in einen Magnet, der mehrere Pfunde Eisen zu tragen vermag, wovon die Beispiele vorhanden sind. Nicht die bloßen Dauer an sich, sondern die anderweitigen Wirkungen, womit diese Dauer angefüllt war, scheinen daher den Grund dieser Erscheinung zu enthalten; und wenn die auf Thürmen oder auch auf ebener Erde (denn auch hiervon hat man Beispiele) senkrecht aufgestellten Stangen die besagten Zunahmen ihrer magnetischen Koerzion zeigten, so war es wohl nur, weil sie nicht wie die unserer Versuche gegen dergleichen Nebenwirkungen möglichst geschützt waren.

Es wäre zu wünschen, daſs über den etwanigen Einfluſs der Dauer magnetischer Wirkungen auch in andern Fällen Untersuchungen angestellt würden. Coulomb hat die wissenschaftliche Grundlage einer Theorie der magnetischen Vertheilung gelegt, in seinem normalen Versuch über den wechselseitigen Einfluſs von sechszehn Blechen, deren Kräfte er maſs, sowohl einzeln als in Gruppen von 2, 4, 6 etc., und dann wiederum vereinzelt und auseinander genommen. Diese herrliche Arbeit läſst nichts zu wünschen, als etwa eine komparative Schätzung der Polaritätsverhältnisse, nach einer momentanen Berührung und nach einer sehr lange fortgesetzten. Aller Wahrscheinlichkeit nach würde auch hier die Dauer an sich keinen Unterschied in dem Erfolge bedingen.

Daſs die bloſse Bewegung an und für sich einen Einfluſs auf die Art der Polarität eines Stabes übe, behauptet Brugmanns in folgender mir stets sehr dunkel gebliebenen Stelle *). Brugmanns sagt: „Ich hob den eisernen Stab AC, der vorhin ganz unmagnetisch war, geschwind in die Höhe, als wenn ich ihn wider einen Körper mit Gewalt stoſsen wollte, und es zeigte sich bald am untern Ende der Südpol und am andern der Nordpol. Wie ich hierauf den Stab umkehrte, und nach unten zu bewegte, als wenn ich ihn wider den Boden werfen wollte, so wurden die Pole, nachdem ich dies einigemal wiederholt hatte, verwechselt, und am untern Ende kam der Nordpol, so wie am obern der Südpol zum Vorschein.“ Wenn nicht irgend ein Fehler des Uebersetzers den Sinn entstellt, oder irgend ein Mangel in der Beobachtung den sonst so genauen Physiker irre führte, so hätten wir in dieser Thatsache etwas sehr paradoxes und auſser allen Analogien liegendes. Daſs der magnetische Zustand geändert wird

*) Brugmanns l. c. S. 219.

durch eine kurze und rasch gehemmte Bewegung, selbst ohne eigentlich sogenannten Stofs, ist wohl begreiflich; denn an sich kann die sehr plötzliche Hemmung der Stange in ihrer Bewegung nicht statt finden, ohne eine innere Erschütterung ihrer Theile, da diese Theile sich sogar durch die Trägheit von einander losreifsen würden, wenn die Kohäsion minder stark wäre. Dafs aber die senkrecht steigende Bewegung am unteren Ende eine andere Polarität erzeugen sollte, als die senkrecht fallende, dieses schien mir von jeher unbegreiflich; denn wahrlich, man müfste einen grofsen Theil der uns bekannten Thatsachen über den Magnetismus vergessen, um noch mit Aepinus einiges Genügende in der Vorstellung zu finden, dafs südliche Polarität mit dem — E und nördliche mit dem + E im Franklinischen Sinne zu vergleichen geschickt sei. Wollte man aber diese hypothetische Ansicht gelten lassen, dann brauchte man allerdings nur noch der magnetischen Flüssigkeit im Eisen einen gewissen Grad von Trägheit anzudichten, um gewissermafsen einzusehen, dafs die Folge der plötzlich gehemmten steigenden Bewegung eine quantitative Verminderung der Flüssigkeit im unteren Ende sei, und dafs umgekehrt eine eben so plötzlich gehemmte Bewegung von oben nach unten die magnetische Flüssigkeit im unteren Ende anhäufen werde. Doch fühlt ein Jeder die Dürftigkeit dieser Hypothesen. Auch gelang es mir nie, diesen Unterschied wahrzunehmen, so oft ich auch die entgegengesetzten Bewegungen aus freier Hand versuchte. Wenn aber die Bewegung an sich einen solchen Einfluss hätte auf die Polarisation des Stabes, so müfste derselbe Stab einen anderen Grad von Polarität erhalten, wenn man ihn heterodromisch um den Mittelpunkt seiner Länge wendet, als wenn man ihn in derselben Meridian-Ebene und um einen gleichen Bogen homodromisch, das heifst um einen seiner Endpunkte bewegt. Denn in dem letzten Falle ist in der einen Hälfte des Stabes viel weniger Bewegung als in der andern, während beim gleicharmigen heterodromischen alles gleich ist in zwei korrespondirenden Punkten beider Hälften. Aus der möglichst genauen Vergleichung beider Arten der Bewegung, sowohl bei langsamer als bei sehr schneller Bewegung des Stabes, ergab sich aber, dafs ein gegebenes Ende des Stabes ganz gleiche Polarität erhielt, und ganz gleiche Antheile davon durch Koerzitivkraft behält, der Stab mag homodromisch oder heterodromisch im Meridian, mit welcher Geschwindigkeit man will, bewegt werden. Wenn daher eine Methode die Richtung der magnetischen Kräfte mittelst der Koerzitivkraft des weichen unmagnetischen Ei-

sens zu finden in Ausübung kommen sollte, so könnte man ohne Bedenken den Stab heterodromisch bewegen; die erzeugte Polarität, die in jeder andern Hinsicht dieselbe seyn mufs, als bei der homodromisch bewegten, würde es auch bleiben, ohngeachtet in diesem letzten Falle das eine Ende des Systems das Maximum der Bewegung hat, und das entgegengesetzte in Ruhe bleibt. Die Vortheile der heterodromischen Bewegung sind eine viel kleinere Dimension des Werkzeugs, bei gleicher Länge und gleicher Polarität des Stabes, und auch der wichtige Umstand, dafs die Stange in jeder Lage von selbst im Gleichgewicht ruht. Zwar werden die Neigungsbogen um die Hälfte kleiner, aber man erhält dafür eine doppelte Lesung, und mit Hülfe des Nonius läfst sich ein sehr hoher Grad von Genauigkeit erhalten, so dafs nichts zu wünschen übrig bliebe, wenn die Lesung an der Boussole eine nur entfernt ähnliche Genauigkeit gewähren möchte, welches jedoch bei einer längeren an einem Faden hängenden Nadel und mittelst eines an jedem Ende angebrachten sehr leichten Bogens mit Nonius zu erzielen wäre.

Was die mechanische Erschütterung vermag, um den Einfluss des tellurischen Magnetismus zu begünstigen, ist bekannt genug, und man weifs längst, dafs die so auffallenden Wirkungen des Stofsens, Bohrens, Feilens nur in Beziehung auf die Meridianstellung des so behandelten Eisens eintreten, gerade wie die elektrischen Entladungen, die ich im magnetischen Aequator sowohl bei Stahl als bei Nickel völlig unwirksam fand, mit Ausnahme der geringen magnetischen Polarität, die an den beiden Längenflächen oft deutlich genug erzeugt werden, und deren Nichtbeachtung zu falschen Resultaten Gelegenheit gaben. Dafs aber schon die sehr zarte Reibung eines weichen Körpers unerwartet stark den tellurischen Magnetismus begünstigen könne bei sehr weichem Eisen, hatte ich Gelegenheit wahrzunehmen, als ich mich vor mehreren Jahren mit den Beobachtungen des rühmlich bekannten Physikers, Herrn Professor Heller, beschäftigte, der durch vieljährige Beobachtungen gefunden haben wollte, dafs ein senkrecht stehender Stab weichen Eisens eine von der Stellung des Mondes in den Syzygien oder Quadraturen abhängige periodische Veränderung erleidet. Er hat eine eigene Vorrichtung, um einen solchen Stab vor die Nordspitze einer Boussole durch senkrechtes Ausziehen des Stabes aus einer Nuthe vorbeizuführen, und bemerkt den Punkt des Stabes, bei welchem der Nordpol der Boussole vom Stabe abgeht. Die ganze Strecke, welche den Nordpol

noch anzieht, nennt er Südpollänge, und diese findet er veränderlich, und zwar so, dafs jeden Monat die Südpollänge kurz vor und nach einem neuen Mondstande am gröfsten, in dem Uebergange eines Mondstandes zum andern am kleinsten wird. Dieses soll ein anderer Beobachter an einem ähnlichen Instrumente bewährt gefunden haben; und Ritter hatte nach Mittheilung einer halbjährigen Reihe von Beobachtungen darüber berichtet und Resultate gezogen.

Da ich von dem ersten Urheber dieser Klasse von Beobachtungen unmittelbar eingeladen wurde, mich mit denselben zu beschäftigen, so unterzog ich mich dieser Pflicht. Mein Instrument ist auf das genaueste nach seiner Angabe konstruirt, bis auf einen Unterschied, den ich sogleich weiter unten berühren werde.

Herr Heller empfiehlt vier Reihen von Beobachtungen, die aber im Wesentlichen auf die zwei folgenden zurückzuführen sind: 1) Der senkrechte Stab steht genau im magnetischen Meridian, südlich hinter der im Meridian gerichteten Boussolnadel, nur dafs durch die Anziehung des durch ihre senkrechte Stellung südlich gewordenen oberen Endes des Stabes der Nordpol der Nadel gegen dieses Ende steht, und folglich die Nadel vollkommen umgekehrt ist.

Oder 2) Der Stab steht so hinsichtlich auf die Boussolnadel, dafs er dem Mittelpunkte derselben gerade gegenüber liegt in einer Linie, die 90° macht mit dem magnetischen Meridian, und da der Nordpol der Nadel angezogen ward vom obersten Ende des Stabes, so steht die Boussolnadel senkrecht auf den Meridian.

Nun sucht man in diesen beiden Stellungen durch Ausziehung des Stabes aus seiner Nuthe den Punkt in der Länge desselben, wo der Nordpol der Nadel von dem Stabe abgeht, um wiederum nach Norden zu weisen.

Man nennt diese Strecke des Stabes, die man jedesmal herausziehen mufs bis zur Wendung der Nadel, die Südpollänge, als diejenige, welche wirklich die südliche Thätigkeit ausübt. Diese nun soll sich veränderlich ergeben, und zwar nach den erwähnten astronomischen Bedingungen.

Zuvörderst bemerkt Herr Heller, dafs in der ersten Stellung die Nadel sich unmittelbar ganz umwendet, sobald sie einem gewissen Punkte gegenüber zu stehen kommt; weshalb er für diese Reihe von Beobachtungen diesen Punkt und die korrespondiren Länge des ausgezo-

genen Stabes als die wahre Südpollänge aufschreibt. In der zweiten hingegen bleibe die Nadel nach der Entfernung ihres Nordpols einige Zeit stehen, ehe sich der Südpol an den Stab begiebt; für diesen Fall schreibt er beide Punkte auf, unter der Benennung Südpollänge und Nordpollänge. Aber in beiden Fällen sollen die erwähnten Längen veränderlich seyn, obgleich in der ersten Stellung viel merklicher und auffallender, als in der zweiten.

Was nun die erste Stellung betrifft, so ist es leicht einzusehen, dafs sie gar nicht geeignet ist, Unterschiede in der Südpollänge mit Sicherheit anzugeben, wenn auch wirklich dergleichen da wären. Das Abgehen der Nordspitze von der unteren nördlichen Strecke des Stabes hängt von zu viel Zufälligkeiten ab. Denn so lange die Nadel vollkommen ruhig bleibt, so wirkt sowohl die abstofsende Kraft des Stabes, als die dirigirende Kraft des Erdpols, parallel mit der Längendimension der Nadel, und die eigentliche Wirkung des Stabes ist nur die Nadel in der Richtung des Meridians von sich ab gegen ihren Stift anzudrücken. Die mindeste zufällige Erschütterung der Nadel bringt sie aber in eine Richtung, wo die abstofsende Kraft des Stabes nicht mehr parallel mit ihr wirkt, und folglich die Nadel viel mehr zur Bewegung durch einen Bogen sollizitirt, worauf sogleich die totale Umdrehung der Nadel folgen mufs, weil in demselben Moment die dirigirende Kraft ebenfalls aufhört parallel mit der Nadel zu wirken. Es giebt aber einen andern noch viel wichtigeren Umstand, der die etwanigen zufälligen Oszillationen der Nadel in dieser Stellung entscheidender macht. Wenn nämlich durch Ausziehen der Stange ihre nördliche Strecke vor die Nadel geführt wurde, und anfängt sie abzustofsen, so wirkt noch die darüber stehende südliche Strecke um sie zurückzuhalten, und die Nadel geht eigentlich nur dann ab, wenn diese Anziehung geringer geworden ist als die Abstofsung des unteren nördlichen Theils. Die mindeste zufällige Schwankung der Nadel entfernt sie nun von den zwei erwähnten Anziehungs- und Abstofsungspunkten; aber der Erfolg dieser Elongation ist für beide Kräfte sehr verschieden. Die ungünstigere Richtung der entfernteren anziehenden Kraft, die eigentlich nur hebend nach oben wirkt, wird dadurch viel weniger geändert, als die Richtung der abstofsenden, deren Mittelpunkt näher liegt, und die durch dieselbe geringe Elongation sogleich verhältnifsmäfsig viel mehr Senkrechtheit gewinnt, in dem Sinne wo die Bewegung erfolgen kann, weshalb auch die Abstofsung sogleich erfolgt. Den Beweis, dafs die auf diesem Wege herausgebrachten Südpollängen einer sehr grofsen Zufälligkeit

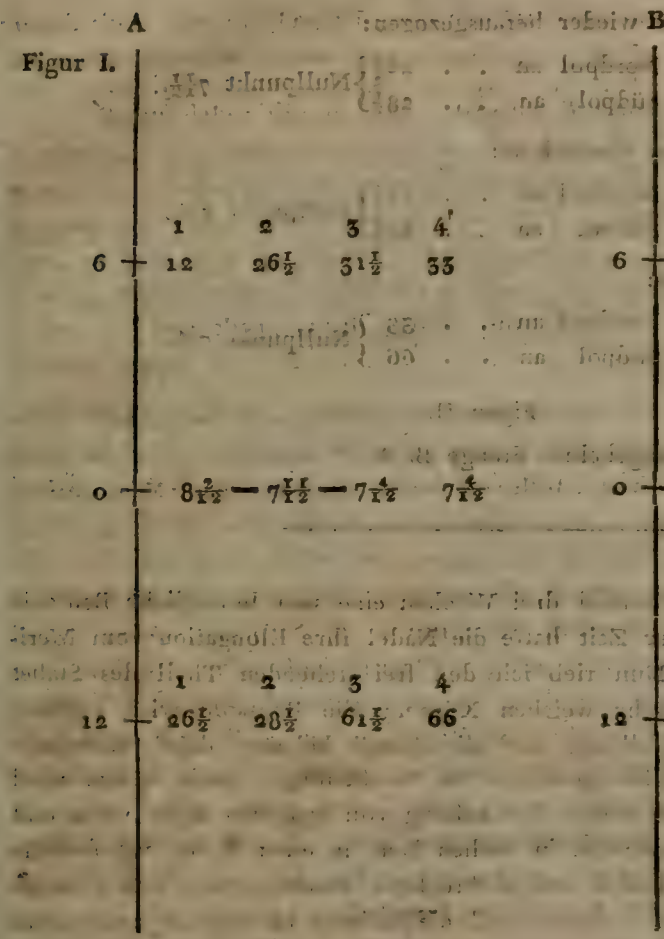
ligkeit unterworfen sind, erhält man leicht, wenn man die Nadel, nachdem sie zuerst von selbst vom Stabe abgegangen ist, sehr behutsam vor ihn zurückführt und in gröfster Ruhe erhält; alsdann bleibt sie fast jedesmal vor dem Stabe. Zieht man nun den Stab um einen Zoll z. B. heraus mit gehöriger Vorsicht, so geht die Nadel wieder ab, kann aber durch dasselbe Mittel wieder herangebracht werden, und oft gelingt dasselbe ein drittesmal, wodurch also scheinbare Unterschiede in der Südpollänge entstehen, die oft an 2½ Zoll betragen, und doch nur von aufserwesentlichen Umständen herrühren. Gerade dasselbe findet statt, wenn man mehreremal hinter einander die Südpollänge durch das bloſse Abgehn des Nordpols bestimmt: denn obgleich dieses Ausziehen fast in demselben Augenblick wiederholt ward, so wird man doch oft Unterschiede von fast 5 Zoll finden. Auffallend ist auf den ersten Augenblick die Erscheinung, dafs, wenn ein gewisser Punkt der südlichen Strecke des Stabes vor der Boussole zu stehen kommt, die Nadel in vier ganz verschiedenen Stellungen zur Ruhe kommen kann. Einmal mit der nördlichen Spitze gegen den sie anziehenden Punkt südlicher Thätigkeit am Stabe; dann ebenfalls im Meridian, aber mit ihrer Nordspitze gegen Norden; dann 50 bis 55 Grad östlich davon; und endlich um eben so viel Grade westlich: doch ist dieses Spiel der Kräfte leicht zu entziffern.

Betrachtet man diese durch ein so schwankendes Gleichgewicht der Kräfte bedingte Erfolge, und bedenkt man, dafs Herr Haller kein anderes Prüfungsmittel des Zustandes seines Stabes hat, als eine sehr kleine ganz frei stehende Nadel, deren Stift auf dem obersten Theil eines sehr hohen hölzernen Gestells angebracht ist, aus dessen Nuthe so eben ein gedrängt darin passender Stab ausgezogen wird, so mufs man gestehen, dafs unter den erwähnten Umständen das jedesmalige Abgehen einer solchen Nadel und die daraus geschlossenen Variationen der Pollängen des Stabes mit ungemein vieler Zufälligkeit behaftet sind, und so fand ich sie auch wirklich, ohne jedoch irgend eine Beziehung auf den Mond wahrnehmen zu können.

Aus diesen Gründen, und um nichts in dieser Sache unversucht zu lassen, hielt ich mich an die zweite Klasse von Beobachtungen, jedoch mit Anwendung einer Boussole, die uns in den Stand setzt, die Polarität jedes

Punktes des Stabes mittelst der Elongationsbogen der Boussole, zwar nicht genau zu messen, aber doch approximativ zu bestimmen. Der Nullpunkt der Thätigkeiten aber wird hierdurch ganz genau angegeben für den Punkt des Stabes, vor welchem die Boussole im Meridian einspielt. Ich gestehe, erwartet zu haben, dafs bei dieser Prüfungsart der Stab sich unverändert zeigen würde, in Hinsicht sowohl der Nullpunkts, als des Werthes der tellurisch erregten Polarität jedes andern Punktes nach oben und unten. Dieses aber traf bei weitem nicht ein, und es traten oft sehr bedeutende Abweichungen von dieser Gleichförmigkeit des Zustandes ein, die ich eine geraume Zeit täglich, wie mir anbefohlen war, aufschrieb, denen ich aber durchaus keine Uebereinstimmung mit den Mondsbrüchen abgewinnen konnte. Eingetretene Umstände brachten mich von diesen langweiligen und zu keinem Resultat führendrn Tabellen ab, mit der Ueberzeugung, es herrsche hier eine Täuschung, die auf einem andern Wege sich wohl ergeben würde. Als ich vor einiger Zeit wieder an diesen Gegenstand ging, änderte ich die Methode der Beobachtungen dahin, dafs ich den Stab ganz frei um seine Axen sich bewegen liefs; und da er so keine Aenderung der Polarität durch die blofse Dauer der Zeit an seinen Endpunkten wahrnehmen liefs, so folgte nothwendig daraus, dafs auch die Polarlänge und die ganze Vertheilung der magnetischen Thätigkeit unverändert blieben, wenigstens so weit die Genauigkeit meiner Beobachtungen reicht. Der Stab wurde nun wieder in den Hellerschen Apparat gebracht, nicht mehr, um ihn vorschriftsmäfsig nur einmal des Tages zu beobachten, sondern um frei und kritisch damit umzugehen, und nun fand sich bald, dafs nicht der Mond, sondern ein ganz kleiner Streifen Tuch, eine Linie breit, es war, der die paradoxe Erscheinungen bewirkte. Dieser Streifen ist am Gestell vor der eisernen Stange angebracht, um sie vor dem Schlottern beim Herausziehen zu bewahren, und um dazu beizutragen, sie in jeder Stellung zu erhalten. Diese ungemein geringe Reibung ist hinlänglich, den Einfluss des tellurischen Magnetismus auf einen senkrechten Stab sehr weichen Eisens auf folgende Weise zu modifiziren.

Siehe Figur I. und II.



Figur I.

Figur II.

1 2 3
6 27 34 36
0 $9\frac{23}{24}$ $9\frac{3}{4}$ $8\frac{9}{12}$
1 2 3
12 $25\frac{1}{2}$ $28\frac{1}{2}$ 31

Figur I.

Länge des Stabes 18 Theile, und jeder Theil in 12.

Ich beobachtete die Punkte 6 und 12 als das oberste und unterste Drittheil.

Stellung A. B.

1) Der Punkt 6 zog den Nordpol an um 12
Der Punkt 12 zog den Südpol an um $26\frac{1}{2}$
} der Nullpunkt bei $8\frac{2}{12}$.

hereingestofsen, und wieder herausgezogen:

2)	6	Nordpol an . .	$26\frac{1}{2}$	Nullpunkt	$7\frac{11}{12}$.
	12	Südpol an . .	$28\frac{1}{2}$		

dasselbe unmittelbar wiederholt:

3)	6	Nordpol an . .	$31\frac{1}{2}$	Nullpunkt	$7\frac{1}{12}$.
	12	Südpol an . .	$61\frac{1}{2}$		

dasselbe wiederholt:

4)	6	Nordpol an . .	33	Nullpunkt	$7\frac{1}{12}$.
	12	Südpol an . .	66		

Figur II.

Dasselbe für die umgekehrte Stange B. A.

Ich liefs einst während drei Wochen eine sehr bewegliche Boussole vor dem Stab; in dieser Zeit hatte die Nadel ihre Elongation vom Meridian nicht geändert. Nun rieb ich den frei stehenden Theil des Stabes ganz sanft mit einem sehr weichen Körper; die Boussole wich sogleich um 5 Grad aus ihrer Stellung, und die Stange beharrte durch Koerzitivkraft in diesem neuen Gleichgewichte der Vertheilung. Nach diesem wird mir begreiflich, wie eine Stange, die zufällig von weichem Eisen war, und auf eine Thurmspitze senkrecht zu stehen kam, in einer Höhe, wo fast nie Windstille ist, durch beinah ununterbrochene Erschütterung und Schwingung ihrer inneren Theile, worauf doch die Reibung hinausläuft, nach einem oder mehreren Jahrhunderten ihren magnetischen Zustand bedeutend verändern mufs.

Dafs man noch nicht versucht hat, den Stahlstäben während der magnetisirenden Behandlung durch gehörig angebrachte Zitterung und Schwingungen ihres Innern zu Hülfe zu kommen, ist auffallend. Vielleicht liefse sich etwas Bedeutendes auf diesem Wege leisten. Denn dafs durch die jetzigen Methoden die magnetisirten Stäbe bereits mehr Polarität erhalten, als sie nach der Behandlung erhalten können, ist kein Ein-

würf, weil eben die Frage ist, ob die Erschütterung nicht das Koerzitivvermögen modifiziren würde.

Wenn daher die in Rede stehende Methode, die Neigung zu bestimmen, einer Ausführung fähig ist, so muſs das Instrument so konstruirt seyn, daſs die Stange nicht unmittelbar berührt wird, wenn man sie in Bewegung zu setzen hat; sondern dies muſs geschehen mittelst eines Trägers, an dem auch die Nonius anzubringen sind. Denn obgleich nur sehr weiches Eisen so empfindlich für Reibung ist, so ist dieser Umstand hier nicht zu übersehen, weil gerade ein solches Eisen allein zu diesem Zwecke taugt.

Belangend den Einfluſs der Temperatur auf tellurische Polarisation, hätte ich mir vorzüglich ein sehr genaues Instrument gewünscht, um den etwanigen Unterschied seiner Ansagen selbst innerhalb der Gränzen, die in der Atmosphäre statt finden, wahrnehmen zu können. Dieser Gegenstand ist zwar hinsichtlich auf eine etwanige Ausübung der in Vorschlag gebrachten Methode von keiner Wichtigkeit, da es bei derselben nicht auf absolute, sondern nur auf relative Grade der Polarität ankommt, und die zusammengehörigen Grade jedesmal in einem so kurzen Zeitraume beobachtet werden, daſs auf keine Veränderung der Temperatur des Stabes Rücksicht zu nehmen ist; aber um so wichtiger erscheint der Gegenstand in seinen allgemeinen Beziehungen auf die Physik des Magneten, und namentlich auf die noch immer nicht widerlegte Cantonsche Ansicht der täglichen Abweichung, und auf die Morechinischen Behauptungen. Ich begnüge mich, einige Erfolge begonnener Untersuchungen vorläufig zu erwähnen, in der Hoffnung, bei einer andern Gelegenheit mich gründlicher einlassen zu können.

Daſs die Erhöhung der Temperatur die tellurisch bedingte Polarität des Stabes ändern würde, war zu erwarten. Oft bewirkte ich in der That mittelst einer Weingeistflamme an einen Stab von $18\frac{1}{2}$ Zoll Länge (und einen Querschnitt von $\frac{1}{8}$ auf $\frac{3}{8}$ Zoll) Veränderungen der Polarkraft von 8 bis 10 Grad Angularwirkung auf die Boussole. Während des Erkaltens änderte sich dieser Zustand nicht, und blieb permanent, wodurch diese Wirkung von der des Turmalins ganz getrennt wird. Ferner schien es mir, daſs die nicht erwärmte Hälfte jedesmal den Zuwachs der Kraft zuerst und am mei-

sten erhielt, welches den bekannten Analogien gemäfs wäre; doch bedarf das Quantitative dieser Erfolge eine fernere Bearbeitung des Gegenstandes. Die gröfsere oder geringere Masse des durch Wärme behandelten Stabes hat auch hier sehr bedeutenden Einfluss.

Ein dünner unmagnetischer Eisendrath von 6 Zoll Länge wurde im magnetischen Meridian nach Azimuth und Neigung vom Mittelpunkt aus nach einem Ende, und dann nach dem andern, mittelst einer Kerze meist bis zum Glühen erwärmt. Gleich nach den ersten drei oder vier Strichen fand sich jedesmal Polarität ein, und diese nahm zu mit der Anzahl der Striche bis zu einem gewissen Maximum. Die Wirkung und ihre Zunahme wurde geprüft:

a) Mittelst der Boussolnadel; wo sich nach den ersten Strichen ebenfalls wie in Morechini's Licht-Magnetisationen fand, dafs die Anziehung der freundschaftlichen zuerst hervortrat, und erst später die Abstofsung der gleichnamigen, wie ganz natürlich; denn der schwach polarisirende Drath wirkt anfänglich noch auf beide wie Eisen, daher anziehend, und die Abstofsung mufs sich später zeigen, weil sie die Differenz ist des polarisirenden und des natürlichen Eisens, während die Anziehung der ungleichnamigen die Summe beider ist.

b) Durch die Richtung des an einem ungesponnenen Faden aufgehängten Draths; dafs sie nach den ersten Strichen noch nicht genau einspielten, schien mir ebenfalls; nach 10—15 Strichen richteten sie sich genau wie die Boussolnadel.

c) Durch die Anzahl der Schwingungen; ich sah sie bei derselben aufgehängten Nadel in den verschiedenen Stadien der Behandlung zunehmen von 8 bis zu 6 Sekunden auf jede Schwingung.

d) Die Inversion der Pole gelang vollkommen wie beim Streichen mit dem Magnet; aber die relativ korrespondirende Anzahl der Striche und Gegenstriche mufs ferner bestimmt werden.

e) Das reziproke Streichen mit der Flamme im Meridian, aber in blofs horizontaler Stellung, gab ebenfalls Polarität, jedoch viel schwächere.

f) Das Streichen mit der Flamme im magnetischen Aequator für Azimuth und Neigung brachte gar keine Wirkung hervor.

g) Ein ausgeglühter Eisendrath (Nr. 6.) von $7\frac{1}{2}$ Pariser Fufs Länge wurde im magnetischen Meridian nach Azimuth und Höhe ausge-

spannt, die Mitte bezeichnet, und von da aus nach jeder Seite eine Strecke von sechs Zoll ebenfalls bezeichnet. Mit der Flamme eines Wachslichtes wurde dieses 1 Fufs lange Stück gestrichen von der Mitte nach unten, und dann wieder von der Mitte nach oben. Nach dreimaligem Streichen fand sich schon eine bedeutende Reaktion der so behandelten Strecke auf eine daran gehaltene Nadel.

h) Nach 10maligem Streichen war die Polarität schon so stark, dafs beide noch in der Kontinuität befindliche Enden die gleichmachenden Pole so abstiefsen, dafs die Boussolnadel sich ganz umwendete. Ohngefähr einen Zoll hinter den bezeichneten Enden, wo die Erwärmung aufgehört hatte, zeigte sich noch dieselbe Polarität, welche die Enden selbst hatten, von da an hörte sie auf wahrnehmbar zu seyn.

i) Das so behandelte Stück wurde nach 12 Stunden aus der Kontinuität herausgeschnitten. Es zeigte starke Polarität, brachte die Nadel zum gänzlichen Umwenden, wenn man es in der Aequatorrichtung den feindschaftlichen Polen näherte. Der 1 Fufs lange Drath machte Schwingungen zwischen 9 — 10 Sekunden; er richtete sich vollkommen im Meridian, und trug einen kleinen Büschel von Eisenfeile.

k) Ein zweiter Drath von gleicher Länge und Dicke wurde auf dieselbe Weise behandelt, mit dem einzigen Unterschiede, dafs von den Enden zur Mitte mit der Flamme gestrichen wurde. Dieser zeigte sich fast kräftiger als der vorige; er machte eine Schwingung in 8 Sekunden, bildete einen stärkern Büschel Eisenfeile, und auch Stückchen feinen Draths von $1\frac{1}{2}$ Linie und $\frac{2}{10}$ Gran Gewicht wurden von ihm getragen.

l) Ein ähnlicher Drath wurde seiner ganzen Länge nach, ohne abzusetzen, mit der Flamme gestrichen; dieser nahm viel geringere Polarität an, er machte eine Schwingung in etwas mehr als 11 Sekunden, und trug unbedeutend wenig Eisenfeile.

m) Von diesen Dräthen, die gewissermafsen nach Anteaumscher Methode, jedoch mit der Lichtflamme gestrichen wurden, hat No. I. nachher von seiner Kraft nichts verloren, die zwei andern hingegen haben etwas nachgelassen.

Diese Applikation der Wärme ist der Art, wie Morechini das konzentrirte Sonnenlicht auf seine Nadeln anwendet, so ähnlich, dafs ich sehr

geneigt bin, die Erscheinungen, die er sah, auf Steigerung der tellurischen Magnetisation durch partielle Erwärmung mittelst des Sonnenlichts zu reduziren. Er behauptet zwar: nur das violette Licht bedinge Polarität, das gelbe und rothe aber durchaus nicht; hiervon habe ich jedoch das Gegentheil gesehen. Es wurde mittelst einer mit dunkelgelbem Spiegelglas belegten kleinen Brennlinse von 16½ Zoll Brennweite und 5 Zoll Chorde ein Clavierdrath (No. 7.) im Meridian ausgespannt und gehörig geneigt. Eine Strecke von 9 Zoll wurde mit dem Fokus des gelben Lichtes von den Enden zur Mitte abwechselnd und reziprok behandelt. Obgleich der Sonnenschein nur eine ununterbrochene und nicht lange fortgesetzte Anwendung gestattete, so zeigte doch der herausgeschnittene Drath, obgleich er von Stahl war die vorigen aber von weichem Eisen, eine nicht zu verkennende Polarität, sowohl dadurch, dafs er sich sogleich richtete, als auch durch entschiedene Reaktionen auf die Boussolnadel.

Schliefslich bemerke ich noch, dafs ein dünner Nikeldrath von 10 Zoll Länge und $\frac{1}{3}$ Linie Durchmesser, durch Kerzenflamme so behandelt wie die eisernen, ebenfalls wie diese eine dauernde Polarität erhielt. Doch ich behalte mir vor, über einige magnetische Verhältnisse des Nikels und des Kobalds bei einer andern Gelegenheit zu berichten.

Einige

Einige Bemerkungen über den sympathischen Nerven.

Von Herrn K. A. Rudolphi *).

Der sympathische Nerve hat früh die Aufmerksamkeit der Anatomen auf sich gezogen, und man hat ihm stets eine grofse Bedeutung zugeschrieben. Seit langer Zeit hatte man ihn auch als zusammengesetzt betrachtet; doch hat Bichat zuerst mit deutlichen Worten gesagt, dafs das, was wir den sympathischen Nerven nennen, eigentlich kein Nerve, sondern eine Kette von Nervenknoten sey, die unter sich und mit andern Nerven in Verbindung stehen. Reil hat diese Idee mit seinem gewöhnlichen Feuer aufgefafst und ausgebildet, und dem Gangliensystem eine sehr grofse Wirksamkeit und Selbstständigkeit zugeschrieben. Die mehrsten neueren Physiologen haben hierauf endlich den Gegensatz zwischen dem Gehirn- und Gangliensystem unbedingt und möglichst erweitert angenommen, und diese Lehre erscheint in manchen Handbüchern so ausgemacht, als die von dem Kreislauf des Bluts.

Gall, der die Ganglien nur als Ernährungsapparate für die Nerven ansieht, steht mit seiner Hypothese ganz allein, und doch möchte schwerlich je eine bessere über diesen Gegenstand vorgetragen seyn. Man kann

*) Vorgelesen den 18. August 1814.

sie zwar mit einer älteren zusammenstellen, nach welcher die Ganglien als Verstärkungsorgane angesehen wurden; allein Niemand hat vor Gall so bestimmte Gründe dafür gegeben, noch die graue Substanz der Ganglien so gewürdigt, wenn man sie auch allerdings schon sonst darin erkannte.

Der eigentliche Unterschied zwischen den Nervengeflechten und Nervenknoten besteht nämlich darin, dafs den letzteren dieselbe graue Substanz beigemischt ist, die wir in dem Gehirn und Rückenmark finden, und wovon wir nichts in den Nervengeflechten erblicken. Die Menge der grauen Substanz ist nicht in allen Knoten gleich grofs, so z. B. macht sie nur einen Streif im Gasserschen Knoten, und einige Knoten sehen heller aus, doch sind dies vorzüglich die kleineren, z. B. das *Ganglium ciliare*, *maxillare* u. s. f. Dasselbe gilt von den kleinen Ganglien bei den Thieren, z. B. im Kanal der Wirbelarterie bei den Vögeln, oder von denen des sympathischen Nerven bei den Fischen.

Von diesen Nervenknoten mufs man die Anschwellungen unterscheiden, welche hin und wieder in Nerven nach Verletzungen, allein auch ohne die letzteren, erscheinen. So habe ich z. B. dem Anatomischen Museum ein Präparat einverleibt *), wo der linke Stirnnerve (*frontalis*) eines Erwachsenen an der Stelle, wo er aus dem *Foramen supraorbitale* tritt, einen ovalen Knoten darstellt, der aber nur aus den hier verdickten Scheiden gebildet ist; ich fand einen ähnlichen, doch kleineren Knoten im linken Wadennerven (in der Mitte des *ramus subcutaneus communicans peronei sinistri*) eines Erwachsenen; ich zweifle auch nicht, dafs der Knoten, den Zagorsky **) im absteigenden Ast des rechten Zungenfleischnerven beobachtete, so wie der, welchen Boehmer ***) im Gesichtsnerven fand, wo er aus dem Fallopischen Kanal hervortrat, ebenfalls hieher gehören. Die Abwesenheit der grauen Substanz unterscheidet diese Verhärtungen von den eigentlichen Nervenknoten, und bringt sie zu den Anschwellungen, welche ich in Leichnamen als Ueberreste ehmaliger Verletzungen gefunden habe, z. B. am Ellen-

*) Es ist dasselbe späterhin in C. Oppert's Inaugural-Dissertation: *De vitiis nervorum organicis* (*Berol.* 1815. 4.) abgebildet.

**) *De ganglio rami descendentis nervi hypoglossi medii.* In: *Mémoires de l'Académie des sciences à St. Pétersbourg. T. III.* (1811.) *p.* 219—224. *Tab. VII.* Der Knoten war von der Gröfse eines Hanfsamens.

***) *Obss. anat. Fasc. I.* (*Hal.* 1752. *fol.*) *p. XVIII.* Er beschreibt den Knoten ausführlich, der gewifs nichts als eine Verhärtung war.

bogennerven (*ulnaris*), wo die äufsere Narbe den grofsen, aus blofsen Verhärtungen der Scheiden bestehenden Knoten des Nerven charakterisirte (***); so wie ich auch hin und wieder ganz regellose scrofulöse Anschwellungen um die Nervenscheiden angetroffen habe.

Um die Nervenknoten gehörig zu würdigen, ist es nöthig, sie mehr unter einander zu vergleichen, als gewöhnlich geschieht. Ich werde dies versuchen, zugleich aber auch einige, wie ich hoffe, nicht ganz unwichtige neurologische Beobachtungen mittheilen.

Zuerst bemerke ich, dafs die Schriftsteller die Knoten des sympathischen Nerven zu sehr von denen der übrigen Nerven unterscheiden, wie auch Gall dies mit Recht tadelt. Bichat läugnet zwar nicht die Uebereinstimmung zwischen den Nervenknoten überhaupt, stellt sie aber doch schon in den Hintergrund, und spricht immer vorzugsweise von denen des sympathischen Nerven. Die übrigen Schriftsteller übergehen die andern Nervenknoten mehrentheils ganz, und sprechen von den Ganglien stets als von Werkzeugen des organischen Lebens. Dies ist aber offenbar falsch. Der Geruchsnerve, der vielleicht unter allen Nerven am schnellsten und stärksten auf das Gehirn wirkt, hat verhältnifsmäfsig einen sehr grofsen Knoten. Der fünfte Nerve hat erstlich den Gasserschen Knoten für die mehrsten seiner Stränge gemeinschaftlich, und bestimmt unter diesen auch für diejenigen, welche Sinnesempfindungen und Bewegungen vorstehen; der erste Ast vom fünften Paar hat mit dem dritten Paar den Ciliarknoten **) gemeinschaftlich, und die aus diesem ent-

*) Ich habe ein Paar solche Präparate dem Museum einverleibt; auch eins (in der oben angeführten Dissertation von Oppert abgebildet), wo beide *Nervi suprascapulares* eines hundertjährigen Weibes sehr verdickte und hin und wieder verknöcherte Scheiden zeigten.

**) Nachgetragene Anmerkung. In der vortrefflichen *Diss. de Ganglio ophthalmico et nervis ciliaribus animalium; praes. Frid. Tiedemann, auct. Ferd. Muck.* (Landshut 1815. 4. p. 60 ff.) wird eine Beobachtung Soemmerring's mitgetheilt, nach welcher bei der *Testudo Mydas* ein kleines *Ganglion ciliare* statt finden soll. Ich habe durch die Güte meines Freundes Albers, Mitglieds der Akademie, Gelegenheit gehabt, dieselbe Schildkröte frisch zu untersuchen, und die Nerven des Kopfs zu präpariren, allein kein solches Ganglium gefunden. Der dritte und fünfte Nerve machen hingegen ein sehr starkes Ciliar-Geflecht, wie überhaupt die Nerven des Auges (den *opticus* ausgenommen) sehr stark sind. Das Präparat ist auf dem Anat. Museum.

springenden Nerven gehen in die Iris, die weiter keine erhält, und die sich auf jeden Lichtreiz der Retina bewegt, deren Bewegung also ohne jene Nerven nicht gedacht werden kann; so dafs man den Ciliarknoten nur als dem thierischen Leben angehörig zu betrachten gezwungen ist, während der Sphenoidal- und Maxillarknoten Reproduktionsorganen anheim fallen. Zum thierischen Leben gehört wohl ohne Frage die ganze Reihe der Ganglien, die aus den hintern Wurzeln der Rückenmarksnerven entspringen.

Wir sehen in dem sympathischen Nerven der Vögel eine grofse Reihe Nervenknoten am Halse, während bei dem Menschen nur zwei oder drei dergleichen vorkommen, ohne dafs wir dort mehr organische Functionen annehmen könnten; sondern jene Knoten bezwecken wohl blofs innige durch graue Substanz vermehrte Nervenvereinigung. Einige Schedelnerven der Fische (der Gesichtsnerve, der herumschweifende Nerve *)) haben endlich Nervenknoten, ohne deswegen organische Nerven zu werden.

Fafst man dies alles zusammen, so wird man gestehen müssen, dafs mehr als die Hälfte der Nervenknoten für Organe des thierischen Lebens bestimmt ist. Wie kann man also aus den übrigen wenigeren allein eine Theorie über alle bilden wollen?

Man kann auch eigentlich nicht sagen, dafs der ganze sympathische Nerve dem organischen Leben angehört; ein Theil seiner Fäden geht zu Muskeln, und das, was von ihm zu den Reproductions- und Geschlechtsorganen geht, bewirkt in denselben, aufser den Einflüssen auf die Bildung der Masse, entweder Empfindung, oder diese und Bewegung zugleich. Im Grunde ist hier also auch thierische Verrichtung. Dafs der gröfste Theil des sympathischen Nerven Gefäfsen angehört, macht auch aus dem Grunde nichts aus, weil an andern Orten die Pulsadern von Nerven umstrickt, oder umschlungen sind, die Gehirnnerven angehören, ohne dafs dazu ein Ganglion erfordert wird. Beiläufig will ich bemerken, dafs Haller die von ihm früher vertheidigte Hypothese über den Einfluss der Nervenschlingen auf die Arterien mit Unrecht aufgegeben zu haben scheint, wie auch Wrisberg sich derselben später wieder annahm. Wäre jenes Umstricken und Umschlingen von keiner Bedeutung für jene Theile, so könnten die Nerven ja hier eben so gut neben den Pulsadern verlaufen und ihnen Zweige schikken, wie dies in den Gliedmafsen geschieht. Man denke nur an den, übri-

*) Wenigstens sind bei dem Stör sehr grofse Nervenknoten, wo die genannten Nerven aus dem Schedel getreten sind.

gens gröfstentheils für die Muskeln bestimmten, zurückkehrenden Ast des Stimmnerven (*recurrens vagi*): wozu umfafst er auf der rechten Seite die Schlüsselbeinpulsader, auf der linken den Bogen der Aorta? Er hätte ja ohne das eben so leicht zurückgehen können, und doch sehen wir hierin nie eine Abweichung! Jene Einrichtung hat also gewifs einen sehr wichtigen Einfluss der Nerven auf die Pulsadern, und mittelbar durch diese erst vielleicht auf die Absonderungen. So wird bei Leidenschaften der Puls schnell verändert, die Galle und Milch scharf, der Speichel giftig. Mit Recht verwarf Haller ein mechanisches Schnüren und Zusammenpressen der Pulsadern mittelst der Nervenschlingen, allein weiter durfte auch nichts verworfen werden. Dafs rückwärts auf diesem Wege auch durch die Gefäfse auf das Nervensystem eingewirkt werden könne, scheint mir eben so annehmbar.

Man hat sogar allen wirbellosen Thieren das Nervensystem des thierischen Lebens abgesprochen, ohne zu fühlen, welchen Widerspruch dies in sich schliefst. Von den Crustaceen, Insekten und Gliederwürmern habe ich in einer früheren der Königl. Akademie vorgelegten Abhandlung *) dargethan, dafs die Einrichtung ihrer Nerven geradezu dem Cerebral- und Rükkenmarkssystem der zusammengesetzteren Thiere entspricht. Bei ein Paar andern Thierklassen, Mollusken und Strahlthieren, schwindet das Rückenmark, ein den Ganglien ähnlicher Theil stellt das Gehirn dar, giebt bei manchen deutliche Sinnesnerven ab, und verbindet sich dann mit Nerven, die dem sympathischen in der Form allerdings analog scheinen.

Der Körperbau der Thiere im Ganzen bestimmt ohne Frage die Anordnung des Nervensystems überhaupt, oder beide vielmehr fallen zusammen, wenn auch einzelne Anomalien dagegen vorkommen **). Bei mehr

*) Ueber eine neue Eintheilung der Thiere. In meinen: Beiträgen zur Anthropologie und allgemeinen Naturgeschichte. Berlin 1812. 8. S. 79. — Späterhin hat Hr. Otto, Professor der Anatomie in Breslau, in dem der Gliederwürmer ähnliches Nervensystem, nur viel zarter, in dem *Strongylus Gigas* entdeckt, und habe ich mich durch Autopsie von der Wahrheit seiner interessanten Beobachtung überzeugt. Vergl. dessen Aufsatz: Ueber das Nervensystem der Eingeweidewürmer, im: Magazin der Ges. Naturf. Freunde VII. 3. S. 223. Das früher in demselben Magazin von Ramdohr bei dem *Distoma hepaticum* beschriebene Nervensystem beruht gewifs auf einem Irrthum; dasselbe vermuthe ich von dem Nervensystem, welches Otto ebendaselbst von *Distoma hepaticum* und *Ascaris lumbricoides* angiebt.

**) Bei den Säugthieren ist das Rückenmark durch seine Länge schon dem der niedern Wirbelthiere gewöhnlich genähert; bei dem Igel (*Erinaceus europaeus*) fängt hingegen die

seitlicher Symmetrie, bei mehr Ausbildung der Sinnes- und Bewegungsorgane findet sich ein deutliches Rückenmarkssystem; und die geringere Entwicklung des Gefäfssystems machte bei den Insekten vielleicht die Anwesenheit des sympathischen Nerven weniger nothwendig; doch will ich auch gerne zugeben, dafs das, was einige bei den Insekten für die zurücklaufenden Nerven ansehen, dem sympathischen analog seyn mag, wie Rolando *) behauptet; wenigstens scheint es auch mir bei manchen, z. B. bei der *Scolopendra morsitans*, für einen blofsen zurücklaufenden Nerven zu viel.

Bei den Mollusken und Strahlthieren hingegen treten die Sinnes- und Bewegungswerkzeuge mehr zurück, und mit ihnen die Rückenmarksnerven. Das in dieser Hinsicht sehr entwickelte Hirnsystem der Cephalopoden spricht sehr laut für diesen Satz, denn weiterhin findet sich nichts Aehnliches; allein auch die Symmetrie verliert sich, und eine dem sympathischen Nerven ähnlichere Einrichtung des Nervensystems war den Gasteropoden, Acephalen u. s. w. unpassender **).

Es versteht sich also, dafs das Thier mit solchen Nerven nicht blofs als reproductiv, als blofs ein organisches Leben genieſsend, betrachtet werden darf. Der Nerve aus einem Knoten kann alles verrichten, was einem andern zugeschrieben wird.

Eine zweite Angabe betrifft die Unabhängigkeit der einzelnen Nervenknoten von einander, welche ich aber gänzlich läugnen mufs.

Cauda equina schon bei dem neunten Rückenwirbel an, wovon ich ein Präparat auf dem Museum aufliebe. Bei *Diodon Mola* und *Lophius piscatorius* ist das Rückenmark aufserst kurz: vergl. *Apost. Arsaky de piscium cerebro et medulla spina.* Hal. 1813. 4. p. 4. Auch bei dem Nashornkäfer (*Geotrupes nasicornis*) ist die Kürze des Bauchmarks auffallend.

*) *Obss. anatomiques sur la structure du Sphinx nerii et autres insectes. Mém. présentés à l'Ac. de Turin. Turin* 1809. 4. p. 46.

**) Wie man diese tragen, fast aller Sinne beraubten Massen den Crustaceen und Insekten vorziehen kann, begreife ich nicht. Ob ein Thier mehr oder weniger Ganglien hat, das macht gewifs zu seiner Vollkommenheit nichts aus; wie weit ständen dann die Vögel etc. hinter den Mollusken zurück, wenn jener Satz von Cuvier (dafs wenige Ganglien Vorzug geben) gegründet wäre! Aber Sinne und Bewegungsorgane geben bestimmte Vorzüge. Eine Biene, eine Ameise, eine Spinne u. s. w., und auf der andern Seite eine Muschel, und wenn sie auch Hunderte von Pfunden wöge, wie die *Chama Gigas!* Dafs die Cephalopoden den Fischen nahe stehen, macht ja für die übrigen Mollusken nichts aus. Beiläufig gestehe ich auch, dafs Oken Recht hat, wenn er die Eingeweidewürmer als zu mehreren Thierordnungen gehörig ansieht. Man kann sie zusammen (wie in einer Fauna) aufstellen, allein sie sind unter sich sehr heterogen.

Man hat in dieser Hinsicht behauptet, dafs hin und wieder ein Ganglion des sympathischen Nerven mit dem nächstfolgenden nicht zusammenhinge. Bei dem Menschen habe ich nie so etwas gesehen. Bei einer Schildkröte (*Testudo europaea*) fand ich vor Kurzem ein Paar Bauchknoten des sympathischen Nerven ohne vordere, das heifst vor den Rippen gehende, Verbindung; allein sie waren dadurch nicht isolirt, denn hinter den zu den Rippen gehenden Queerfortsätzen der Wirbel hatten alle Ganglien Verbindungsfaden, nur etwas schwächer, als die vordern zu seyn pflegen. Sollte wohl nicht etwas Aehnliches in den angeblichen, niemals näher beschriebenen Trennungen des Sympathicus statt gefunden haben?

Eine andere angebliche Beobachtung würde mehr beweisen, wenn sie nicht falsch wäre. Bichat, Reil und andere stützen sich nämlich darauf, dafs der erste Halsknoten von dem ersten Rückenknoten der Vögel völlig getrennt, und an deren Halse kein Sympathicus zu finden sey. Allein er fehlt hier keineswegs, wovon ich hernach ausführlicher reden werde.

Es giebt daher keine isolirte Nervenknoten, und mit welchem Grunde man also den einzelnen derselben bestimmte Funktionen übertragen und ein eignes Bewufstseyn in ihnen annehmen kann, sehe ich nicht ein. Allen unsern Bewegungen, Gefühlen und Vorstellungen liegt immer dasselbe Ich zum Grunde: ob dies hier mehr, dort weniger hervortritt, das macht nichts aus; allein ich kann mir nur Ein Bewufstseyn denken, in dem alles zusammenfliefst. Wenn jeder eigne Sinn sein eignes Bewufstseyn hat, so mufs ja doch wieder ein allgemeines Bewufstseyn vorhanden seyn: wie könnte ich sonst meine Sinne unter einander vergleichen? Das Bewufstseyn des Zahlensinns, des Gesichts u. s. w. würde nichts vom Bewufstseyn des Gehörsinns wissen, ich beurtheile sie aber alle mit einander; dies Ich hat also das rechte, allein des Namens werthe Bewufstseyn.

Ich weifs auch nicht, worauf sich der angenommene Gegensatz und das Vicariat der Gehirnnerven und des sympathischen Nervens stützt. Ich finde es aber lächerlich, anzunehmen, dafs der Magen hört u. s. w., wenn man mir den Beweis davon nicht giebt. Ich bin davon Zeuge gewesen, dafs ein Magnetiseur so laut gegen den Unterleib einer Person sprach, dafs ich es in grofser Entfernung hören konnte. Er behauptete, sie höre hier nur durch den Unterleib; er hätte es eben so gut von mir behaupten können, denn was kann man gegen solche willkührliche Meinungen sagen! Wenn ein des Gehörs durch die Ohren (durch das Gehörorgan) beraubter

Mensch auf die Art hörte, dann wäre ich zufrieden. Nicht mehr Grund hat die Annahme, dafs im Traum der sympathische Nerve thätig sey, während das Gehirn ruhe.

Ich glaube, unsere bisher erworbene Kenntnifs vom Sympathicus berechtigt uns blofs zu den Sätzen, dafs er:

1) hauptsächlich dem Reproduktionssystem angehört;
2) und zwar vorzüglich zu den Gefäfsen desselben geht;
3) dafs der Einfluss des Gehirns auf denselben, und von diesem umgekehrt auf jenes, im gewöhnlichen Zustande gering und unbemerkt ist;
4) bei erhöheter Thätigkeit des einen oder des andern aber sehr stark werden kann;
5) immer aber der Willkühr entzogen bleibt.

Dem, der viel über das Sonnengeflecht spricht, wäre wohl zu empfehlen, auch die andern Unterleibsgeflechte nicht zu übersehen, und dann zweitens ruhig zu prüfen, was uns die pathologische Anatomie darüber gelehrt hat. Ich gestehe sehr offen, dafs ich bis jetzt bei meinen Zergliederungen in jenen Geflechten nichts auffallend Krankhaftes gefunden habe, so wie ich auch nie in den Nerven der an der Wuth verstorbenen (selbst an der gebissenen Stelle) etwas zu bemerken fand. Was wahr ist, kann uns ja in unserer Wissenschaft völlig gleichgültig seyn; daher müssen wir auch nichts erschleichen, oder ohne Beweis annehmen.

Der Ursprung des sympathischen Nerven, wie man es sonst gewöhnlich nannte, oder die Verbindung desselben, nachdem er in den Kanal der Karotis getreten, mit den Gehirnnerven, wird von unsern deutschen Anatomen, so wie fast von allen Ausländern, gerade so angegeben, wie sie einst Meckel der Aeltere beschrieb; man sagt nämlich, er verbinde sich mit dem abziehenden (sechsten) Nerven und mit dem zweiten Ast des fünften Paars. Zwar hat dies seine Richtigkeit, und es ist unbegreiflich, wie Cajetan Malacarne in der verbesserten Tafel des le Cat über die Basis des Gehirns *) die

*) *Tavola anatomica del le Cat relativa alla base del cervello riprodotta con alcuni cangiamenti da Gaetano-Malacarne. Padova 1803. 4.* Die ganze Tafel ist sehr roh.

die Verbindung des sympathischen Nerven mit dem ersten Ast des fünften Paars stehen lassen konnte, da sie nie vorkommt; so wie ich auch dem sonst so genau beobachtenden Tiedemann *) nicht zugeben möchte, dafs er sich bei den Vögeln mit dem dritten Ast des fünften Paars verbindet; allein jene Verbindung des sympathischen Nerven ist nur die vordere, und es giebt auch eine hintere, die ich an drei Köpfen hinter einander beobachtet habe.

Ich zweifelte nicht an der von so vielen Anatomen angegebenen Verbindungsart des sympathischen Nerven; um indessen sie aus eigner Ansicht kennen zu lernen, präparirte ich den Kopftheil des gedachten Nerven bei einem vierjährigen Kinde, wo die Knochen weniger hart und dick sind, man bei ihrer Hinwegnahme also auch die weichen Theile weniger leicht verletzt. Ich fand hier erstlich die bekannten Fäden zum fünften und sechsten Paar; zweitens sahe ich von den Fäden zum sechsten mehrere Fasern zur Karotis gehen; drittens fand ich mehrere, anfangs vereinigte, Fäden vom obern Halsknoten oben aus dem karotischen Kanal nach hinten, und theils zum Vagus dringen, theils weiter fortgehen, und zum Sack der Hohlvene gelangen.

An einem zweiten Kindskopf fand ich alles eben so, überdies aber ein kleines Knötchen im Kanal, das den hintern Fäden angehörte.

Bei einem dritten Kinde, dessen Pulsadern ausgespritzt waren, fand ich alles wie vorher, jedoch jenes Knötchen nicht, über welches ich daher nicht zu entscheiden wage.

Der oberste Halsknoten theilt sich also oben; mit vordern an der Basis vereinigten Zweigen geht er zum fünften und sechsten; mit hintern ebenfalls zuerst vereinigten zum Vagus, und, wie ich jedoch nicht ganz sicher behaupten will, zum Glossopharyngaeus. Das letztere schien mir jedoch bei dem letzten Kopf, allein der dahin gehende Faden rifs. Auf jeden Fall aber ist eine doppelte Verbindung da, und der oberste Halsknoten spaltet sich oben gleichsam gabelförmig. Nachdem ich dies gefunden hatte, schien es mir auch sehr natürlich, dafs der grofse Halsknoten nicht so wenige Fäden geben oder blofs nach der vordern Seite dergleichen absenden könne; wie man denn gewöhnlich hinterher solche Betrachtungen anstellt. Da jeder dies leicht an Kinderköpfen finden kann, so halte ich es für über-

*) Zoologie. Zweiter Band. S. 45.

flüssig, Zeugen anzuführen, ich könnte sonst sehr viele nennen, denen ich jenen Verlauf gezeigt habe.

Soemmerring *) führt, wahrscheinlich nach einer von Huber handschriftlich hinterlassenen Bemerkung, an, dafs der Letztere einen Faden vom Glossopharyngaeus oben in den grofsen Halsknoten eindringend gesehen habe, und nennt dies sehr selten; wahrscheinlich aber tritt diese Verbindung immer ein.

Girardi **) führt auch Fontana's Beobachtungen an, nach welchen nicht blofs von dem obersten Halsknoten Fäden zum fünften und sechsten Nerven, sondern auch sehr viele zur Karotis selbst, ja auch an den Hirnanhang (*Glandula pituitaria*) gehen. Die letzteren habe ich noch nicht gesehen, so wie Fontana die Fäden nicht nach hinten genug verfolgt hat.

Girard ***) hat mehreres Sonderbare, und das ich zum Theil nicht verstehe. Er läfst z. B. einen Faden vom Antlitznerven zum obersten Halsknoten durch einen eignen Knochenkanal gehen; hat auch Fäden vom Glossopharyngaeus zur Karotis; wo er aber von den Nerven spricht, die aus dem obern Halsknoten mit der Karotis in die Hirnschale gehen, sagt er: „dafs sich dieselben in der Nähe des fünften Nerven vertheilen, und einige Fäden an die Hirnhäute, einen andern langen Faden aber an einen Zweig des Angesichtsnerven geben, mit dem derselbe zu dem Gaumenknoten sich begiebt." Die Fäden an die Hirnhäute sind wohl mit Gewifsheit zu verneinen, und auch die Verbindung mit dem Antlitznerven konnte ich bei dem Kalbe wenigstens nicht finden.

Der Verlauf des sympathischen Nerven am Halse des Menschen ist bisher nirgends, so viel ich weifs, gehörig geschildert worden. Zwar erwähnen wohl einige Schriftsteller, wie z. B. Soemmerring, eines Fadens, der aus dem untern Halsknoten des sympathischen Nerven in den Kanal der Wirbelarterie steigt, um diese zu versorgen, beschreiben ihn aber

*) Vom Bau des menschlichen Körpers. Nervenlehre. Frankf. a. M. 1800. S. 323.

**) *De nervo intercostali. Florentiae* 1791. *recus. in Ludwig Script. Neurolog. Minor. T. III. p.* 84.

***) Anatomie der Hausthiere. Uebers. von Schwab. Zweiten B. zweite Abtheilung. München 1812. 8. S. 34. S. 36. S. 47.

durchaus nicht. Ich habe ihn bei einem Kinde von vier Jahren verfolgt. Auf der linken Seite war er sehr stark, trat in den Kanal der Wirbelarterie, und bekam in demselben von dem fünften, vierten und dritten Halsnerven Verstärkungszweige, jedoch ohne, wie bei den Vögeln, Nervenknoten zu bilden; auch konnte ich ihn nur bis zum zweiten Halsnerven verfolgen, da schien er mir an der Arterie und den benachbarten Muskeln (vielleicht deren Gefäfsen) aufzuhören. Auf der rechten Seite war aufser der gewöhnlichen *Arteria vertebralis* noch eine *secundaria* vorhanden, und es gingen auch zwei Nervenfäden, wovon der eine gröfser, der andere kleiner war, in den Kanal; beide verbanden sich mit den Halsnerven, hörten aber gegen den zweiten Halswirbel auf.

Man sieht also das gröfsere Halsstück des sympathischen Nerven zur Karotis, das kleinere zur Wirbelarterie gehen. Die Umschlingungen des sympathischen Nerven um die Karotis in deren Kanal scheinen blofs von Fontana und Girardi gehörig gewürdigt zu seyn, und doch haben Mehrere den sympathischen Nerven als Gefäfsnerven erkannt. Als solcher ist er gewifs wichtig genug, ohne im Unterleib ein Pseudo-Gehirn zu bilden.

Bei den Vögeln ist nach Tiedemann's *) und Emmert's interessanten Entdeckungen der Hauptnerve im Kanal der Wirbelarterie; der Nebenzweig geht mit der Karotis **). Bei der Gans und dem Reiher fand ich den Verlauf folgendermafsen. Der oberste Halsknoten ist doppelt; aus ihm entspringen zwei gleich starke Nerven: wovon der eine in den Kanal der Wirbelarterie tritt, sich mit jedem der Halsnerven zu einem Ganglium vereinigt und endlich in den Brustknoten übergeht; während der andere mit der Karotis niederläuft, sich mit dem der entgegengesetzten Seite in einem spitzen Winkel verbindet, und endlich nahe über der Brust sich an der Arterie verliert. Bis jetzt wenigstens habe ich ihn nicht bis zum Brustknoten verfolgen können.

*) Zoologie 2. B. S. 45.

**) Hierüber hat Emmert vortrefflich geschrieben. Ich hatte meine Untersuchungen gemacht, ohne von den seinigen etwas zu wissen, und es freute mich daher sehr, wie ich seine früheren Angaben (in Reil's Archiv X p. 377.), wo er, wie Tiedemann, den vordern Zweig des Sympathicus noch nicht kannte, durch seine spateren Beschreibungen (das. B XI. S. 120.) berichtigt fand. Tiedemann hatte mich übrigens zu diesen Untersuchungen geroizt.

Stellt man diese Beschreibung mit der vorigen von dem menschlichen Sympathicus zusammen, so findet man ein ganz umgekehrtes Verhältnifs darin angegeben. Höchst wahrscheinlich wird die vergleichende Anatomie hier noch sehr interessante Resultate liefern.

Bei den Säugthieren schmilzt häufig der sympathische Nerve mit dem Stimmnerven am Halse zusammen, wie Emmert sehr richtig bemerkt. Bei der Ziege fand ich die Verbindung folgendermafsen. Der oberste Halsknoten des Sympathicus ist sehr grofs, und nicht weit unter ihm (so fand ich es auf beiden Seiten des Halses) ist ein sehr kleiner Knoten. Der aus diesem entspringende Nerve vereinigt sich sehr bald mit dem Vagus und geht in einer gemeinschaftlichen Scheide mit demselben bis zum sechsten Halswirbel fort, wo sie sich wieder trennen, und der Sympathicus zum untern Halsknoten geht.

Man sieht hieraus leicht, worauf auch Emmert aufmerksam macht, dafs alle Versuche der Zergliederer, die bei Hunden und mehreren andern Säugthieren blofs den Stimmnerven durchschnitten haben wollten, in dieser Hinsicht ungültig sind, weil sie nothwendig den sympathischen Nerven zugleich mit durchschneiden mufsten; so dafs also die gemachte Verletzung weit gröfser war, als sie glaubten. Dieser Vorwurf trifft auch le Gallois, einen sehr achtungswerthen Physiologen, von dem man jedoch in Frankreich zu sanguinische Hoffnungen gefafst hat, und der hin und wieder sehr oberflächlich beobachtet haben mufs, wie unter andern der Umstand beweiset, dafs er durch genaue Beobachtungen erfahren haben wollte, dafs bei den Kaninchen und Meerschweinchen keine Zähne gewechselt würden, welches doch ganz falsch ist *). Er spricht immer vom Durchschneiden des

*) *Expériences sur le principe de la vie, par M. le Gallois. Paris* 1812. 8. *p.* 351. Diese Behauptung, dafs bei den Kaninchen und Meerschweinchen kein Zahnwechsel statt finde, ist schon hin und wieder ohne Prüfung angenommen worden, und freilich spricht le Gallois so zuversichtlich, wie man nur sprechen kann. Ich habe schon in meinen Anat. Physiol. Abhandlungen (Berlin 1802. 8. S. 142.) den Wechsel der ersten beiden Backenzähne bei dem Hasen beschrieben; späterhin habe ich ihn auf eben die Weise bei dem Kaninchen und Eichhörnchen bemerkt, und höchst wahrscheinlich ist er bei allen Nagethieren so zu finden.

Sehr oberflächlich ist auch die Angabe von le Gallois (a. a. O. S. 355) über das Auseinanderweichen der Schambeinsymphyse bei dem Meerschweinchen; ich habe,

Stimmnerven bei Hunden und Katzen, ohne zu ahnen, dafs er den sympathischen Nerven mit durchschnitt. Hätte er darauf geachtet, und nun zugleich gesehen, dafs bei den Kaninchen eine solche Verbindung zwischen dem Vagus und Sympathicus nicht statt findet, so würde ihm manches Abweichende in den Versuchen mit den letzten Thieren klar geworden seyn.

Diese innige Verbindung des Sympathicus und Vagus am Halse so vieler Säugthiere ist allerdings merkwürdig. Bei der gemeinen Schildkröte (*Testudo europaea*) habe ich ebenfalls gesehen, dafs der Sympathicus, bald nachdem er aus dem obern Halsknoten tritt, mit dem Stimmnerven in eine Scheide tritt, und sie erst wieder in der Nähe des ersten Brustknotens tritt. Hier ist eine neue, sehr interessante Aehnlichkeit der Amphibien und Säugthiere. — Bei den Vögeln finde ich eine solche Verbindung nicht; unter den Fischen habe ich bisher nur bei dem Hecht darüber eine Untersuchung angestellt, allein auch jene beiden Nerven getrennt gefunden.

Nach den Behauptungen einiger Schriftsteller scheinen dieselben Organe bei verschiedenen Thieren von verschiedenen Nerven versorgt zu seyn: ich zweifle aber sehr daran.

Ein Schriftsteller, der sonst unter den Anatomen einen der ersten Plätze einnimmt, der vortreffliche Scarpa *), will den Gehörnerven der Fische vom fünften Paar ableiten; allein weil er dicht an diesem liegt, wo er aus dem Gehirn tritt, hat man wohl kein Recht zu jener Annahme. Mir scheint der Gehörnerve bei dem Stör wenigstens ein ganz eigner Nerve

seit ich seine Beobachtung las, dergleichen Thiere gehalten, allein sie sind zu meinem Verdrufs unfruchtbar geblieben. Le Gallois giebt gar keine Anatomie der Theile, sagt auch gar nicht, worin das Auseinanderweichen besteht, welches er, da er ganz etwas Neues zu sagen glaubt, doch hätte thun sollen. Dagegen giebt J. M. Hoffmann (*Misc. N. C. Dec. II. ann. VII. p.* 462.) die Sache von dem Igel ganz bestimmt an: „*Inerinaceo post partum dissecto ossibus pubis ad latera depressis cartilago media in formam membranae dilucta.*" Dobel sagt auch in seiner Jägerpractica (Dritte Auflage, Leipz. 1783. Fol. p. 33.), die Bärin werfe sehr kleine Junge, weil sich bei ihr das Schlofs nicht öffne; ihm war also das Auseinanderweichen der Schambeine bei Thieren nicht unbekannt.

*) *Anatomicae disquisitiones de auditu et olfactu. Ed. alt. Mediol.* 1795. *fol. p.* 13 *sq.* Scarpa führt auch bei der Aufzählung der Gehirnnerven (S. 97.) der Schildkröte den sechsten Nerven nicht mit auf, der ihr doch keineswegs abgeht.

zu seyn, so wie ich auch den Antlitznerven für sich annehmen zu müssen glaube.

Eben so zweifle ich sehr an der Behauptung Cuvier's, dafs der Ursprung der Nerven, welche zu dem elektrischen Organ gehen, so sehr verschieden sey. Der Vagus ist wohl überhaupt der eigentliche Nerve des elektrischen Organs, nur seine Hülfsnerven mögen verschieden seyn. Bei dem Zitterrochen finde ich die Nervenvertheilung im elektrischen Organ durchaus so, wie sie Cuvier angiebt: der Vagus ist der Hauptnerve, und das fünfte Paar giebt nur einen Hülfsast **). Von dem Zitterwels führt Geoffroy ***) auch den Vagus als den Nerven des elektrischen Organs an, und wenn er von gar keinen Hülfsnerven desselben spricht, so möchte man fragen, ob wohl die anatomische Untersuchung hierüber als beendigt anzusehen sey.

Von dem Zitteraal wird noch immer von den vergleichenden Anatomen (Blumenbach, Cuvier, Geoffroy) blofs Hunter's Untersuchung angeführt, nach welcher das elektrische Organ jenes Fisches von den Rückmarksnerven versorgt wird. Nach den von Fahlberg †) mitgetheilten Beobachtungen hingegen ist auch hier der sehr grofse Vagus der eigentliche Nerve des Organs, *par electricum*, wie er sich ausdrückt; überdies aber scheinen mehrere Hülfsnerven da zu seyn, und diesen gehören auch jene Rükenkenmarksnerven. Von den übrigen elektrischen Fischen haben wir bekanntlich noch keine Anatomie.

*) *Leçons d'Anatomie comparée. T. V. p. 266.*

**) Es ist daher Blumenbach's Angabe (vergl. Anatomie 2te Ausg. S. 319), dafs der fünfte Nerve das elektrische Organ des Zitterrochens versorge, hiernach zu verbessern.

***) *Annales du Mus. d'Hist. Nat. T. I. p. 402. Tab. 26.* Dieser schätzbare Schriftsteller stellt auch jenen, wie ich glaube, falschen Satz auf; er schliefst nämlich: *„Qu'aucune branche du système nerveux n'est spécialement affectée à ces organes, puisque ce sont autant de nerfs différens qui s'y distribuent.*

†) *Beskrivning öfver Elektriske Ålen, Gymnotus electricus Linn. af Samuel Fahlberg. Vetenskaps Acad. Nya Handlingar för 1801. Stockholm 1801. 8. p. 122—156. Tab. II.*

Ueber

Hornbildung.

Von Herrn K. A. Rudolphi *).

Von allen einfachen festen Theilen des menschlichen Körpers wird die Hornsubstanz, wie es scheint, auf die leichteste Weise gebildet.

Zwar steht der Schmelz der Zähne auf einer niedrigen Stufe der Organisation, ist durch keine Gefäfse mit der Knochensubstanz des Zahns verbunden, und auf diese gleichsam nur niedergeschlagen, oder präcipitirt: doch erforderte seine Bildung einen eignen Apparat in den Zahnzellen, so dafs auch der einmal hervorgetretene Zahn nie einen Verlust des Schmelzes ersetzt bekommt, wenn gleich Zahnärzte dies zuweilen behauptet haben, um ihren Zahnpulvern mehr Abnehmer zu verschaffen. In den Fällen, wo Zähne in den Eierstöcken gebildet werden, fehlt jenen der Schmelz nicht; allein jene Vorrichtung von besondern Zellen, in denen sie gebildet werden, fehlt auch hier nicht. Offenbar steht der Schmelz also höher, oder wenigstens ist er schwerer zu bereiten.

Die Hornsubstanz hingegen erzeugt sich auf der ganzen Oberfläche des Körpers, und zwar immerfort. Schon beim Embryo sehn wir die Bildung der Oberhaut, der Nägel und Haare, und wenn wir die Thiere vergleichen, sehen wir zum Theil schon bei ihnen, wenn sie geboren wer-

*) Vorgelesen den 2. Februar 1815.

den, sehr starke Hornbildungen, wie z. B. die Hufe und auch die Kastanie bei den Füllen.

Unter den Hornerzeugnissen wiederum ist die Oberhaut am einfachsten. Hier scheint die eigentliche Haut blofs eine Art des Eiweifsstoffs (denn dieser kommt in den verschiednen Gebilden auf mancherlei Weise verändert vor) nach der äufsern Oberfläche hin abzusetzen, wo er durch sein Gerinnen die Oberhaut bildet. Je nachdem die Haut färbende Stoffe mit jenem Eiweifsstoff zugleich nach aufsen hin absondert oder nicht, erscheint die Oberhaut farblos oder braun, schwarz, roth u. s. w. So lange diese Oberhaut in ihrem mechanischen und nur geringen Zusammenhang mit der Haut bleibt, verändert sie sich wenig, oder reibt und schuppt sich nur unmerklich ab; wird ein Druck äufserlich auf sie angebracht, so verdickt sie sich durch neuen Anschufs, und bildet so Schwielen, und die harte Haut der flachen Hand und Fufssohle; kann sie bei engen Schuhen die Schwiele nicht so frei nach aufsen entwickeln, so drückt sie sich nach innen tief hinein, wie bei den Hühneraugen.

Wird der Zusammenhang mit der Haut unterbrochen, indem diese eine andere Flüssigkeit nach aufsen absondert, als die Hornerzeugende, so trennt sich die Oberhaut von ihr: das sehen wir bei den Blasen nach Zugpflastern oder Verbrennungen, bei Hautausschlägen aller Art, Pocken, Masern u. s. w. Vertrocknet aber oder schuppt sich die Oberhaut hierbei ab, so bildet sich schon unter ihr eine neue, ja es können sich, wenn unter der Oberhaut Lymphe geronnen ist, mehrere Lagen trennen lassen.

Ich habe diese Thatsachen neben einander gestellt, ohne durch Erläuterungen sie zu unterbrechen, weil sie mir in jenem Zusammenhang allein Werth zu haben scheinen. Die mehrsten Schriftsteller behaupten hierüber viel Falsches, allein nur indem sie einzelne Dinge herausheben.

Man behauptet so gewöhnlich, zwischen der Haut und Oberhaut fände sich noch eine dritte Membran, welche man den Malpighischen Schleim oder das Malpighische Netz nennt.

Der letztere Name ist durch eine oberflächliche Untersuchung grösserer Thierzungen entsprungen, die eine doppelte äufsere Hülle haben, und wo man beim Abziehen der äufsersten auch einen Theil der zweiten abzieht, nämlich die Spitzen der Scheiden für die grofsen Papillen, so dafs nur die durchlöcherte Basis jener Scheiden in Gestalt eines Netzes zurückbleibt.

Mal-

Malpighischen Schleim hingegen benennt man die angebliche Zwischenmembran auf der ganzen Oberfläche bei Menschen und bei Thieren. Als Beweis für denselben giebt man an:

1) dafs sich bei der Maceration der Haut ein gefärbter Schleim zeige;
2) dafs sich bei Mohren an einzelnen Stellen zuweilen eine doppelte Haut darstellen lasse, wie es Soemmerring z. B. am Hodensack eines Negers geglückt ist;
3) dafs sich bei Blattern und Hautkrankheiten deutlich mehrere Schichten zeigen.

Die Widerlegung dieser Gründe ist nicht schwer.

Erstlich ist die Maceration nicht geeignet, hier irgend etwas zu beweisen. Wenn ich nämlich die Oberhaut durch lange fortgesetzte Maceration zerstöre, so bekomme ich eine Masse, die aus Schleim und Schüppchen besteht; hier ist also eine wirkliche Zersetzung, keine Organisation mehr. Ich kann auf diesem Wege vielleicht die Mischung der Oberhaut einigermafsen kennen lernen, aber nie ihren Bau. Nehme ich hingegen die frische Haut, und trenne durch Eintauchen in siedendes Wasser die Oberhaut von ihr, so bleibt zwischen beiden nichts; oder betrachte ich den Profildurchschnitt der unveränderten frischen Haut mit dem bewaffneten Auge, so finde ich gleichfalls nichts dazwischen. Nehme ich eine starke Oberhaut, z. B. vom Pferde oder Rinde, so sehe ich auch deutlich, wie die ganze Oberhaut gefärbt ist; Lagen derselben aber, mit einem scharfen Messer abgetrennt, wie dünne mindergefärbte Hornplatten erscheinen. Ich sehe nicht bei der schwarzen Oberhaut der Pferde, oben helle, unten dunkle Schichten, sondern alles ist gleichförmig. Ich sehe es eben so wie bei den Haaren, den Hörnern und Hufen der Thiere, wo auch in der Hornsubstanz die Farbe liegt, und diese nicht etwa in einem besondern Schleim, oder in einer besondern Haut enthalten ist. Dasselbe gilt vom Menschen; ich habe ein paar Mal einer Mohrin ein kleines Zugpflaster auf den Arm gelegt; was sich als Blase erhob, war eine dünne schwarze Oberhaut, die sich auch schnell wieder ersetzte; wäre, der gewöhnlichen Annahme nach, bei den Negern die Oberhaut weifs, der darunter befindliche Schleim schwarz, so hätten jene Versuche wohl ein andres Resultat geben müssen. Die Farbe des Körpers liegt also blofs in der Oberhaut, daher verändern wir jene auch so leicht; wir brennen uns im Sommer ein, und im Winter mit dem Abschuppen der Oberhaut werden wir wieder entfärbt.

Der zweite Grund betraf die doppelte Haut, welche man äufserlich zuweilen deutlich wahrnimmt; er ist aber auch schon in meiner obigen Schilderung widerlegt. Finden sich nämlich zwei Häute, so sind beide Oberhaut, die äufsere ist aber eine abgestorbene *), und nur die untere ist eine frische, lebendige. Daher nehme ich den dritten Einwurf gleich mit, denn er sagt nichts mehr. Bei Blattern kann man mehrere Schichten finden, allein wie ich mich selbst durch Untersuchung sowohl unveränderter, als eingespritzter Haut von einem Menschen, der an Blattern gestorben war, auf dem hiesigen anat. Theater überzeugt habe, so ist das äufserste eine abgestorbene Epidemie, was dann folgt ist verschieden: bald eingetrocknete Lymphe, und unter dieser erst die neue Oberhaut, oder auch, wenn die Blatter schon länger gestanden hatte, unmittelbar unter der alten eingetrockneten die neue **).

Man könnte vielleicht noch einen Grund von dem Pigment im Auge hernehmen wollen, da bei Kakerlaken gewöhnlich die Farbe der Augen, wie die der Haut, einen Mangel an färbendem Stoff verräth. Allein bei der geringsten Vergleichung sieht man, dafs dies nichts für oder gegen die Bildung einer besondern Haut sagt. Die Gefafshaut sondert im gesunden Auge einen schwärzlichen Schleim ab, der im Auge des Kakerlaken mehrentheils (nicht immer) fehlt; die Haut (*cutis*) bildet eine gefarbte Oberfläche im natürlichen; im kranken Zustande der Kakerlaken hingegen eine ganz weifse oder gelbliche Oberhaut. Das kann wohl nichts entscheiden.

Den Bau der Oberhaut finde ich sehr einfach, nämlich als eine blofse auf der Haut erstarrte Hornmasse. Zwar haben einige Engländer nach

*) Nachgetragene Anmerkung. Ich habe späterhin Gelegenheit gehabt, ein Stück frischer Negerhaut zu untersuchen, wo die Oberhaut schwarz war, allein auch die äufserste Flache der Haut selbst, oder des Corium, schwarz war, ohne jedoch diesen schwarzen Theil als eine besondere Haut darstellen zu können. Wird also etwa die Haut bei dem Absetzen der schwarzen Hornmasse zur Oberhaut vielleicht auf eine ähnliche Art auf der Oberflache geschwarzt, wie die Lungen (die einsaugenden Bronchialdrüsen und der Speichel) erwachsener Personen bei dem vieljährigen Entkohlungsproceſs daselbst? S. Pearson's Aufsatz: *On the colouring matter of the black bronchial glands and of the black spots of the lungs* (*Phil. Tr.* 1813. S. 159—170.) ist sehr dürftig.

**) Damit sind alle die künstlichen Trennungen widerlegt, die Cruikshank an der Haut von Blatternkranken vornahm, auch halte ich mich nicht bei den wunderlichen Ansichten eines neuen franz Schriftstellers Gaultier auf, der die dicke Haut der Fufssohle künstlich in eine Menge Schichten theilte, und diesen idealen Bau auf die ganze Haut übertrug.

Bainhams *) Präparaten im malpighischen Schleim besondere Gefäfse angenommen, allein diese gehören offenbar der Haut selbst an, in der auch alle Exantheme ihren Sitz haben. Eben so wenig habe ich bei den sorgfältigsten Untersuchungen mittelst des Messers und Mikroskops jemals die Poren der Oberhaut finden können, die Cruikshank und andere von ihr zierlich abgebildet haben. Ueberall wo ein Haar aus der Haut tritt, schlägt sich die Oberhaut um das Haar nach innen in die Hautgrube zurück, und umfafst hier das Haar, ohne also dasselbe nach aufsen zu begleiten. Andere Oeffnungen der Oberhaut kenne ich nicht, und wir dürfen auch wohl nicht erwarten, dafs die Wege, wodurch die Ausdünstungsmaterie entweicht, so grob sind, dafs sie bei unsern Mikroskopen darzustellen wären. Es verhält sich damit wie mit den Einsaugungsöffnungen, die man sonst auch grofs genug hielt, um sie bei den gewöhnlichen Mikroskopen, z. B. in den Darmzotten, finden zu wollen, welche Ansicht ich an einem andern Ort durch eine grofse Reihe von Beobachtungen zu widerlegen gesucht habe. Man ist eine Zeitlang mit allen solchen Poren viel zu freigebig gewesen, und hat sich die Gefäfse oft als mit freien Mündungen geendigt vorgestellt, während gewifs der gröfste oder aller Wechsel durch die Wände derselben statt findet, wovon ein recht deutliches Beispiel in den Lungen gegeben ist, wo die Blutreinigung durch die Wände der Gefäfse hindurch vor sich geht.

Die einfachste Hornbildung ist also in der Oberhaut **). Etwas mehr zusammengesetzt ist die der Nägel, Hufe und Hörner; hier ist es nicht ein blofses Ausschwitzen oder Absetzen der Hornmaterie nach aufsen, sondern die Haut bildet Falten und Verdopplungen, und hat in diesen grofse Gefäfsgeflechte zur Hornabsonderung. Der Huf ist im Grofsen was der Nagel im Kleinen ist, und die etwas abweichende Form ändert in der Hauptsache nichts: betrachten wir aber jenen, so sehen wir deutlich, dafs für die grofse Hornmasse die Haut in ihren Falten (oder Reifen) und Gefäfsen sich gleichsam vervielfältigt. Die Hörner haben vielleicht nicht blofs die Haut

*) Ich habe mich vergebens bemüht, Bainhamsche Präparate aus London zu erhalten, man spricht auch dort von ihnen sehr zweideutig.

**) Das heifst der einfachen Oberhaut. Denn die Haut des Schuppenthiers stellt mit jeder Schuppe gleichsam einen Nagel dar. Einige Schriftsteller (Linné, Tiedemann, Illiger) nennen diese Theile knochenartig, das sind sie aber keineswegs. Nur bei den Tatu's liegt eine Knochenmasse unter der Oberhaut.

selbst als absonderndes Organ, sondern der knöcherne Zapfen, den sie umhüllen, scheint mir mit seinen grofsen Gefäfsen ebenfalls dazu beizutragen, doch bedarf dieser Theil meiner Untersuchung noch wiederholter Beobachtungen. Aus dem Folgenden nämlich ergiebt sich, dafs auch grofse Hörner aus der Haut allein entspringen können, so wie ferner der Knochenzapfen bei manchen Hörnern nicht grofs genug scheint; mir wird daher, indem ich dieses schreibe, meine ehemalige Ansicht verdächtig, nach welcher ich dem Knochenzapfen, oder vielmehr dessen Beinhaut, sehr viel zur Erzeugung der Hörner anrechnete.

Die dritte Hornerzeugung, die der Haare, ist die zusammengesetzteste. Will man sie mit weniger Mühe genau kennen lernen, so mufs man die gröfseren Barthaare der Thiere (*Mystaces*) untersuchen. Ich hatte vor zehn Jahren Gelegenheit, ein Paar Seehunde frisch zu untersuchen, und habe darnach den Gegenstand in meiner *Diss. de pilorum structura, Gryph.* 1806. 4. beschrieben. Für jedes Haar liegt in der Haut eine hornartige Kapsel, die nach aufsen und innen offen, an den Seiten verschlossen, und bei jenen Haaren des Seehunds länglich, ungefähr drei bis vier Linien lang, und etwa von einer halben bis $\frac{2}{3}$ Linie im Queerdurchmesser ist, bei andern Haaren aber rundlich oder oval ist. Diese Kapsel wird auch die Zwiebel genannt; an ihrem untern oder innern Ende dringen Gefäfse und Nerven hinein, und bei jenen Barthaaren des Seehunds setzen sich äufserlich an die Kapsel Muskelfasern. In ihr steckt das Haar, und zwar in der ganzen Länge der Kapsel, jedoch ohne irgendwo mit ihr in Verbindung zu seyn, sondern so als man die Kapsel spaltet, liegt das Haar los da. Das unterste Ende des Haars ist hohl, aber nur in einer sehr kurzen Strecke; beim Seehund beträgt die Länge oder Höhe der Höhle keine halbe Linie; beim Wallrofs ist sie hingegen, nach Baster's Abbildung, ziemlich beträchtlich; bei den Haaren der menschlichen Augenbraunen macht das Ende ein Knötchen, und das hat Anlafs gegeben, dafs Einige geglaubt haben, beim Ausziehen des Haars die Kapsel oder Zwiebel mit hervorzuziehen, welches nie geschieht. Das Haar selbst ist ohne alle Höhle und eine dichte Hornmasse, wie ich mich durch viele Versuche überzeugt habe; ich habe die feinsten Segmente gröfserer Haare, z. B. vom Seehund, vom Pferde u. s. w., wie von menschlichen, nach allen Richtungen geschnitten, mikroskopisch untersucht: immer aber war es eine dichte Masse. Dafs das ganze Haar, unter dem Mikroskop betrachtet, durch eine optische Täuschung, weil es nämlich auf dem convexe-

sten Theil am stärksten erhellt ist, hohl erscheint, ohne es zu seyn, darf ich als bekannt voraussetzen.

Betrachtet man die Höhle der Basis des Haars, und wie dieses damit in die Haarkapsel hineinragt, so hat dies auf den ersten Blick einige Aehnlichkeit mit der Bildung unserer Zähne; allein diese bilden sich ganz anders aus, sie bekommen Wurzeln, in welche Gefäfse und Nerven eindringen, indem sich das anfangs hohle Scherbchen verlängert, und dies selbst bleibt die Krone, die inwendig mit Beinhaut ausgekleidet, mit Gefäfsen und Nerven versehen ist; während das Haar nie Gefäfse oder Nerven hat, sondern diese nur für seine Kapsel bleiben. Etwas mehr steigt jedoch die Aehnlichkeit, wenn man die Hauzähne mancher Thiere und die Vorderzähne der Nagethiere betrachtet, wo die (jedoch viel gröfsere) Höhle auch nur an der Basis, nicht in der Krone befindlich ist.

Je nach dem Grad der Zusammensetzung ist auch die Wiedererzeugung der Hornsubstanz mehr oder weniger leicht. Die Oberhaut erzeugt sich sehr leicht und schnell wieder, und die Wiedererzeugung ist nicht auf ein oder auf wenige Male eingeschränkt. Bei den Nägeln geschieht sie schon langsamer, und sehr leicht unordentlich, und bei den Hufen sehen wir, dafs die wiedererzeugten selten recht brauchbar sind, so dafs häufig die Thiere dabei zu Grunde gehen. Die erneute Haarerzeugung wird ebenfalls leicht unterbrochen, häufig erzeugen sich die Haare an manchen Stellen gar nicht wieder. Die Ursachen davon sind bis jetzt nicht gehörig durch Untersuchungen nachgewiesen, doch lassen sich mehrere dafür hypothetisch angeben, besonders eine verminderte Ernährung der Haarkapseln, und ein gestörter oder aufgehobener Nerveneinfluſs auf dieselben, oft wohl geradezu Desorganisation derselben. Wie stark jene ersteren Ursachen wirken müssen, sehen wir deutlich in den Fällen, wo nach Angst und Schrecken die Haare plötzlich grau oder weifs werden, oder wo nach heftigen Kopfschmerzen die Haare schnell ausfallen u. s. w.

Von den krankhaften Hornbildungen kann ich hier nur einige Punkte erwähnen.

Erstlich, was die Oberhaut betrifft, so sehen wir, dafs sie häufig einen geringen Zusammenhang mit der Haut hat, und vielleicht blofs dadurch brüchiger ist; das ist das Sprödeseyn der Haut, welches sehr verschiedne Grade hat, und woran sich zuletzt die unschicklich so genannte Ichthyose schliefst, wo die Oberhaut sich in trocknen Schrunden erhebt, wie wir es

bei den Porcupinemen oder Stachelschweinmenschen gesehen haben. Ich habe geradezu den Uebergang des Sprödeseyns der Haut in diesen Zustand gesehen, und es giebt hier viele Mittelzustände, bei deren Beachtung man nur den Zusammenhang einsieht.

Einige neuere Schriftsteller, vorzüglich Reich und Dehne, haben das Scharlachfieber als einen blofsen Häutungsproceſs ansehen wollen, allein gewifs mit Unrecht. Wir haben Beispiele genug, wo die Abschuppungen der Oberhaut nicht so unmerklich wie gewöhnlich vor sich gegangen sind, sondern so schnell und stark erfolgten, dafs täglich grofse Massen abstarben und abfielen, allein es war kein fieberhafter Zustand damit verbunden Es läfst sich auch wohl nicht erklären, wie der Häutungsproceſs epidemisch eintreten und wohl gar mit Ansteckung verbunden seyn sollte, die doch schwerlich beim Scharlachfieber geläugnet werden kann. Mit gleichem Recht könnte man eine Menge Ausschlagsfieber für Häutungsprocesse erklären, allein die Pathologie würde offenbar dabei verwirrt.

Die krankhaften Abweichungen der Nägel und Haare übergehe ich, da sie schon so vielfach erörtert worden und meine Erfahrungen darüber ganz unbedeutend sind.

Dagegen sey es mir erlaubt, über die Bildungen der Hörner noch Einiges beizubringen.

Ich habe in Rambouillet Gelegenheit gehabt, eine 25 Häupter starke Heerde ungehörnten Rindviehs zu untersuchen. Bei einem grofsen Stier, dem angeblich aus Asien abstammenden Stammvater der Heerde, war auf der Stirne eine leichte Erhabenheit des Schedels, aber keine Spur von Hörnern. Ein Paar der Stiere von seiner Abkunft hatten kleine, 4—5 Zoll lange, festsitzende rundliche Stumpfe; von den Kühen hatten ebenfalls einige dergleichen, 2—3 Zoll lang; bei einigen andern waren sie an der Basis beweglich; bei einigen lagen unter der Haut kleine harte Körper wie Scirrhen; bei den übrigen fehlten sie ganz. Die Kühe, welche von jenem Stier belegt waren, sind alle von gewöhnlicher gehörnter Art gewesen, jene Eigenschaft stammte also blofs vom Vater her. Mehrere Schriftsteller sprechen von ungehörntem Rindvieh, z. B. Barrow unter den Neueren, unter den Aelteren le Blanc, Flacourt u. s. w., worüber Beckmann im ersten Bande seiner schätzbaren Litteratur der Reisen, im 4. St. S. 565—8 zu vergleichen ist.

Die bei vielen dieser Thiere an der Basis bloſs in der Haut hängenden Hörner sind natürlich ohne Knochenzapfen, also bloſs der Haut angehörig, und doch sind sie zuweilen nicht klein; so spricht Barrow z. B. von solchen an der Haut hängenden vier bis acht Zoll langen Hörnern.

Sie erklären wiederum die Hörner, welche Menschen und Thieren, z. B. Pferden und Schafen, nicht selten und an sehr verschiednen Stellen des Körpers aus der Haut gewachsen sind. Zu den merkwürdigsten Wucherungen dieser Art gehört unstreitig der ungeheure Hornauswuchs aus der Haut an der Seite des Beckens von einer gemeinen Taube, wovon ich hier die Ehre habe, eine Zeichnung vorzulegen, und wovon das Präparat auf dem Museum befindlich ist *).

Damit sind ferner die Warzen einerlei, welche an den Händen, im Gesicht und an andern Theilen des Menschen entspringen, und welche die Schriftsteller oft sonderbar genug erklärt haben. Offenbar sind es nichts als Hornwucherungen, die aber bald mehr, bald weniger festsitzen, wie auch bei jenen Hörnern der Fall ist.

Dagegen ist durch Salt das Räthsel gelöset, womit Bruce die Naturforscher zu beschäftigen gewuſst hatte. Er erzählte nämlich, die ungeheuren Hörner der Shangallas-Ochsen rührten von einer Krankheit her; das Thier zehrte, indem sie sich entwickelten, immer mehr ab, der Hals verhärtete sich, und der Kopf könne nicht weiter bewegt werden, endlich stürbe es, indem kaum noch einiges Fleisch auf den Knochen sey, die Hörner dagegen den gröſsten Umfang erreicht hätten. — Salt **) bekam auf seiner zweiten Reise nach Abyssinien von dem Ras drei solcher Ochsen geschenkt; sie waren sehr gesund und munter, und sogar so wild, daſs er sie tödten muſste. Das gröſste Horn dieser Thiere war beinahe vier Fuſs lang,

*) Der Herr General-Staabs-Chirurgus Goerke, dem das Anatomische Museum schon so vieles verdankt, hat mir auch dieses seltene Stück für dasselbe geschenkt. Die Taube war in ihrer Freiheit unter dem Namen der Horntaube bekannt gewesen, und in der Gegend von Nordhausen in einer Mühle eingefangen und drei Viertel Jahr gefüttert worden. Der Herr Bataillons-Chirurgus Ebeling in Nordhausen erhielt sie hernach und übersandte sie dem Herrn G. St. Ch. Goerke.

Der bekannte Chemiker John hat die Güte gehabt, etwas von dem Horn zu untersuchen, und es ganz wie gewöhnliches Horn gefunden.

Die Zeichnung stellt die Taube mit dem Hornauswuchs in natürlicher Gröſse sehr getreu dar.

**) *A Voyage to Abyssinia and travels into the interior of that country. By Henry Salt. London* 1814. 4. *p.* 258. Mit einer zwei solche Ochsen abbildenden Kupfertafel.

und der Umfang an der Basis desselben betrug 21 Zoll. Die Thiere waren dessenungeachtet nicht gröfser als unser gewöhnliches Rindvieh, und Salt hält sie ganz von derselben Art. Seine Abbildung hingegen scheint doch eine merklich verschiedene Gestalt von unserm gewöhnlichen Rindvieh anzugeben, und dies Thier, das selbst gröfsere Hörner trägt, als der Arni, oder der indische Riesenbüffel, möchte doch mit seinem grofsen Kopf, seinem starken Halse und dem kleinen Buckel auf dem Rücken, etwas mehr als Spielart unsers Rindviehs seyn. Salt ist kein Naturforscher, scheint auch gegen Bruce die Sache zu leicht abmachen zu wollen. Sonst aber verdient er allen Dank, dafs er das Mährchenhafte in der ältern Erzählung dargethan hat.

Ich wollte die Hornwucherungen noch mit den Wucherungen anderer fester Theile der thierischen Körper vergleichen, hebe aber dies für eine andre Gelegenheit auf, um nicht die Gränzen dieser Abhandlung zu überschreiten.

Beschrei-

Beschreibung
des
Gehirns von einem Kinde, welchem das rechte Auge und die Nase fehlten.

Von Herrn K. A. Rudolphi *).

I. Beschreibung des Falles.

Eine gesunde Frau von 22 Jahren, Gattin eines kräftigen jungen Mannes und Erstgebährerin, ward nach einer leichten Schwangerschaft von einem völlig ausgetragenen, lebenden Kinde ohne grofse Beschwerde entbunden. Dieses war weiblichen Geschlechts, von gewöhnlicher Gröfse, wohlgenährt und bis auf das Gesicht wohlgestaltet. Auf der linken Seite befand sich ein in allen Theilen wohlgebildetes Auge, auf der rechten Seite hingegen fehlte das Auge ganz und gar, und die Haut der Stirne setzte sich unmittelbar in die der Wange gerade fort, ohne Spuren von Augenbraunen und Augenliedern, und ohne dafs sich an der Stelle, wo das Auge hätte seyn sollen, etwas dem Aehnliches unter der Haut hätte durch das Gefühl entdecken lassen. Die Nase fehlte ebenfalls, und die Haut senkte sich von der Stirne gerade hinab, doch so, dafs kleine, platte, etwas bewegliche, den Nasenknochen analoge Theile unter der Haut befindlich schienen. Die Ober-

*) Vorgelesen den 26. Oktober 1815.

lippe war in der Mitte getheilt, und die Spalte zog sich etwas stark und spitz hinauf, so dafs die Mundöffnung beinahe pyramidalisch erschien, und wegen der fehlenden Nase hier ein ganz anderes Ansehen statt fand, als bei den gewöhnlichen Hasenscharten oder Wolfsrachen. Die Ohren und die übrigen Theile des Gesichts waren natürlich gebildet.

Die Mutter war durch den Anblick des Kindes sehr erschreckt worden; als dasselbe aber nach sechszehn Stunden starb, wollte sie es doch durchaus beerdigt wissen, und da sie inzwischen sehr krank geworden war, so stand für sie zu fürchten, falls man es hätte erzwingen wollen, das Kind für die Anatomie zu behalten. Ich mufste also nur froh seyn, dafs mir die Sektion des Kopfs verstattet ward, und dafs ich bei dieser Gelegenheit das Gehirn herausnehmen und zu genaueren Untersuchungen behalten durfte.

Wie ich die Bedeckungen des Schedels durchschnitt, fand ich Wasser unter der Haut; unter dem Schedel hingegen war keines vorhanden. Das Gehirn schien von oben angesehen ganz natürlich beschaffen zu seyn, nur dafs es mir vorne auf der rechten Seite etwas schmaler vorkam; wie ich es aber aufhob und die Nerven durchschnitt, sah ich gleich, dafs auf der rechten Seite fünf derselben fehlten, wovon hernach.

Als ich das Gehirn herausgenommen hatte, untersuchte ich den Schedel, so viel es mir erlaubt war. Der ganze hintere Theil der Schedelhöhle, das Hinterhauptsbein, die Scheitelbeine und der Stirntheil der Stirnbeine waren natürlich beschaffen. Der Augenhöhlentheil des linken Stirnbeins ebenfalls, der des rechten hingegen war flach (nicht für einen darunter liegenden Theil gewölbt), und zwischen ihm und dem Jochbein und dem Oberkiefer war, statt einer Augenhöhle, eine schwache Queerfläche, so dafs der Körper des Oberkiefers mit dem Stirnbein zusammentrat. Auf der rechten Seite erblickte und fühlte ich auch statt der rechten Hälfte der Siebplatte eine blofse Vertiefung, in welche hinten Gefäfse drangen. Auf der linken Seite ging der Geruchsnerve hinein. Eine weitere Zergliederung des Schedels ward mir nicht gestattet. Sonst wäre die genauere Untersuchung des Keilbeins, des Oberkiefers u. s. w. von grofsem Interesse gewesen.

Bei Betrachtung der Basis des Gehirns, ohne weitere Vorbereitung, als dafs die Gefäfshaut, wo sie im Wege war, entfernt ward, fand ich Folgendes zu bemerken.

1) Der Geruchsnerve der rechten Seite fehlte ganz; der linke war vorhanden, allein die sonst immer so leicht erkennbaren Wurzeln des-

selben waren durchaus nicht aufzufinden, sondern er trat gleich als ein starker Nerve von dem Theil des Gehirns ab, welcher den gestreiften Körper von unten umfafst.

2) Der rechte Sehnerve fehlte, der linke war ganz natürlich beschaffen, und nach der rechten Seite hin, da wo sonst die Verbindungs- oder Kreuzungsstelle der Sehnerven ist, ging ein kleiner Fortsatz in die Queere ab, der sich mit einer markleeren Stelle endigte, oder dessen am Ende marklose Scheide in die harte Hirnhaut überging.

3) Der Dritte,

4) der Vierte, und

5) der Sechste Nerve fehlten auf der rechten Seite gänzlich; auf der linken waren sie wie gewöhnlich.

6) Die übrigen Nervenpaare waren auf beiden Seiten vorhanden.

7) Die graue, den Boden der dritten Hirnhöhle ausmachende Masse, hinter der Stelle, wo sich die Sehnerven sonst vereinigen, und welche diese verstärkt, war vorhanden, doch auf der linken Seite stärker.

8) Das linke Markkügelchen (*eminentia candicans*) war vorhanden, das rechte fehlte.

9) Auf der rechten Seite war zur Seite des Gehirnschenkels eine starke birnförmige Hirnmasse, die mit einem dünnen und kurzen cylindrischen Stiel in den Anfang des rechten hintern Gehirnlappens, oder in die Fortsetzung des Ammonshorns verlief. Ich vermuthete gleich in jenem Theil den nach unten und links hervorgetretenen rechten Sehhügel, welches sich auch hernach bestätigte. Genug, es lag hier auf der Basis ein Körper, der sonst daselbst nicht vorkommt, und der ihr eine fremde Gestalt mittheilte.

10) Die linke Seite des grofsen Gehirns war an der Basis bis auf die Grube des Sylvius natürlich gebildet, diese aber allerdings fehlerhaft und zu klein, daher auch hier keine Wurzeln des Geruchsnerven zu entdecken waren.

11) Der rechte Lappen des grofsen Gehirns war viel tiefer wie gewöhnlich, eingeschnitten, so dafs zwischen den Windungen mehrere grofse Höhlen vorkamen, wenn man dieselben aus einander legte.

12) Die Gehirnschenkel erschienen ganz gleich gebildet.

13) Die Varolische Brücke klein, etwas zusammengedrückt, aber in den Hälften ziemlich gleich, doch auf der linken Seite mir etwas stärker scheinend.

14) Das kleine Gehirn sehr klein, allein in den Hälften gleich.

15) Die Pyramiden gleich, der rechte Olivenkörper aber gröfser als der linke.

Das bisher Angegebene ist auf der ersten Tafel vorgestellt.

Bei der Untersuchung des Gehirns von oben fand ich in den Windungen und den Substanzen nichts Widernatürliches, dagegen bemerkte ich gleich, dafs sich das *Corpus callosum* auf der rechten Seite lange nicht so weit nach hinten erstreckte, als auf der linken. Als ich die grofsen Seitenhöhlen blofs legte, zeigte sich die rechte ebenfalls kleiner, und ihr vorderes Horn kürzer, so dafs der gestreifte Körper auf der linken Seite mehr nach vorne zu liegen schien; das hintere, so wie das mittlere oder absteigende Horn rechts fast ganz fehlend, oder höchst unbedeutend; auf der linken Seite normal. Hier ging auch die Binde (*Taenia*) mit dem Ammonshorn gehörig fort, auf der rechten Seite hingegen fehlte die Binde fast ganz und das Ammonshorn war sehr schwach und versteckt, weil es nicht frei lag, sondern der hintere Schenkel des Gewölbes sich bald in die Gehirnsubstanz senkte; doch fehlte das Ammonshorn nicht, wie es zuerst schien, sondern beim weiteren Verfolgen nach der Basis ergab sich deutlich, dafs der obengenannte Theil, in welchen sich der Sehhügel mit seinem Fortsatz verlor, das Ammonshorn war. Auf der rechten Seite fand sich die Oeffnung für das überall natürlich beschaffene Adergeflecht unter dem Schenkel des Gewölbes viel gröfser, als auf der linken. Rechter Seite sah man nun auch deutlich den vergröfserten Sehhügel unter dem gedachten Schenkel nach links heraus und in die Tiefe gezogen.

Die jetzt genannten Theile bildet die zweite Tafel ab.

Ich spaltete hierauf das *Corpus callosum* der Länge nach, um die Scheidewand zu betrachten, und fand in dieser eine widernatürlich erweiterte Höhle, so dafs hier eine beträchtliche Wasseransammlung statt gefunden haben mufste, die mir aber nicht zu Gesicht gekommen war, da das Wasser durch den Alcohol weggeschaft war, worin ich das Gehirn, gleich nachdem ich es aus dem Schedel des Kindes nahm, gelegt, und den ich einigemal erneut hatte. In der Höhle der Scheidewand war bei der genaue-

sten Untersuchung weder nach unten noch irgend einer andern Seite die geringste Oeffnung zu finden. Siehe die dritte Tafel.

Ich durchschnitt nun die hintern Schenkel des Gewölbes und schlug dieses mit dem *Septum* und *Corpus callosum* nach vorne zurück, wo sich denn ergab, dafs der linke vordere Schenkel des Gewölbes normal war, während der rechte beinahe fehlte oder nur aus dem Epithelium der Höhlen bestand, womit auch das oben erwähnte Fehlen des rechten Markkügelchens zusammenpafst, da dies bekanntlich gleichsam ein Knie ist, das der vordere Schenkel des Gewölbes bildet. Die dritte Hirnhöhle war sehr grofs, und ohne mittlere Commissur, so dafs die Sehhügel weit auseinander standen, wie die vierte Tafel zeigt; der absteigende Gang zum Trichter sehr erweitert, allein an seinem Grunde völlig geschlossen. Die hintere oder die Oeffnung in die Wasserleitung des Sylvius, die Vierhügel, die Klappe, das Marksegel waren ganz natürlich beschaffen.

Die Zirbel mufs sehr klein gewesen seyn; gleich bei dem Herausnehmen des Gehirns dachte ich nicht daran, da so viele Abweichungen meine Augen auf sich zogen; am andern Tage, nachdem das Gehirn in mehrmals gewechseltem Alcohol gelegen hatte, konnte ich sie nicht mehr erkennen, ihre Schenkel waren sehr schwach. Am Trichter war nichts ungewöhnliches. Die *Glandula pituitaria* habe ich zu untersuchen vergessen.

Das Präparat ist auf dem Museum befindlich, und es ist alles, was ich davon angegeben habe, noch jetzt daran zu erkennen.

II. Vergleichung dieses Falls mit andern.

Ein ganz ähnlicher Fall *) findet sich bei keinem Schriftsteller; auch kenne ich überhaupt nur zwei Beobachtungen, die mit der meinigen zu vergleichen sind, allein sich dennoch, wie man gleich sehen wird, wesentlich da-

*) Ph. Fr. v. Walther (Ueber die angebornen Fetthautgeschwülste und andere Bildungsfehler. Landshut 1814. Fol. S. 36.) besitzt eine Mifsbildung, die der hier beschriebenen etwas nahe kommt, allein leider nicht in Hinsicht des Gehirns und der Nerven untersucht ist. Es fehlt nämlich der linke Augapfel, und die Augenhöhle ist sehr klein. Die Augenlieder sind verschrumpft und an den Rändern verwachsen; die Nase fehlt auch nicht, sondern ist nur an der linken Seite zusammengedrückt. — Wie ich die vorliegende Abhandlung schrieb, hatte ich Walther's Beobachtung noch nicht gelesen.

von unterscheiden. Die Ursache davon ist leicht zu erklären. Erstlich verheimlichte man ehmals die Misgeburten so viel wie möglich, so dafs die Aerzte, die dergleichen Seltenheiten zu bekommen Gelegenheit hatten, sie viel zu hoch hielten, um an ihnen etwas durch die Zergliederung zu verderben, oder wenn sie dieselben secirten, so machten sie davon Skelette und liefsen den Kopf gewöhnlich ungeöffnet. Zweitens aber ward ihnen eine fruchtbare Zergliederung des Gehirns sehr erschwert, weil sie keine Methode kannten, dasselbe zu erhärten, und so ein und dasselbe Gehirn zu tiefergehenden fortgesetzten Zergliederungen und Abzeichnungen fordernden Untersuchungen geschickt zu machen.

Zwar habe ich oft Gehirne gefunden, besonders von Personen, die am Typhus gestorben waren, woran man ohne künstliche Erhärtung alles leicht entwickeln konnte [a]), allein zu fortgesetzten Zergliederungen dauerte die Härte doch nicht aus. Wird hingegen das Gehirn in Alcohol gelegt, und dieser häufig gewechselt, und noch besonders, wenn man ihm Eingang in die Höhlen verschafft, so kann man an demselben Gehirne eine Präparation nach der andern vornehmen, und so dem Zeichner die nöthige Zeit lassen. Diese kleine Reihe von Abbildungen eines widernatürlich gebildeten Hirns, welche ich hier liefere, ist daher auch die erste, welche erscheint. Wie würde sich mein verewigter College Reil gefreut haben, wenn er diese Benutzung der von ihm so angewandten Methode hätte sehen können!

Die beiden Fälle, welche ich meine, sind folgende.

Malacarne [b]) erzählt von einem Mädchen, das er zwei Monate lang lebend zu beobachten Gelegenheit hatte, dessen Augenlieder, und überhaupt alle äufsern Theile des Gesichts, bis auf die fehlenden Augen, wohlgebildet waren, und wo die Zergliederung den Mangel der Augäpfel und deren Muskeln, so wie der Sehnerven, und des dritten, vierten und sechsten Nervenpaares zeigte. In Ansehung der Sehnerven bemerkt er noch, dafs auch ihre Verbindungsmasse, oder die sogenannte Kreuzungsstelle (*le loro aje quadrate*, wie er sich ausdrückt) und die Seehügel fehlten.

a) Ich bemerke hierbei gelegentlich, dafs nichts ungegründeter ist, als die Furcht vor den am Typhus Verstorbenen. Die Leichen derselben mit und ohne Flecken, die der am Scharlachfieber, an Masern u. s. w. Gestorbenen bringen keine Gefahr. Ich habe nicht einmal eine örtliche Pocke von vielfaltiger Berührung der an Blattern Gestorbenen beim Zergliedern entstehen sehen.

b) *I sistemi e la reciproca influenza loro indagati da Vincenzo Malacarne. Padova* 1803. 4. *p.* 90.

Ich schliefse aus dieser Aeufserung, dafs Malacarne das Gehirn nur von unten angesehen und nicht weiter untersucht hat. Denn der Mangel so grofser Theile, wie der Sehhügel, mufste durchaus in der Anordnung der andern innern Theile des Gehirns eine grofse Veränderung hervorbringen; und ich kann mir gar nicht denken, wie dabei die dritte Hirnhöhle, die hintern Schenkel des Gewölbes, das Ammonshorn u. s. w. haben bestehen können. Da er aber kein einziges Wort von den andern Theilen sagt, so fehlten wahrscheinlich nur die untersten Stücke der Sehhügel, so weit er sie von der Basis aus ohne Präparation sehen konnte. Eine genaue Untersuchung dieses Falls hätte gewifs sehr interessante Resultate gegeben.

Das von Klinkosch c) beschriebene, ebenfalls ausgetragene Kind war ein Knabe, welcher eine halbe Stunde nach der Geburt starb, und dessen Mifsbildung sehr viel gröfser als in meinem und Malacarne's Fall war. Die Knochenbildung des Schedels war sehr zurück geblieben; die Stirn bildete eine grofse Geschwulst, die Nase fehlte, der Mund war sehr verunstaltet; die mehrsten Gesichtsmuskeln fehlten; das linke Auge war von einer einzigen Haut gebildet und stellte mehr eine Hydatide vor, welche zwischen den Augenliedern hervorragte, übrigens aber tiefer stand, als die kleine narbenartige Stelle, welche gleichsam die Augenliederspalte des fehlenden rechten Auges bezeichnete. Das Gehirn war nicht in die gewöhnlichen beiden Hemisphären und deren Lappen getheilt. Die beiden Seitenhöhlen gingen mit der dritten in einen grofsen Sack zusammen, der gegen neun Unzen klaren Wassers enthielt. An der obern Decke dieses Sacks (vom *Corpus callosum* spricht der Verfasser gar nicht) hing das Gewölbe ohne eine Scheidewand. Die vordern Schenkel des Gewölbes gingen nach unten hinter der vordern Commissur unter den Sehhügeln in das Mark der grofsen Hirnschenkel über; die hintern Schenkel des Gewölbes waren verwischt (*oblitterata*). Die Zirbeldrüse und die Vierhügel waren schwer, die gestreiften Körper und die Sehhügel leichter zu unterscheiden. Aus der dritten Höhle führte ein weiter trichterförmiger Gang in einen Sack der harten Hirnhaut, welcher durch den Körper des Keilbeins in die Mundhöhle hinein ragte, und worin der hohle Anhang des Gehirns (*glanduda pituitaria*) lag. In der vierten Höhle, im kleinen Gehirn, im verlän-

c) *Josephi Thaddaei Klinkosch programma quo anatomen partus capite monstroso proponit. Prag* 1766. 4. *recus. in: Dissertationibus Medicis select. Pragensibus. Vol. I. Prag.* 1755. 4. *n. XII. p.* 199—208.

gerten und Rückenmark war nichts abweichend. Die ersten sechs Nervenpaare fehlten gänzlich, die übrigen waren wie gewöhnlich beschaffen. Obgleich das fünfte Nervenpaar fehlte, so waren doch alle seine aufserhalb des Schedels befindlichen Zweige vorhanden, so dafs sich Klinkosch darüber ausdrückt, sie wären gleichsam aus sich selbst entsprungen. Auch der sympathische Nerve, sagt er, sey im *sinus cavernosus* gleichsam durch sich selbst entstanden.

Vergleicht man diese Fälle, so sieht man gleich den wichtigen Unterschied, dafs in ihnen die Nerven auf beiden Seiten fehlten, während dies in meinem Fall nur auf einer Seite statt fand, so wie auch hier das Gehirn ganz unsymmetrisch erschien. Malacarne hat das Gehirn, wie ich oben gezeigt habe, entweder nicht untersucht, oder normal gefunden. Klinkosch fand dasselbe durch eine grofse Wasseransammlung höchst verändert, und von dieser möchte fast alles, was er angiebt, herzuleiten seyn. Wenn aber auch in meinem Fall zwar in der dritten, so wie in der Höhle der Scheidewand, sich Wasser angehäuft hatte, und man dies Wasser mehr nach einer Seite wollte drängen lassen, so fragte sich doch, warum es denn mehr nach einer Seite drängte, und Niemand würde auch dadurch die vielen oben von mir einzeln angegebenen Anomalien zu erklären im Stande seyn. Ist aber das Ganze hier nicht in Ansehung seines Ursprungs deutlich, so bietet doch dieser Fall eine Menge höchst interessanter Resultate dar.

III. Bemerkungen.

1. Noch immer können sich die Physiologen nicht von der Idee trennen, als ob ein Theil durch den andern gebildet würde, oder von ihm ausliefe, und doch ist das Falsche dieser Ansicht in die Augen springend. Man streitet sich noch immer, ob das Gehirn vom Rückenmark, oder dieses von jenem, ob die Nerven von beiden entspringen, und sofort; obgleich nichts von dem allen gegründet ist, sondern jeder Theil an seiner Stelle nach bestimmtem Typus geformt wird, wofern kein Hindernifs an diesem Punkt statt findet.

Die Fälle, wo das Rückenmark ohne Gehirn vorkommt, sind sehr häufig; die, wo die Nerven ohne Gehirn und Rückenmark gefunden werden,

den, kommen auch nicht sogar selten vor. Ich habe selbst die Zergliederung einer solchen Mifsgeburt angestellt, und wo ich einen Nerven am Kopf oder an den Gliedmafsen untersuchte, da fand ich ihn völlig normal beschaffen; gegen das fehlende Rückenmark hin endigten sich alle Nerven mit hohlen Scheiden, und traten so in Verbindung mit dem Theil der harten Hirnhaut, der hier allein vorhanden war. Ob das Gehirn ohne Rückenmark vorkommen könne, bezweifeln Sömmerring [d]) und Meckel [e]), allein der Fall spricht offenbar dafür, wo auf dem Kopf eines Kindes blofs ein zweiter Kopf steht; denn man weifs ja, dafs wenn Kinder oder Thiere [f]) mit der Scheitel zusammentreten, keine Verbindung unter den Gehirnen oder dem Rückenmark statt findet. Man hätte auch nur darauf zu sehen brauchen, dafs Kinder oder Thiere mit zwei Köpfen und einem Rückgrath, oder mit zwei Wirbelsäulen und einem Kopf geboren werden. Da ist nicht alles, sondern nur manches doppelt, das andre einfach; hätte das Rückenmark aber das Gehirn zu bilden, so müfste dieses ja nothwendig doppelt seyn, wo es jenes ist. Wie hier alles bewundernswürdig an einander gereiht ist, sehen wir es auch an den doppelten Zungen und dem einfachen Kehlkopf solcher Mifsgeburten; und so überall.

Wie wenig ein Theil von dem andern abhängig ist, oder von ihm gebildet wird, sehen wir auch an den halben oder Viertelskörpern, wo bald der Kopf, bald der Kopf und die Brust und die obern Gliedmafsen, bald auch selbst ein Theil des Unterleibes fehlt. Hier bleibt oft nur ein sehr geringes Stück des Rückenmarks, hier ist keine Bildung von einem Herzen des Kindes oder Thiers aus, und doch sind die wenigen vorhandnen Theile, z. B. die untern Extremitäten, ganz ausgebildet.

Auch in unserm vorliegenden Fall hat der linke Sehnerve seinen Verbindungszweig, obgleich der rechte, mit dem er sich zu verbinden hätte, fehlt, und so geht seine Scheide blofs in die harte Hirnhaut.

d) *De corporis humani fabrica. T. IV. p.* 158. §. 171.

e) Handbuch der pathologischen Anatomie. I. S. 350.

f) Unser anatomisches Museum besitzt den seltenen Fall, wo ein Paar Enten blofs an der obern Seite des Kopfs zusammenhängen.

Wir können daher alle Streitigkeiten über die Bildung eines Theils aus dem andern sehr füglich fallen lassen. Wenn auch ein Theil früher erscheint als der andere, so macht dies nichts aus, wie wir ja z. B. sehen, wenn die sich viel später bildende Extremität mit Nerven und Gefäfsen versehen ist, während Herz und Rückenmark fehlt. In dem Augenblick, als der Keim des organischen Körpers gebildet ist, liegt die Grundzeichnung aller seiner Theile da, wenn gleich nicht immer für uns leserlich. Ich bin durch die Pflanzenanatomie vorzüglich hierüber belehrt worden, wo im zartesten Keim die Stellen für alle Gefäfse angedeutet sind, während diese selbst noch fehlen; jetzt sehe ich in allem die Bestätigung davon.

2. Gegen den eben vertheidigten Satz streitet es nicht, dafs die zu einem System gehörigen Theile häufig zusammen fehlen, denn alsdann hemmt eine gemeinschaftliche Ursache die Entwicklung in der ganzen Ausdehnung des Systems. So fehlten hier mit dem Auge und dessen Muskeln auch alle dahin gehörigen Nerven, so auch in dem Fall von Malacarne und Klinkosch die Nerven beider Augen, nur dafs der letztere ein Rudiment von einem Auge beobachtete. Dafs die Augenlieder in dem von mir hier erzählten Fall fehlten, war eine besondere Misbildung. Malacarne sah bei seiner Mifsgeburt, trotz der fehlenden Augen, die Augenlieder völlig ausgebildet, und dasselbe fand ich vor ein Paar Jahren bei einer hirnlosen Mifsgeburt, die keine Augen hatte, wo aber die Augenlieder mit ihren Wimpern u. s. w. ganz normal waren.

3. Aus dieser so häufig vorkommenden Erfahrung, dafs die zu einem System gehörenden Theile leicht mit einander abweichen, möchte man hier wohl ungezwungen auf die nähere Beziehung der Sehhügel zu den Sehnerven schliefsen, obgleich jetzt das Gegentheil davon häufig angenommen wird.

Gall nämlich leitet bekanntlich die Sehnerven von den Vierhügeln und von dem *Corpus geniculatum* her, und läugnet gänzlich ihren Ursprung von den Sehhügeln, worin ihm die mehrsten Neueren gefolgt sind. Allerdings kann man auch bei dem Menschen einen, aber nur kleinen Theil der Fasern des Sehnerven bis zu den Vierhügeln verfolgen, der gröfsere aber hängt bestimmt mit den Sehhügeln zusammen, von denen ja auch nur

das *Corpus geniculatum* einen Theil ausmacht, so dafs dadurch Gall selbst seine Meinung gewissermafsen einschränkt. Es freut mich, dafs Rosenmüller in der diesjährigen neuen Ausgabe seines Handbuchs der Anatomie standhaft geblieben ist, und den Sehhügeln ihr Recht läfst; ich sehe wenigstens alle Jahre durch viele Sectionen die von mir angegebene Verbindung bestätigt.

In Klinkosch Fall war die Zerstörung durch den Wasserkopf zu grofs, als dafs man daraus etwas herleiten könnte. Malacarne läfst zwar mit den Sehnerven die Sehhügel fehlen, welches ganz für meine Meinung sprechen würde, allein seiner Beobachtung ist wenig zu trauen, wie ich oben gezeigt habe.

Der hier beschriebene Fall aber, wo ein Auge mit allen Nerven fehlte, das andere mit allen da war, scheint mir sehr beweisend. Die Vierhügel waren auf beiden Seiten ganz gleich, dahingegen welch ein Unterschied unter den Sehhügeln! Der eine mit einem gehörig gebildeten Sehnerven zusammenhängende ganz natürlich, der andere hingegen ganz aus seiner Lage weichend, hinabtretend und in das Ammonshorn übergehend. Und kann der cylindrische Fortsatz, mit dem er übergeht, wohl für etwas anders, als für ein Analogon des Sehnervens gehalten werden?

Man sieht auch hierin die gröfste Harmonie mit den Fällen, wo bei Menschen und Thieren nach langem Erblinden eines Auges der Sehnerve einschrumpft, und mit ihm der Sehhügel, aber nicht die Vierhügel.

4. Dies leitet mich auf die so oft bestrittene und vertheidigte Durchkreuzung der menschlichen Sehnerven. Wie Sömmerring immer in solchen Fällen den Sehhügel der entgegengesetzten Seite geschwunden gesehen hat, so mufs ich auch gestehen, dafs wo ich einen Sehhügel in einem solchen Fall geschwunden gesehen habe (bei einer Dohle, bei einem Pferde, und bei ein Paar Menschen), es sich eben so verhielt; mehrere Male sahe ich aber das Schwinden der Nerven ohne gleichzeitige Abnahme der Sehhügel.

Wie wenig aber hierdurch für eine wirkliche, vollständige Kreuzung bewiesen wird, zeigen die von Mehreren bekannt gemachten Fälle, in denen

der Sehhügel der nämlichen Seite, wo das Auge erblindet war, ein solches Schwinden erkennen liefs.

Der jetzt von mir beschriebene Fall aber ist entscheidend. Der einzige vorhandene Sehnerve nämlich geht zu dem Auge derselben Seite. Dabei schickt er aber einen Verbindungszweig in die Queere ab; eine Kreuzung wird also allerdings möglich, nämlich nur in den Fibern des Queerastes.

Wie wenig übrigens die bei den mehrsten Thieren statt findende Kreuzung für das Sehen wesentlich ist, sehen wir aus der schon vor funfzehn Jahren g) von mir bekannt gemachten Beobachtung, dafs bei einigen Fischen keine Durchkreuzung statt findet; ja dafs bei einigen Arten derselben Gattung (*Pleuronectes*) die Durchkreuzung fehlt, und bei andern vorhanden ist; dafs auch bei derselben Art bald der eine, bald der andere Nerve oben liegt. Ueberhaupt mufs der Anatom gestehen, wenn er nicht absichtlich blind seyn will, dafs unendlich vieles, das ihm zuerst sehr wesentlich scheint, nur Nebenzwecke erfüllt, z. B. sich auf eine bequemere Zusammenstellung, auf mindere Raumeinnahme und dergleichen bezieht.

5. Ueber den Ursprung des Geruchsnerven beweist dieser Fall offenbar gegen Gall, denn man kann hier durchaus nicht einen Zusammenhang mit andern Theilen darthun, als mit dem vordern Lappen des grofsen Gehirns. Auch sind hier beide vordere Lappen, da nur der eine mit dem Geruchsnerven zusammenhängt, keineswegs gleich.

6. Die Oeffnung, welche die Gebrüder Wenzel h) in der Höhle der Scheidewand annehmen, und wovon sie einen Kanal nach der dritten Höhle gehen lassen, habe ich bei der genauesten Untersuchung in normalen Gehirnen nie gefunden, obgleich ich sehr oft darnach gesucht habe, und mir wahrlich einerlei war, ob die Oeffnung da sey oder nicht, da ich nur

g) Wiedemann's Archiv für Zoologie und Zootomie. Braunschweig 1800. 8. 1. B. 2. St. S. 156. vermehrt in meinen Anat. physiol. Abhandl. Berlin 1802. 8.

h) Prodromus eines Werkes über das Hirn der Menschen und der Thiere. Tübing. 1806. 8. S. 7. *Josephus et Carolus Wenzel de penitiori structura cerebri hominis et brutorum. Tubing.* 1812. *fol. p.* 70.

das Wahre wissen und lehren will. Auch im Gehirn eines jungen Mädchens, das am innern Wasserkopf gestorben, und wo die Höhle der Scheidewand sehr grofs war, fand ich keine Oeffnung darin. Dasselbe ist mir auch hier begegnet, und das Präparat erlaubt noch Jedem die Untersuchung, welche hier um so beweisender seyn mufs, da bei der grofsen Ausdehnung der Höhle auch wohl jene Oeffnung, und jener Kanal, wovon die Gebrüder Wenzel sprechen, vergröfsert seyn müfsten.

7. Eben so beweisend ist dieser Fall für das Nichtdaseyn einer Oeffnung aus der dritten Höhle in den Trichter, da ihre vordere Vertiefung, so wie ihre ganze Ausdehnung, so sehr beträchtlich ist. Der Fall, den der treffliche Klinkosch beschrieb, unterscheidet sich sehr in diesen Theilen, allein es fand dort durch den innern Wasserkopf eine sehr grofse Mifsbildung statt, und der Boden der dritten Hirnhöhle war wohl zum Theil zerstört.

8. Sehr interessant ist in dem vorliegenden Fall die gleich geringe Ausbildung beider Schenkel des Gewölbes auf der rechten Seite, wodurch die Symmetrie des Gehirns sehr gestört wird, auch dafs das rechte Markkügelchen fehlt, wodurch dessen Zusammenhang mit dem vordern Schenkel des Gewölbes aufs Neue dargethan wird.

9. Die Bemerkung der Gebrüder Wenzel, dafs das Ammonshorn, oder die gerollte Wulst, eine Fortsetzung der äufsern Hirnwindungen sey, findet hier ihre Bestätigung, wo jenes Horn auf der rechten Seite sowohl in der Höhle, als unten, viel schwächer ist.

Auch mufs ich bemerken, dafs ich nicht blofs bei Erwachsenen überhaupt das Ammonshorn an Gröfse verschieden gefunden, sondern dafs ich es selbst an der einen Seite desselben Gehirns gröfser als an der andern gesehen habe. Ebenfalls kann ich die Beobachtung der Gebrüder Wenzel bestätigen, wenn sie ähnliche Abweichungen von den Hervorragungen im hintern Horn der grofsen Hirnhöhlen anführen.

10. Sehr auffallend ist mir die Verschiedenheit der noch ganz problematischen Oliven-Körper in dem von mir beschriebenen Fall. Ueber

ihre Beziehung wissen wir freilich noch gar nichts; indessen wenn mehr abweichende Gehirne untersucht werden, so erhalten wir über sie und über andere Theile des Gehirns vielleicht bald mehr Aufschlüsse.

IV. Erklärung der Abbildungen.

Erste Tafel.

Die Basis des Gehirns.

A auf der linken Seite:

1. der Geruchsnerve;
2. der Sehnerve;
3. dessen Fortsatz zur Verbindung mit dem der andern Seite;
4. das Markkügelchen (*Eminentia candicans*);
5. der dritte,
6. der vierte,
7. der sechste Nerve.

Alle diese Theile fehlen auf der rechten Seite B.

8. Der hervorgetretene Sehhügel (*thalamus opticus*), welcher mit einem kurzen cylindrischen Fortsatz, gleichsam den Anfang eines Sehnerven, in
9. das hervorgetretene Ammonshorn übergeht.
10. Die auf dieser Seite sehr starke Grube des Sylvius.
11. Eine hintere sehr starke Vertiefung zwischen den Hirnwindungen.
12. Der auf dieser Seite gröfsere Olivenkörper.

Zweite Tafel.

1. Der schwielige Körper (*corpus callosum*), welcher nach hinten
2. auf der rechten Seite viel früher aufhört, als bei
3. auf der linken.
4. Die schwache Binde (*Taenia*) und der schwache hintere Schenkel des Gewölbes der rechten Seite.
5. Das sehr kleine, beinahe fehlende linke Horn der grofsen rechten Gehirnhöhle.
6. Das Ende des sehr kleinen mittleren Horns derselben.
7. Das grofse Durchgangsloch für das Adergeflecht.
8. Der aus der Hirnhöhle herausgetretene (herausgefallene) rechte Sehhügel.
9. 10. Die gestreiften Körper, wovon der rechte nicht so weit nach vorne reicht.
11. Der linke Sehhügel.
12. Die linke Binde und das Ammonshorn, welches sich gehörig in das mittlere Horn der grofsen Höhle hinabsenkt.
13. Das hintere,
14. das mittlere Horn der linken grofsen Seitenhöhle.
15. Der Eingang in die Wasserleitung des Sylvius.
16. Die regelmäfsig beschaffenen Vierhügel.

Dritte Tafel.

a. a. Das der Länge nach gespaltene und nach beiden Seiten zurückgeschlagene *corpus callosum*.

b. Die aufserordentlich erweiterte Höhle der Scheidewand.

c. Die vordere Grube darin.

Alles übrige ist wie auf der zweiten Tafel.

Vierte Tafel.

1. Das queerdurchschnittene und nach vorne mit dem Gewölbe zurückgeschlagene *corpus callosum*.
2. Der linke vordere Schenkel des Gewölbes, natürlich beschaffen.
3. Der fast ganz fehlende oder nur beinahe aus dem Epithelium bestehende rechte vordere Schenkel des Gewölbes (*Fornix*), von dem auch kein Markkügelchen gebildet ist, wie die erste Tafel zeigt.
4. Der zurückgeschlagene linke hintere Schenkel des Gewölbes.
5. Das Ammonshorn.
6. Der zurückgeschlagene rechte hintere Schenkel des Gewölbes.
7. 8. Die gestreiften Körper.
9. 10. Die Sehhügel.
11. Die dritte Hirnhöhle.
12. Der aufserordentlich erweiterte Eingang zum Trichter.
13. Der Eingang zur Wasserleitung des Sylvius.
14. Die Vierhügel.

Die

Die Werke von Marcgrave und Piso über die Naturgeschichte Brasiliens, erläutert aus den wieder aufgefundenen Originalzeichnungen.

Von Herrn Lichtenstein *).

Johann Moritz, Graf und nachmals Fürst von Nassau-Siegen, ward im Jahr 1636 als Befehlshaber einer bedeutenden holländischen Macht nach Brasilien gesandt, um die früher schon gemachten Eroberungen gegen die Angriffe der Spanier zu behaupten, der jungen Colonie eine feste Verfassung zu geben, und sie, wo möglich, noch über einen weitern Flächenraum auszudehnen. Am 24sten Jan. 1637 stieg er bei Olinda ans Land, warf bald darauf die spanische Armee über den Rio Francisco zurück, legte an dessen Ufern und längs der Seeküste eine Reihe von Festungswerken an, und sicherte so und mit Hülfe einer tapfern Flotte sein neues Gebiet, auf dessen inneres Wohl er nun seine ganze Aufmerksamkeit wendete. Landbau und Handel wurden nach Kräften befördert, eine neue Stadt, Mauritia genannt, wurde erbaut, mit holländischen Handwerkern und den reichsten und edelsten Bürgern des Landes von spanischer Herkunft, bevölkert,

*) Vorgelesen den 9. November 1815.

mit Kirchen und kostbaren Brücken verschönert, und nahe dabei das Lustschloſs Freiburg angelegt, in dessen Zwingern und Gärten Graf Moritz die Thiere und Pflanzen des Landes sammeln und von seinen gelehrten Begleitern lebend beobachten, beschreiben und abbilden liefs. Nicht nur ins Innere des Landes sandte er deshalb seine Reisenden, sondern auch von der gegenüber liegenden afrikanischen Küste, an welcher die Holländer einzelne Niederlassungen hatten, ja sogar von Chili, wohin von der westindischen Compagnie einige Schiffe ausgeschickt waren, liefs er sich alle Arten von Naturmerkwürdigkeiten herbeibringen, und sorgte selbst, dafs nichts übersehn und vernachlässigt werde. Als nach einem siebenjährigen Aufenthalt die veränderten politischen Verhältnisse Europens und der Widerwillen seiner spanisch-portugiesischen Unterthanen ihn zwangen, Brasilien zu verlassen (dessen holländischer Antheil auch wenige Jahre nachher den Spaniern ganz wieder anheim fiel), brachte er die reichste Naturaliensammlung zurück, die je in einem Transport nach Europa gekommen ist. So grofs war der Vorrath, dafs das Naturalienkabinet des Fürsten, die Museen zweier Universitäten und manche Privatsammlungen (unter andern die nachmals Sebasche) damit bereichert werden konnten, und länger als ein Jahrhundert hat die Wissenschaft noch von diesem Vorrath gezehrt.

Mehr aber noch als diese Sammlungen trugen die schriftlichen Werke, welche über die zahlreichen neuen Entdeckungen bekannt gemacht wurden, zum Ruhm des Prinzen bei. Er hatte, wie schon erwähnt, einige Gelehrte mit auf die Reise genommen, die seine beständigen Begleiter auf allen Streifzügen, und daheim seine Hausgenossen blieben. Es waren der Prediger Franz Plante, der Leibarzt Wilhelm Piso, der Astronom Georg Marcgrave von Liebstadt bei Meifsen, und H. Cralitz, ebenfalls ein junger deutscher Gelehrter, der aber gleich nach der Ankunft in Brasilien starb. Dasselbe Schicksal traf nach beendigter Expedition auch den wackern Marcgrave, als er im Jahr 1644 nach Afrika überschiffte, um dort seine Beobachtungen fortzusetzen; das in San Paolo de Loanda einheimische Fieber tödtete ihn im 34sten Jahre seines Lebens. Aus dem bewundernswerthen Fleifs, mit welchem er während seines Aufenthalts in Brasilien seine Wahrnehmungen angestellt und verzeichnet hatte, möchte man fast schliefsen, er habe einen frühen Tod geahnet und seinen Ruhm zu sichern geeilet. Denn aufser einer grofsen Menge von Landkarten und Plänen, die er für den Prinzen angefertigt hatte, hinterliefs er ein astronomisches Ma-

nuscript, welches die Beschreibung aller südlichen Gestirne, eine neue Theorie der untern Planeten, die Lehre von den Refractionen und Parallaxen, die Theorie der Längenbestimmung und eine Abhandlung über das rechte Verfahren, die Dimension des ganzen Erdballs zu finden, enthielt, und zum grofsen Nachtheil der Wissenschaft verloren gegangen ist. Denn obgleich es der Prinz dem berühmten Professor Golius zu Leyden zur Herausgabe übergeben, so ist doch nie davon etwas öffentlich bekannt geworden und damit ohne Zweifel ein grofses Unrecht begangen, denn vielleicht gebührte schon unserm Marcgrave der Ruhm, den sich später die Franzosen de la Caille und Condamine erwarben.

Ein günstigeres Geschick erfuhr ein andrer Theil seiner Arbeiten, in welchem er eine für die damalige Zeit höchst bedeutende Menge von Beobachtungen zur Naturgeschichte Brasiliens zusammengetragen hatte. Diese übergab der Prinz dem Doctor Piso, um sie, bereichert mit dessen eignen Wahrnehmungen über das brasilische Clima, die herrschenden Krankheiten und die bewährtesten einheimischen Arzneimittel der Welt bekannt zu machen. Allein Piso, damals eben mit andern Arbeiten überhäuft, überliefs das Geschäft, die Marcgravischen Papiere zu ordnen, einem der Vorsteher der westindischen Compagnie, auf dessen Empfehlung der Prinz auch bei seiner Ausreise Marcgrave zum Begleiter gewählt hatte, dem gelehrten und durch frühere Schriften berühmten Doctor Johannes de Laet. Dieser fand indessen keine geringe Mühe, indem Marcgrave alles mit von ihm selbst erfundenen Schriftzeichen niedergeschrieben hatte, damit ihm Niemand die Ehre der ersten Mittheilung entziehen könne. Es fand sich freilich auch unter den Papieren der Schlüssel zu dieser Schrift, da aber alle Bemerkungen auf einzelnen Blättchen verzeichnet waren, so war es wieder eine schwierige Arbeit, die Ordnung des Ganzen vollkommen herzustellen. Nachdem dies endlich gelungen war, und auch Piso den von ihm ausgearbeiteten Theil geliefert hatte, gab der Prinz die, wahrscheinlich von Marcgrave selbst und von einem andern, zwar in den Schriften erwähnten, aber nicht namhaft gemachten Maler verfertigten Abbildungen her, um dieselben im Holzschnitt zu vervielfältigen und das Werk damit zu zieren und zu erläutern. Bei diesem Geschäft ist jedoch, wie durch gegenwärtige Abhandlung erwiesen werden soll, nicht mit der wünschenswerthen Genauigkeit und Sorgfalt verfahren, denn theils sind die Abbildungen nicht durchgängig treu, sogar für manche Gegenstände eben vorräthige Holzschnitte aus andern

Werken benutzt, theils sind sie durch Unkunde des Setzers und Nachlässigkeit des Herausgebers an den unrechten Stellen in den Text eingefügt, welches Alles der Brauchbarkeit des letztern grofsen Eintrag gethan und die mehrsten der Irrungen herbeigeführt hat, welche hier gelöst werden sollen.

Inzwischen erschien das Werk in einem mäfsigen Folioband im Jahr 1648, unter dem Titel: *Historia naturalis Brasiliae*, enthaltend zuerst Piso's medicinische Abhandlungen in vier, und Marcgrave's naturhistorische in acht Büchern, von welchen wiederum die drei ersten von den Pflanzen, vier von den Thieren, und eins von dem Lande und seinen Bewohnern handeln. De Laet besorgte die Herausgabe in Piso's Abwesenheit, der sich nachher wenig damit zufrieden bezeigte und sie der Flüchtigkeit und Uebereilung beschuldigte. In dem von ihm zehn Jahre später (1658) herausgegebnen Werk: *De Indiae utriusque re naturali et medica*, meinte er die gerügten Fehler zu heben; doch ist ihm dies nicht so gelungen, dafs man es als eine verbesserte Ausgabe betrachten oder das Marcgravische Werk für dadurch ersetzt und überflüssig gemacht ansehn könnte. Vielmehr ist es nach Form und Stoff durchaus abweichend, wiewohl oft mit dem Marcgravischen gleichlautend, ohne auf dasselbe bezogen zu sein. Der Hauptfehler, der in der Untreue und Verwechselung der Holzschnitte bestand, war durch Piso nicht gehoben, vielmehr hatte er, vielleicht aus Mifstrauen in ihren Werth und weil ihm die Original-Abbildungen nicht mehr zu Gebot standen, die mehrsten Abbildungen der Thiere zusammt den Beschreibungen, gänzlich weggelassen, und so das Hauptverdienst für die Zoologie seinem Vorgänger eingeräumt. Seine Arbeit zerfiel in sechs Abschnitte, von welchen der erste vom Clima, der zweite von den Krankheiten, der dritte von den Thieren, der vierte von den Pflanzen, der fünfte von den Giften und Gegengiften handeln, und der sechste, unter dem Namen *Mantissa aromatica*, die heilkräftigen Gewächse aufzählt. Angefügt sind Marcgrave's meteorologische und linguistische Bemerkungen und des Arztes Bontius Beschreibung von Java in sechs Büchern.

Unterdessen war schon im Jahr 1652 der Graf Moritz von Nassau-Siegen in die Dienste des grofsen Churfürsten von Brandenburg getreten und von diesem 1654 in den Fürstenstand erhoben und mit hohen Aemtern bekleidet worden. Das Band einer vertrauten Freundschaft, das diese Fürsten bis zum Tode des Prinzen (der 1679 im 76sten Jahre starb) umschlofs, vermochte wahrscheinlich diesen, die Originalzeichnungen, die er

während seiner Verwaltung in Brasilien hatte anfertigen lassen, dem Wissenschaft liebenden Monarchen zum Geschenk anzubieten. Sie bestanden in einer zahlreichen, doch ungeordneten Sammlung aller von jenem ungenannten Meister in Oel auf Papier gemalten Abbildungen von Naturgegenständen, und in zwei Bänden, die ähnliche, jedoch kleinere, in Wasserfarben enthielten. Jene verdienten schon wegen der hohen Vollkommenheit der künstlerischen Behandlung grofse Aufmerksamkeit, daher befahl der Churfürst, sie sorgfältig zu ordnen und in seiner Büchersammlung aufzubewahren. Dies Geschäft des Ordnens fiel in die geschickten Hände des Leibarztes Doctor Christ. Menzels, der auch als Linguist berühmt geworden ist und bei seinem Herrn in grofser Gunst stand. Von ihm wurden die einzelnen auf Blätter von ungleicher Gröfse gemalten Bilder in vier Bände vom gröfsten Format eingeheftet, jedes an dem Ort, den es nach einem zum Grunde liegenden ganz verständigen Plan einnehmen mufste *), und begleitet von wiederholter Angabe seines brasilianischen Namens und der Stellen bei Marcgrave und Piso, an welchen seine weitere Beschreibung zu finden war; auch ist die kleinere Sammlung in Wasserfarben jedesmal citirt, wenn sie denselben Gegenstand abgebildet enthält. Für jeden bei den ebengenannten Schriftstellern vorkommenden Namen ist ein Blatt freigelassen, wenn sich etwa dazu noch eine Abbildung späterhin möchte gefunden haben.

Diese Arbeit scheint den gelehrten Arzt vier Jahre lang beschäftigt zu haben, denn das Titelblatt führt die Jahrszahl 1660, und die Vorrede, mit welcher der Ordner dem Fürsten sein Werk überreicht, ist von 1664. Wir lernen aus derselben wenig Neues, nicht einmal den Namen des Malers, und nur wenige einzelne Nebenumstände, die auf die Geschichte dieser Materialien einiges Licht werfen. Menzel bringt, indem er hier seine Mühe überdenkt, den Dank der Nachwelt, auf den er rechnen zu können meint, sehr

*) So enthält der erste Band die Wasserthiere: Fische, Krebse, Mollusken, Würmer u. s. w., der zweite die Vogel, der dritte die Saugethiere, Amphibien und Insekten, und der vierte die Pflanzen und Früchte. Die Zahl aller hier abgebildeten Gegenstande (die doppelt und aus mehrern Ansichten gelieferten nicht mitgerechnet) betragt 425 Sie sind, wo es möglich war, in Lebensgröfse, wo nicht, doch immer in grofsem Mafsstab, auf Blättern von 12 bis 24 Zoll Grofse vorgestellt. Die durchgangige Haltung dieser Bilder und die verständige Anwendung aller Kunstmittel lassen so wenig etwas zu wünschen übrig, als die Treue der Darstellung. Die Farben sind noch in diesem Augenblick so frisch, wie man sie nur bei den am besten erhaltnen Oelgemalden aus jener Zeit antrifft.

in Anschlag; und in der That, abgesehn davon, dafs er den Auftrag seines Herrn treulich vollbracht, und aus dieser Sammlung auch in Hinsicht auf kalligraphische Kunst, den Werth der neugemalten Titelblätter u. s. w., etwas der Büchersammlung eines Fürsten Würdiges dargestellt hatte, so mufs die Wissenschaft es ihm Dank wissen, dafs er auf diese Weise die vorzüglichsten Denkmäler jener Expedition nach Brasilien vor dem nahen Untergange bewahrt hat, den sie ohne seine grofse Sorgfalt wohl ohnfehlbar gefunden haben würden.

Leider bin ich der erste, der diesen Dank ausspricht, und anderthalb Jahrhunderte sind verflossen, in welchen man nichts von dem Dasein dieser Sammlung gewufst hat. Der Grund davon ist vielleicht Menzeln selbst zuzuschreiben, der das Vorhandensein eines Werks von solcher Wichtigkeit wohl zu öffentlicher Kunde hätte bringen sollen; und zu der Zeit, als Linné und seine Zeitgenossen den Werth der Marcgravischen Nachrichten erkannten und priesen, mochte wohl keiner von den Gelehrten, die die Königl. Büchersammlung kannten, gerade diesem Theil der Naturwissenschaft seine Aufmerksamkeit gewidmet haben. Es ist nicht zu sagen, welch eine Menge von Zweifeln und schwankenden Muthmafsungen und wie viel überflüssiges Gerede über beides der Welt erspart worden wäre, wenn man damals schon diesen Schatz entdeckt hätte, und wenn Linné oder Brisson, oder auch nur Buffon, ihn bei ihren Arbeiten hätten zu Rath ziehen können. So blieb den gegenwärtigen Aufsehern der hiesigen Königl. Bibliothek das Verdienst bewahrt, ihn ans Licht zu ziehn, und erst im Jahr 1811 ward sein ganzer Werth erkannt, als unser verstorbner Illiger den Vorsatz fafste, die nur hier mögliche Aufklärung gehäufter, wiewohl verzeihlicher Irrthümer zu unternehmen, und durch unbezweifelbare Bestätigung oder Widerlegung früherer Muthmafsungen der Wissenschaft einen wesentlichen Dienst zu leisten. Auch diese Arbeit betrachte ich daher als eins von den theuren Vermächtnissen, die mir sein Andenken heiligen, und früher, als manche andre, nicht minder anziehende, fafste ich sie darum auf, damit seinem Willen ein Genüge geschehe.

Das andre handschriftliche Werk, welches der Prinz Moritz dem Churfürsten verehrte, ist die Sammlung von Abbildungen in Wasserfarben, die zwar alle in kleinerem Mafsstab und von viel geringerer künstlerischer Vollkommenheit sind, auch oft nur als Copien jener Oelgemälde erscheinen, aber daneben doch auch viel Neues, nach Gegenstand und Behandlung Ei-

genthümliches, darstellen, und, trotz der oft übermäfsigen Verkleinerung, doch immer sich in den Verhältnissen naturgetreu und durch Heraushebung wesentlicher Merkmale charakteristisch bewähren *). Ich habe mancherlei Grund zu vermuthen, dafs diese Zeichnungen von Marcgrave's eigner Hand sind; denn einmal ist von solchen an manchen Stellen der genannten Werke, auch in Caspar Barlaeus Geschichte der Thaten des Prinzen Moritz, die Rede; 2) wird aufser jenem anonymen Oelmaler nie ein andrer erwähnt, dem man diese zuschreiben könnte; 3) stimmen sie in Verhältnissen und Farben immer sehr gut zu den Marcgravischen Beschreibungen; 4) ist unverkennbar, dafs die Holzschnitte im Marcgrave meistens nach ihnen gemacht sind; 5) sind die Schriftzüge der beigefügten Namen nicht von der damals in Holland gewöhnlichen Art, sondern mehr deutsch; und endlich 6) ist vielleicht darin noch ein Grund für diese Meinung zu finden, dafs der Prinz selbst, der Marcgrave sehr liebte, bei diesen und nicht bei jenen grofsen seine eigenhändigen Bemerkungen hinzugefügt hat. Dafs aber diese wirklich vom Prinzen herrühren, erwähnt Menzel ausdrücklich in der Vorrede zu der grofsen Sammlung, auch geht es aus der Aehnlichkeit der Schriftzüge mit den seinigen hervor, wie wir sie vor dem noch auf unserer Bibliothek befindlichen Exemplare vom Barlaeus, welches der Prinz dem Churfürsten widmet, finden, und dann können die Stellen, an welchen der Schreiber in der ersten Person spricht, nicht wohl anders als auf den Prinzen bezogen werden. Diese in einer gedrungnen, mit Holländisch stark untermischten und oft halb scherzhaften Sprache abgefafsten Bemerkungen geben den Aufenthalt, die Lebensart, Nahrung, und was besonders wichtig ist, jedesmal die Gröfse des abgebildeten Thiers an, über welche sich bei Marcgrave so selten einige Auskunft findet; sie haben daher allerdings viel Wichtigkeit.

Das Schicksal dieser kleineren Sammlung ist nicht ganz so ungünstig gewesen, als das der gröfseren. Denn schon vor nunmehr dreifsig Jahren wurde sie wieder aufgefunden und von dem um Philologie und Naturgeschichte in gleichem Grade verdienten Schneider in einem kleinen Aufsatz im dritten Stück des Leipziger Magazins für Naturkunde und Oekono-

*) Sie sind in zwei kleinen Foliobänden von ungleicher Gröfse enthalten, und die geringe Ordnung in ihrer Aufeinanderfolge, die vielen leeren Blätter und noch manches andre läfst vermuthen, dafs sie gleich an Ort und Stelle in diese Bücher eingezeichnet wurden. Die Zahl der dargestellten Gegenstände ist 326.

mie vom Jahr 1786 beschrieben, dort auch schon die Deutung einiger dieser Abbildungen in Vergleichung mit den Marcgravischen Holzschnitten versucht. Um dieselbe Zeit liefs Bloch einige der hier abgebildeten Fische für sein Werk in Kupfer stechen, und Schneider ermunterte die deutschen Zoologen zu weiterer Benutzung dieses Vorraths, die aber dennoch bis jetzt unterblieben ist, auch in der That, so lange jene gröfsere Gemälde verborgen blieben, nicht recht fruchtbar ausfallen konnte.

Damit wir nun aber hier in den völligen und gleichsam ausschliefslichen Besitz aller wichtigern Denkmäler von den naturhistorischen Endekkungen jener Reise gesetzt würden, so hat ein seltsamer Zufall unserm Collegen, dem Herrn Professor Rudolphi, ein nach jenen Originalen illuminirtes Exemplar des Marcgravschen Werks durch Kauf zugeführt, welches höchst wahrscheinlich kein andres als des Prinzen Moritz selbsteignes ist. Denn auch hier sind von seiner Hand bei den mehrsten Thieren dieselben Bemerkungen an den Rand beigeschrieben, die sich in jener kleineren Bildersammlung finden.

Mit solchen Hülfsmitteln ausgerüstet, dürfte man nun, auch ohne eben Naturaliensammlungen zur Hand zu haben, schon an eine Kritik der Werke von Marcgrave und Piso sich wagen, und die Angaben derselben auf die Thiere unsrer neuen Systeme zu deuten versuchen. Wieviel leichter und sicherer dies aber gelingen werde durch eine Vergleichung mit den Gegenständen selbst, und wie trefflich hier der Reichthum an brasilischen Thieren zu statten kommen müsse, dessen sich unser Museum zu erfreuen hat, leuchtet wohl Jedem von selbst ein. Sehr treffend bemerkt Illiger in einem, noch kurz vor seinem Tode an Spiker gerichteten Briefe, dafs man die auf Veranstaltung des Grafen von Hoffmansegg nach Brasilien unternommene Reise, deren Ausbeute er gröfstentheils den königlichen Sammlungen zuwendete, als den zweiten Theil der Unternehmung des Prinzen Moritz ansehn könne. Denn in der That wird durch jene nun diese ältere ergänzt und zu reinem Verständnifs gebracht, und wenn gleich viel fehlt, dafs man den reisenden Sammler des Grafen mit Marcgrave vergleichen könnte, so ersetzt sich auch dieser Mangel schriftlich hinterlassener Beobachtungen durch die um weniges früher bekannt gewordene reichhaltige Reisebeschreibung Azara's, die ich als das letzte und keineswegs unbedeutendste Glied in dem somit geschlossenen Kreise unserer Materialien zu nennen habe.

Man

Man kann noch fragen, ob es wirklich der Mühe werth sei, die veralteten und in unsern Tagen durch bessere ersetzten Beschreibungen jener Schriftsteller mit solcher Genauigkeit auszulegen; und um hierauf antworten zu können, mufs ich den Werth ihrer Werke noch etwas näher bezeichnen. Bis zu der Zeit, in welcher die Holländer in Brasilien festen Fufs faſsten, waren seine Natur-Erzeugnisse, soweit sie nicht zugleich Handels-Artikel abgaben, fast gänzlich unbekannt. Mit einemmal ward nun in diesen Werken, die das Gepräge der Treue und Wahrheitsliebe so unverkennbar an sich trugen, ein neues Reich aufgeschlossen, und schwerlich ist je von irgend einem andern Lande in dem ersten Bericht über dasselbe so vollständige und erschöpfende Rechenschaft gegeben, als in diesen von Brasilien. Denn ungeachtet aller neuern Entdeckungen in jener Weltgegend, sind noch lange nicht alle von Marcgrave beschriebene Gegenstände wieder aufgefunden, und eben in jener grofsen Gemäldesammlung finden sich schon die Abbildungen von Thieren, die in den neuesten Werken als eben entdeckte aufgeführt werden, und von welchen unsre alten Gewährsmänner, deren Namen und Merkmale man nur nicht zu deuten vermochte, schon die Lebensart und den Nutzen angeben. Was ihnen dabei noch gröfsere, freilich aber auch nur zufälligere Wichtigkeit giebt, ist der Umstand, dafs, gleich nachdem die Holländer verdrängt waren, dieser Theil von Süd-Amerika von den Spaniern, eifersüchtiger als je zuvor, den Forschern verschlossen wurde und anderthalb Jahrhunderte unzugänglich blieb. Daher wurden diese Werke, als der Geist für die systematische Naturbeschreibung erwachte und man sich nach den ausländischen Formen emsiger umsah, die Quellen, aus welchen alle Lernende schöpften, und die einzige Gewähr, auf welche sich alle Lehrende, wenn von Süd-Amerika die Rede war, bezogen und stützten. Die berühmtesten Naturbeschreiber, namentlich Jonston, Ray, Brisson, Linné, Buffon und Pennant, zogen daraus das Beste, was sie über die südamerikanischen Thiere zu berichten hatten, und sparten keine Mühe, die darin enthaltenen Bemerkungen zu deuten und mit ihren eignen Erfahrungen in Uebereinstimmung zu bringen. Da man aber bei den mehrsten unter ihnen die Vorstellungen von der unendlichen Manchfaltigkeit der Formen beschränkter antrifft, als wohl recht ist, und sie nur zu gern diesen alten Gewährsmännern zutrauten, dieselbe für das gegebne geographische Gebiet erschöpft zu haben, so bezogen sie nun das Wenige, was von einzelnen Reisenden etwa aus den holländischen und französischen Co-

lonien in Süd-Amerika herbeigebracht ward, auch sogleich auf ihre Angaben, und es war nicht leicht etwas darunter, wofür sie nicht aus Marcgrave und Piso einen Namen zu finden gewufst hätten. Da nun aber, wie schon erwähnt, die Abbildungen in diesen Werken keineswegs für durchgängig treu uud zuverlässig gelten können, auch nur bei Weitem die wenigsten Beschreibungen durch solche versinnlicht wurden, so mufste sich nothwendig dadurch eine grofse Menge von Mifsdeutungen und Irrthümern einschleichen, die sich entweder fortwährend vererbten, oder (wie in den neuesten Werken) nur anders gestalteten, oft eben so wenig zutreffenden Muthmafsungen Platz machten.

Diesem Allen ist nun ein Ziel gesetzt, wenn mit Hülfe jener ursprünglichen Abbildungen und der dagegen gehaltenen Natur-Objecte selbst klar und bündig dargethan werden kann, was jene Schriftsteller vor sich hatten, als sie unter diesem oder jenem Namen einen Gegenstand beschrieben und seine Lebensweise angaben. Und dazu eben will ich nun, soweit sie von den Thieren Brasiliens handeln, im Folgenden den Versuch machen, und glaube damit den zahlreichen Freunden und Besitzern dieser alten Werke einen willkommnen Dienst zu leisten.

Der systematische Weg scheint hier grofse Vortheile zu bieten. Ich schlage ihn daher ein.

I. Säugethiere.

1. Affen.

Es werden deren von Marcgrave 11 Arten beschrieben. Piso erwähnt ihrer gar nicht. — Die oben berührte Verwechselung der Holzschnitte, welche von dem Setzer am unrechten Ort in den Text eingefügt sind, ist nirgends so häufig als hier, und allein schon eine Quelle unzähliger Mifsgriffe geworden.

Marcgrave beschreibt zuerst S. 226. unter dem Namen *Guariba* den grofsen Brüll-Affen (Buffon's *Ouarine*, Azara's *Coraya*), *Simia Beelzebul* Linné's, zu welchem dieser auch ganz richtig ihn citirt, giebt aber die Abbildung erst S. 228. neben der Beschreibung eines guineischen Affen,

indessen zum *Guariba* sich die Abbildung des nachher beschriebnen *Çaitaia* verirrt hat.

Die Abbildung des *Guariba* in den Original-Abbildungen (L. P. II. p. 116.) *) ist durchaus charakteristisch und in den Verhältnissen treu, auch der danach gemachte Holzschnitt bei Marcgrave kenntlich, und die Erzählung von seiner Lebensart, den Hauptsachen nach, mit den Berichten späterer Reisenden übereinstimmend. Auch der zweiten Art von Brüllaffen (*S. seniculus* L.) wird im Vorbeigehn unter den bekannten Kennzeichen erwähnt. Dafs Azara diese nicht gelten lassen, sondern die schwarze Farbe als blofse Folge des höhern Alters angesehen wissen will, verdient Beachtung, ist aber keinesweges entscheidend, da er sich überhaupt in der Unterscheidung der Affen so oft und so gröblich irrt, und nur vier Arten von brasilianischen Affen kennen gelernt hat, deren es doch 15 giebt. Ich enthalte mich einer weitern Kritik, da sie nicht zunächst hieher gehört.

Das zweite Bild (L. P. II. p. 42.) mit der dazu gehörigen Beschreibung stellt unter dem Namen *Çagui* Linné's *Simia sciurea* dar, wofür es noch Niemand erkannt hat. Die Original-Abbildung läfst aber darüber keinen Zweifel, und die Beschreibung wird Jeder vollkommen auf den Eichhorn-Affen, der auch noch jetzt in Brasilien vorzugsweise den Namen *Sagui* führt, passend finden. Der Prinz hat neben der Abbildung geschrieben: „Kommt aus Guinea." Dies ist offenbar ein Irrthum; denn Afrika hat keine Art der Gattung *Callithrix*, wie diese so deutlich ist. Dafs Marcgrave selbst angiebt, die Congenses nennen sie *Pongi*, beweist nichts; denn unter dem Namen *Congenses* werden immer die eingeführten afrikanischen Negersklaven verstanden. Auch sagt er gleich hinterher: *reperiuntur hic majores et minorés* u. s. w.

Ueber die dritte Art: *Çagui minor* (L. P. II. p. 50, I. M. III. p. 57), ist kein Zweifel. Alle haben sie für Linné's *Simia Jacchus* richtig erkannt, so elend der Holzschnitt auch ausgefallen ist.

Dagegen giebt es bei der folgenden, *Çai-taia*, einige Schwierigkeiten zu lösen. Sie soll nach dem Text gelblich-weifse Farbe haben, den Schwanz gekrümmt tragen, nach Moschus riechen u. s. w. Dieselben Kennzeichen finden sich theils an, theils neben einem Bilde (L. P. II. p. 66.), das den

*) Mit L. P. (*Liber Principis*) bezeichnet Menzel die kleinere Sammlung, die er zur Vergleichung vor sich hatte und immer treu citirt. Die gröfsere Sammlung der Oelgemälde bezeichne ich mit I. M. (*Icones Menzelii*).

Namen *Çai* führt, und oben steht noch einmal der Name *Ma Çai Juba*. Dieser letzte kommt dagegen in der grofsen Sammlung neben einem Bilde vor (I. M. III. p. 49.), das einen dunkelbraunen Affen, aber genau von denselben Umrissen vorstellt, in welchen man ohne Mühe Linné's *Simia capucina* erkennt. Menzel hat dazu jene weifse Art aus dem Buche des Prinzen citirt, auch noch die Namen *Çai* und *Çaï-taia* dazu geschrieben, und so offenbar seine Meinung, dafs beide einerlei seien, zu erkennen gegeben. Ich war Anfangs geneigt, den *Çai-taia* nach der Beschreibung und Abbildung für *S. argentata* zu halten, wogegen jedoch bald zu Vieles stritt (das schwarze Gesicht, der weifse, zu stark nach unten aufgerollte Schwanz u. s. w.). Ich mufs daher in der That glauben, dafs Marcgrave bei seiner Abbildung und Beschreibung eine Albino-Varietät des Capuziner-Affen vor sich gehabt, und dafs ich Azara früher Unrecht gethan habe, wenn ich seine Angaben von Kakerlaken unter diesen Affen auf die *S. argentata* bezog, weil er dieser letztern sonst gar nicht erwähnt. Uebrigens stellt die Abbildung im Marcgrave neben *Guariba* eine schlechte, viel zu mager gerathene Copie des *Çai-taia* dar.

Mit den wenigen darauf folgenden Worten ist nun höchst wahrscheinlich die verwandte *S. Apella* Lin. gemeint, die allerdings in der Regel viel dunkler ist, als die, auch bei Azara mit dem Namen *Çai* belegte *capucina*.

Nun folgen afrikanische Affen, die der damals sehr lebhafte Verkehr mit Guinea unsern brasilianischen Naturforschern zugeführt hatte. Zuerst: *Cercopithecus angolensis major*. Schon aus der ganzen, recht lebendigen Beschreibung verräth sich dem Kundigen, dafs hier der südafrikanische (capische) Pavian *) gemeint sey, und das Bild (L. P. II. p. 54.) setzt dies aufser allen Zweifel. Interessant ist hier das Synonymon *Macaquo*, denn dadurch wird Linné's *Simia Cynomolgus* mit jenen Synonymen verbunden. Uebrigens ist weder diese, noch die *Cynocephalos*, je als in wahrer Eigenthümlichkeit vorhanden, nachgewiesen, und für beide keine andre als die capische Art vorhanden, auf welche (wenn man sie mit verstümmeltem Schwanz denkt) auch *Simia Sphinx* zu beziehen ist, so wie sogar von angesehenen Naturbeschreibern (z. B. von Blumenbach) dieselbe wieder mit dem *Inuus* verwechselt wird. Diese Marcgravische Beschreibung liegt aber bei allen Systematikern (vgl. Linné, Brisson, Buffon) zum Grunde. Es ist daher

*) *Simia Cynocephalos* Linn. und *Simia ursina* Penn.

nicht unwichtig, den Streit eines ganzen Jahrhunderts hier durch die Original-Abbildung entscheiden zu können.

Angolensis alius. Ganz richtig auf *S. nictitans* bezogen, wie durch die Abbildung (L. P. II. p. 70.) bestätigt wird.

Cercopithecus barbatus Guineensis, in Congo vocatur Exquima. Die hier folgende Beschreibung hat den Schriftstellern viel zu schaffen gemacht, und viele Seiten sind von Buffon gegen Linné und von Azara neuerlich wieder gegen Buffon unnöthigerweise vollgeschrieben, da hier aller Irrthum auf der oben angeführten Verwechselung der Holzschnitte beruht. Diese hinweggenommen, klärt sich alles auf. Buffon hat sein Unding: *Exquouima*, zurückzunehmen, und Linné Recht, wenn er nur Marcgrave's Beschreibung (nicht die Abbildung) auf seine *S. Diana* bezieht, denn die stellt das hübsche Original-Gemälde (L. P. II. p. 46.) wirklich recht treu dar.

Dafs Linné den folgenden richtig auf seine *S. Cephus* bezogen habe, geht deutlich aus der Uebereinstimmung der Originalzeichnung (L. P. II. p. 74.) mit allen übrigen Abbildungen, die sonst zum *Cephus* citirt werden, namentlich mit der vom *Moustac* bei Buffon, hervor. Dagegen wird wohl Niemand die kurze Beschreibung des letzten Affen zu deuten wissen, für die noch eine treffliche Abbildung in der Menzelschen Sammlung (III. p. 47.) übrig bleibt, in welcher *S. Mona* Linné's und Buffon's unverkennbar dargestellt ist.

2. *Bruta.*

Marcgrave bildet ein Aï, zwei Arten von Ameisenfressern und zwei von Gürtelthieren ab.

Was das erste betrifft, so ist hier kaum etwas zu bemerken, als dafs sich in den Sammlungen kein Original zu der hier gegebnen Abbildung findet, die nach einem ungeschickt ausgestopften Exemplar verfertigt oder auch ein vom Herausgeber wieder benutzter Holzschnitt aus einem andern Werk gewesen sein mag. Dagegen ist in der Sammlung des Prinzen (II. p. 112.) das dreizehige Faulthier kletternd und kriechend vorgestellt, und in der letztern Stellung noch besser in der Menzelschen Sammlung (III. p. 99.), wovon Piso p. 321. eine gute Copie im Holzschnitt liefert. Zu gleicher Zeit wiederholt dieser die Marcgravische stehende Figur, und fügt noch eine Abbildung des Skelets hinzu, in welcher die merkwürdige Ueberzahl

der Halswirbel allerdings ausgedrückt ist. Doch scheint die Wichtigkeit dieser Erscheinung dem Verfasser entgangen zu seyn, da er im Text ihrer nicht weiter erwähnt. Der Unterschied zwischen dem zweizehigen und dreizehigen Faulthier scheint damals noch nicht erkannt zu sein, denn Marcgrave's Commentator, de Laet, verbessert seine in einem frühern Werk über Amerika gegebne Beschreibung des *Unau* nach der Abbildung des *Aï*, ohne beide für verschieden zu erkennen.

Die beiden Ameisenfresser sind die bekannten; *Myrmecophaga jubata* und *tetradactyla*, auf die sie auch, da die Beschreibungen sehr vollständig sind, von allen Schriftstellern bezogen werden (L. P. II. p. 62 et 84). Dieselben Abbildungen kommen auch bei Piso vor. Die Originalzeichnungen, besonders in der Menzelschen Sammlung (III. p. 95 u. 97), gehören zu den vorzüglichern. Dort ist auch die *M. didactyla* abgebildet, von der in den beiden Werken nichts vorkommt, obgleich es ein brasilianisches (wenn gleich in Guiana häufigeres) Thier ist.

Der Gürtelthiere sind drei beschrieben und von zweien auch Abbildungen hinzugefügt. Ich mufs zuerst den langen, zwar hin und wieder durch Widersprüche dunklen, aber im Ganzen doch sehr verdienstlichen Abschnitt von den *Tatous* in Azara's Reise als bekannt voraussetzen, und brauche mich demnach nicht auf Berichtigung der Irrthümer Buffon's, wo er die Marcgravischen Beschreibungen auf die seinigen anwendet, einzulassen. Es ist diese auch schon zum Theil von Illiger, in seiner nach Azara unternommenen Auseinandersetzung der Gürtelthierarten, in Wiedemann's Archiv gegeben. Also nur soviel als zur Erklärung des Mifsverständnisses nöthig ist. Die erste Marcgravische Figur nämlich gehört abermals nicht zur Beschreibung des *Tatu-peba*, es findet sich in der Sammlung kein Original dazu, und sie ist überhaupt so schlecht, dafs man fast vermuthen mufs, sie sei nur der Abdruck eines in Eile und zur Ersparung der Kosten von den Herausgebern gemifsbrauchten, eben von irgend einem andern Werk noch vorräthigen Holzschnitts, der ohne Zweifel Linné's *Dasypus novemcinctus* oder Azara's schwarzen Tatou vorstellen soll. Auf die Beschreibung aber pafst das in der Menzelschen Sammlung vorkommende Bild (III. p. 105.) vollkommen. Nur wird dieses (ein Thier von 12 Zoll Länge vorstellend) in der Sammlung des Prinzen (II. p. 2.) als natürliche Gröfse angegeben, und Marcgrave giebt ihm doch die Gröfse eines Ferkels und dort selbst hat er den Namen *Tatu-guaçu* (grofser Tatu). Es ist daher wohl kaum zu

zweifeln, dafs die Original-Abbildung ein Junges vorstellt, und dafs Azara Recht hat, wenn er Marcgrave's Beschreibung zu seinem *Tatou-poyou* (*Das. gilvipes* III.) bezieht.

Die zweite Art: *Tatu-été*, wobei keine Abbildung ist, wird von Azara eben so richtig auf seinen *Tatou noir* gedeutet. Die Abbildung (L. P. II. p. 104.) bestätigt dies vollkommen. So kann auch über die dritte, Linné's *Das. tricinctus*, *Tatou Mataco* Az., als eine sehr ausgezeichnete Art, kein Zweifel seyn. Piso bildet dieselbe unter den eſsbaren Thieren ab.

3. Nagethiere.

a. *Coandu*, von Marcgrave p. 233 und von Piso p. 99 nach dem Original (L. P. II. p. 10.) kenntlich abgebildet, und von ersterm besonders, gut beschrieben, auch von allen Schriftstellern auf *Hystrix prehensilis* richtig bezogen.

b. *Cavien.* Sämmtliche fünf Species sind von Marcgrave p. 223, 224 und 230, und von Piso p. 99, 101 und 102 abgebildet *) und beschrieben, die *Aperea* jedoch vielleicht zu unvollständig, als dafs Linné es gewagt hätte, sie in sein System aufzunehmen. Erst nachdem Pennant und Buffón davon weitere Nachricht gegeben hatten, erschien dies Thier in der dreizehnten (Gmelinschen) Ausgabe des Linnéischen Natursystems mit dem beigefügten Citat dieser Stelle. Bekanntlich ist es sehr wahrscheinlich, dafs diese *Aperea* die Urform des zwar in Brasilien einheimischen, aber nirgends wild angetroffenen Meerschweinchens sei.

c. *Tapeti* (*Lepus brasiliensis* L. p. 223 Marcgr. p. 102 Piso). Ein auffallender Widerspruch, in welchem Text und Abbildung stehn, hat die Kritiker seit langer Zeit beschäftigt. In jenem nämlich wird dieses Thier schwanzlos genannt, und das Bild stellt dennoch ein geschwänztes vor, das aber zugleich unserm gemeinen Hasen so ähnlich ist, dafs man darauf gar nichts gegeben zu haben scheint. Wirklich hat man daran Recht gethan, denn es ist auch hier, wie oben beim Armadill, ein alter Holzschnitt

*) Die Originale dazu finden sich an folgenden Stellen:
Cavia Paca L. P. II. p. 96.
— *Aguti* L. P. p. 80. I. M. III. p. 67.
— *Capybara* L. P. p. 6. I. M. p. 109.
— *Aperea* L. P. p. 120. I. M. p. 69.
— *Cobaya* L. P. p. 26.

eingeschoben, zu dem sich gar keine Originalzeichnung findet. Aber eine andre sehr charakteristische Zeichnung des Tapeti ist in der Menzelschen Sammlung (p. 73), die mit der Beschreibung genau übereinstimmt, mit Ausnahme des einen vom Schwanz hergenommenen Merkmals, das Linné als diagnostisches aufstellte, und das nach unsrer jetzigen Ansicht das Thier in die Gattung der Pfeifhasen (*Lagomys* Geoffr.) versetzen würde. *Cauda nulla* soll daher nach damaliger schwankender Terminologie nur heifsen: *Cauda brevissima*, wie bei *Simia Inuus*, *Cavia Cobaya* und in vielen andern Beispielen. Die Sache wäre also schon durch die Abbildung entschieden, auch wenn Azara nicht schon das Thier besser beschrieben und die Länge des Schwanzes als einen Zoll betragend angegeben hätte. Aber der Zweifel fällt nun weg, dafs Marcgrave ein ganz andres Thier vor sich gehabt, als Azara.

d. *Sciurus brasiliensis* (Marcgr. p. 230). Eine treffliche Abbildung zu der hier gelieferten Beschreibung findet sich ebenfalls in der Menzelschen Sammlung (III. p. 59). Sie macht es mir zweifelhaft, ob man mit Recht diese Stelle auf den noch nirgends abgebildeten *Sciurus aestuans* bezogen, und ob sie nicht mit mehrerem Recht zugleich mit dem Brissonschen Synonym auf Bancrofts *Sc. guianensis* anzuwenden seyn möchte. Denn auch nicht eins der vielen Exemplare, die wir vom *Sc. aestuans* auf dem Museum besitzen, hat den weifsen Seitenstreifen, der in beiden Beschreibungen und der vorliegenden Abbildung so charakteristisch hervortritt. Dagegen gehören Pennant's und Buffon's *Grosses Guerlinguet* wohl ohne Zweifel zum *Sc. aestuans*.

4. Beutelthiere.

Marcgrave beschreibt deren zwei (p. 222), von denen eins nebst der Abbildung auch in Piso vorkommt. Ich vermuthe hier abermals eine Verwechslung der Abbildung, denn die Originalzeichnungen (L. P. II. p. 137 und I. M. III. p. 65) haben beide den Namen *Tai-ibi*, und von der *Çarigueya*, wobei das Bild steht, ist keine vorhanden. Auch pafst die Beschreibung des *Tai-ibi* nach Gröfse und Zeichnung besser zu den Bildern, als die der *Çarigueya*. Bei der unbeschreiblichen Verwirrung, welche in Hinsicht auf die amerikanischen Beutelthiere (die Gattung *Didelphys* im Sinne der neuern Systematiker) bei den Schriftstellern herrscht, würde die Untersuchung, zu welchen Arten die hier gegebnen Beschreibungen gehören, nicht ohne

ohne grofse Weitläuftigkeit zu Stande gebracht werden können, und dennoch vielleicht kaum zu befriedigenden Resultaten führen. Soviel ist indessen gewifs, dafs 1) Marcgrave's *Çarigueya* nicht Linné's *D. marsupialis*, Smith-Barton's *Woapink* sein kann, sondern mit Pennant's *Virginian Opossum* und Azara's *Micouré proprement dit* eine eigne Art ausmachen müsse; 2) dafs Marcgrave's *Tai-ibi* am besten mit Linné's und Buffon's *Cayopollin* oder Pennant's *Mexican Opossum* übereinkomme. Eine monographische Behandlung der amerikanischen Beutelthiere gehört zu den wesentlichen Bedürfnissen der Mastodologie, kann aber nur unter der Bedingung, dafs ein grofser Reichthum an Exemplaren zur Vergleichung der aufgezählten Arten vorhanden sei, geliefert werden. Dicht neben jenem Bilde in der Menzelschen Sammlung steht ein andres unter dem Namen *Aguaja* (Maus). Die Zeichnung ist aber so ausgeführt charakteristisch, dafs man es an den hängenden Ohren, dem Schwein ähnlichen Kopf und den handartigen Hinterfüfsen sogleich für ein Beutelthier halten, und dann zunächst an Azara's *Micouré nain* denken mufs. Von diesem ist es aber himmelweit verschieden; also neu, noch 175 Jahr nach seiner ersten Entdeckung. Eine dritte neue Zwergart von *Didelphys, tristriata* auf unserm Museum genannt, ist ziemlich sicher dasselbe Thier, welches Marcgrave p. 229 unter dem Namen *Mus araneus* beschreibt. Unter den Originalen ist davon leider keine Abbildung vorhanden, daher kann diese Vermuthung hier nicht zur Gewifsheit erhoben werden.

5. Von Fledermäusen

ist bei unsern Schriftstellern nur einmal unter den Vögeln die Rede. Marcgrave sowohl (p. 213) als Piso (p. 290) beschreiben unter den Namen *Andira-aca* und *Andira-guaçu* irgend einen *Phyllostomus*, wahrscheinlich den *hastatus*. Abbildungen sind nicht da, die den Zweifel aufzuklären vermöchten; denn dafs der von Piso gegebne Holzschnitt nicht hieher gehöre, bemerkt schon Geoffroy (*Annal. d. Mus. Tom. XV.*) ganz richtig. Es ist damit unsre gemeine Fledermaus (*vespertilio murinus*) dargestellt, und das Bild abermals ein untergeschobenes.

6. Raubthiere.

a) *Coati* (Marcgr. p. 228, L. P. II. p. 38 und Ic. M. p. 87). *Coati mondi* (Marcgr. ib. L. P. II. p. 100). Ohne Rücksicht darauf zu nehmen,

dafs hier schon zwei Species genannt werden, hat Linné diese Stelle nur zu seiner *Viverra Nasua* citirt, auch späterhin Niemand sich an eine Deutung gewagt als Buffon, den Azara deshalb lebhaft tadelt, und geradezu behauptet, es gebe nur eine Art von *Coatis*. In den entgegengesetzten Fehler war Illiger verfallen, der jedem bei irgend einem Schriftsteller vorkommenden Synonym seine besondre Deutung zu geben geneigt war, und so acht Species herausbrachte (Vgl. seine Abhandl. üb. die Verbreitung der Säugethiere in d. Verh. d. Ak.). Die Wahrheit liegt ohne Zweifel in der Mitte, und vier bis fünf Species treten mit deutlichen Merkmalen auseinander. Dafs hier mit *Coati* Linné's *Viverra Nasua* oder *Nasua rufa* n. (*N. Monde* Ill.), mit *Coati mondi* aber *N. obfuscata* n. oder Buffon's *Coati noirâtre* gemeint sei, wird aus den Abbildungen vollkommen klar.

b) Katzenarten. Die unselige Verwechslung, die der Setzer des Marcgravischen Werks mit den Holzschnitten vorgenommen, so wie eine von Marcgrave selbst begangne Umtauschung der Namen, ist auch hier Ursache einer bisher ununterbrochen vererbten Verwirrung geworden. Alles löst sich auf das befriedigendste durch eine Vergleichung der Originale. Die erste Figur (S. 235), die Piso mit der folgenden unter denselben Irrthümern S. 103 copirt hat, führt hier den Namen *Jaguara*, heifst aber im Original *Jaguarete*, ist auch wirklich dasselbe Thier, welches Azara unter diesem Namen beschreibt, nämlich die gröfste brasilianische Katzenart, *Felis Onca* Linn. Des Prinzen handschriftliche Bemerkung (L. P. II. p. 58) belehrt uns, dafs das Thier ein Junges gewesen, daher die wenige Aehnlichkeit. Die folgende Art mufs nun den Namen *Jaguara* bekommen, und pafst dann in Allem zu Pennant's *Jaguar*, *Felis discolor* L. Gmel. Die daneben stehende Figur gehört aber nicht ihr, sondern der folgenden *Çuguaçuarana* an, und ist dann ganz deutlich *F. concolor* der Autoren: Pennant's *Puma*, Buffon's *Cougouar*. Die Abbildung in der Menzelschen Sammlung (p. 8[illegible]), verglichen mit dem Thier selbst in unserm Museum, bewährt dies auf das vollkommenste. — Eine vierte Art wird von Marcgrave *Maracaya* genannt. Die unter diesem Namen in beiden Sammlungen gelieferten Abbildungen weichen bedeutend von einander ab, stellen aber ohne Zweifel dasselbe Thier in unterschiednem Alter vor. Ueberdies ist die in der Sammlung des Prinzen ungewöhnlich roh und steif, so

dafs nicht viel darauf zu geben ist. Die andre aber hat alle Kennzeichen von *Felis Pardalis* L. Gmel., Buffon's *Ocelot*, auf welche ich sie um so mehr ohne Bedenken beziehe, als die einzige andre Art, auf welche sie gedeutet werden könnte, und wirklich von einigen gedeutet ist, nämlich *Felis Tigrina* Schreb., *Margay* Buff., noch immer sehr verdächtig ist. Azara nennt sie geradezu eine Varietät der *Pardalis*; seine Meinung allein würde nicht entscheiden, aber ein Exemplar auf unserm Museum, das Illiger für *F. tigrina* bestimmt hat, und das mit den Abbildungen der *Margay* bei Buffon und Shaw vollkommen übereinstimmt, hat alle Kennzeichen des frühsten jugendlichen Zustandes, und eine Zeichnung, in welcher sich die ganze nachherige der *Pardalis* schon erkennen läfst.

c) Von wilden Arten der Gattung *Canis* ist bei Marcgrave und Piso nicht die Rede, doch finden sich zwei vortreffliche Abbildungen solcher Arten in der Menzelschen Sammlung (p. 91) unter den Namen *Aguara* (Fuchs), und *Aguaraguaçu* (grofser Fuchs oder Hund). Vortrefflich passen diese beiden Abbildungen zu Azara's *Aguarachay* und *Aguaragouazou*, mit denen sie ja auch in den Namen so sehr übereinkommen, und die der Uebersetzer so sichtlich verkehrter Weise auf die beiden Arten des Waschbären (*Procyon lotor* und *cancrivorus*) angewendet hat. Abermals finden sich also hier alte Abbildungen zu neuen Thieren, die für die Wissenschaft grofse Wichtigkeit haben, da die genannten Beschreibungen, ungeachtet ihrer Weitläufigkeit, nicht hinreichend sind, ein klares Bild zu geben. Illiger bezog den *Agouarachay* auf den *C. cinereoargenteus* der Schriftsteller, auf den die Abbildung aber keinesweges pafst. Es ist eben so wahrscheinlich eine neue Species, als die andre Azarasche, die Illiger auch als solche annahm. *Canis Culpaeus* von Molina und *virginianus* von Shaw sind ihnen offenbar verwandt, vielleicht dieselben: daher ist es mifslich, ihnen sogleich eigne Namen zu geben. —

Die Abbildung eines Hundes in der Sammlung des Prinzen (L. P. II. p. 92), unter dem Katzen-Namen *Jaguara*, wobei der Prinz eine Bemerkung über die Langsamkeit und Schwerfälligkeit des Thiers hinzugefügt hat, bleibt völlig problematisch wegen jenes Widerspruchs und der Mangelhaftigkeit der Darstellung.

d) Wahre Zibetthiere (*Viverra* im Sinne der neuern Systematiker) hat Amerika nicht. In der Sammlung des Prinzen findet sich (p. 22) *Viverra Zibetha*, und I. p. 184 *Viverra Genetta*, wie sie ihm aus Guinea geschickt wurden, kenntlich abgebildet.

e) Die brasilianische Otter ist von Marcgrave beschrieben (p. 234) und ein gutes Bild in der Menzelschen Sammlung (p. 75. f. 2.), von welcher der elende Holzschnitt offenbar keine Copie ist. Welche Art von *Mustela* mit der andern auf derselben Tafel befindlichen Figur unter dem Namen *Eirara* gemeint sein könne, schien mir Anfangs schwer auszumitteln; da ich aber beim Nachsuchen die kurze Beschreibung von Molina's bisher so dunklem *Quiqui* nachlese, finde ich sie zu meinem Erstaunen vollkommen auf unsre Figur passend: also wiederum eine Abbildung, die bis jetzt ganz fehlte.

f) Noch ist zu bemerken, dafs Piso (p. 324) unter dem Namen *Maritacaca* (woneben ein schlechter Holzschnitt, der einen europäischen Fuchs vorstellt) ein Thier beschreibt, zu welchem sich keine Abbildung in den Sammlungen findet, das sich aber ungeachtet aller Ungereimtheiten der Beschreibung doch bald für den *Skunk* Pennant's oder Linné's *Viverra Mephitis* und *Conepate*, die in die Cuviersche *Mephitis foeda* zusammenfallen, erkennen läfst. Sie enthält nichts, was man jetzt nicht besser wüfste.

7. Wiederkäuer oder Zweihufer.

a. Hirschartige. Marcgrave beschreibt deren p. 235 zwei, von welchen das erste, *Çuguaçu-été*, in des Prinzen Sammlung p. 108 abgebildet, und danach, so wie aus der Beschreibung, für Azara's *Gouazoupita* leicht zu erkennen ist. Erst dieser Schriftsteller hat Aufklärung über die südamerikanischen Hirsche gegeben, und auf die Vermuthung gebracht, dafs der *Moschus americanus Auct.* nichts als das Weibchen dieser Art und der *delicatulus* das Junge derselben sei. Unter diesen Namen kommen sie bei Brisson, Seba, Shaw u. a. vor. Illiger hat dieser Art in s. Abhandlung üb. d. Verbr. d. S. den Namen *C. rufus* gegeben. Piso's Beschreibung p. 97 gehört offenbar auch, zumal wegen des Geweihes, hieher, und nicht zum

Gouazoupoucou, wohin sie Azara auch (also doppelt) bezieht. Die Abbildung entscheidet nichts dagegen, da sie aus dem Gedächtnifs entworfen, oder wohl gar wieder nur ein alter Holzschnitt vom gemeinen Hirsch ist, denn es findet sich kein Original dazu.

Die andre von Marcgrave beschriebene Art: *Gouazouapara*, ist der bekanntere *Cervus mexicanus* oder Azara's *Gouazouti*.

b) In einem besondern Anhang liefern beide Werke etwas über die peruanischen und chilischen *Llamas*, die von der verfehlten Brouwerschen Expedition nach der Westküste von Amerika mit nach Brasilien gekommen waren. Die erste Marcgravische Figur scheint das *Guanaco* zu sein; die zweite mag wohl das *Pacos* vorstellen sollen, wofür es überall citirt wird. Nur ist der Fehler in der Zeichnung der Vorderhufe wohl zu grob, als dafs man ihn mit dem Loseaufsitzen der Klauen entschuldigen könnte. Dafs die Verfasser sogar in ihre Beschreibung diesen Irrthum mit aufgenommen haben, ist um so mehr zu tadeln, da sie ein gutes Bild des Thiers neben dem fehlerhaften unter den Originalgemälden finden konnten. In der Menzelschen Sammlung ist dies an seinem Ort eingefügt, und vielleicht noch bis jetzt, ungeachtet seiner Fehler, eine der bessern Abbildungen des wenig bekannten Thiers.

Einige vortreffliche Abbildungen von afrikanischen Schaf- und Ziegenraçen in der Menzelschen Sammlung übergehe ich mit Stillschweigen, da sie nach dem Zweck dieser Abhandlung hier keine Erörterung finden können.

8. Vielhufer.

a) Das *Tapir* ist von beiden Schriftstellern ziemlich vollständig beschrieben (Marcgr. p. 229, Piso p. 101), aber sehr schlecht abgebildet. Das Original (I. M. III. p. 109) gehört aber auch zu den mittelmäfsigen.

b) Endlich ist auch das *Tajassu*, unter dem Namen *Tayaçuété*, woraus vielleicht der andre: *Tagnicati*, entstanden ist (indem man aus der alten steifen Handschrift bei der gleichen Zahl und ebenmäfsigen Entfernung der Züge leicht ihn aus jenem herauslesen kann), von beiden (Marcgr. p. 229, Piso p. 98) beschrieben. Die Abbildung dazu ist in der Sammlung des Prinzen (L. P. II. p. 18). Sie vermehrt meinen Zweifel, ob Azara's

Diagnose der beiden Bisamschweine wohl richtig gestellt oder überhaupt in der Natur gegründet sein mag; denn sie sowohl, als die Exemplare des Königl. Museums, entbehren aller der Kennzeichen, die Azara als die diagnostischen nennt.

Die gleich dabei befindliche Abbildung und Beschreibung des guineischen zahmen Schweins (Margr. p. 230, L. P. II. p. 14) hat Wichtigkeit für die Betrachtung der Hausthiere in ihren Ausartungen, welche aber nicht innerhalb der Gränzen dieser Abhandlung liegt.

Ueber

die Theorien in den Hippokratischen Schriften, nebst Bemerkungen über die Aechtheit dieser Schriften.

Von Herrn H. F. Link *).

Wenn man nur einen flüchtigen Blick wirft auf die Hippokratischen Schriften, so frägt man verwundernd, wer der Hippokrates sey, den die Aerzte noch immer verehren als ihren Fürsten und grofsen Lehrer. Denn redet man von dem Verfasser der Schrift über die Luft, das Wasser und die verschiedenen Lagen der Oerter, so spricht man von einem gefälligen, deutlichen Schriftsteller; redet man von dem Verfasser des Prognostikon und der Aphorismen, so spricht man von einem Schriftsteller, der Kürze und oft Dunkelheit liebt; redet man von dem Verfasser der Bücher über die epidemischen Krankheiten, so spricht man von einem trefflichen Beobachter, der aber die Kranken, ohne Heilmittel zu reichen, sterben läfst; redet man von dem Verfasser der Schrift über die Diät in hitzigen Krankheiten, so spricht man von einem Arzte, der genug Arzneien, und auch heftig wirkende, dem Kranken reicht. Und doch gehören die genannten Schriften zu denen, welche die älteren und neueren Forscher für ächt erkennen. Was mufs nicht entstehen, wenn man die bezweifelten, verdächtigen und wahrscheinlich unächten Schriften zusammenstellt, um das Hippokratische System zu finden? Ein System voll Widersprüche, voll Beweise von grofsem Wis-

*) Vorgelesen den 21. December 1815.

sen und grofser Unwissenheit, wie weiland Le Clerc in seiner Geschichte der Medizin lieferte. Wenn man auch diesen Fehler in den neuern Zeiten vermeidet, so wirft man doch mehr zusammen, als man sollte, und selbst die genauern Schriftsteller reden von einem solchen Hippokrates, als nirgends vorhanden ist.

Der Geschichte der Wissenschaften ist mehr um die Lehren, um die Theorien der Hippokratischen Schriften zu thun, als um die Verfasser. Von jenen müssen wir ausgehen, dann wird alles Uebrige leichter zu finden seyn. Eine Zusammenstellung der Hippokratischen Schriften nach den darin herrschenden Theorien scheint mir nothwendig und noch nie versucht. Von selbst ergiebt sich dann eine Zeitfolge, worin diese Schriften verfafst wurden, wenn auch nicht für jede einzelne Schrift, doch für jede Abtheilung von Schriften. Von selbst ergiebt sich dann die Verschiedenheit der Verfasser, und die Rücksicht auf Schreibart und einzelne Stellen schweift nicht mehr unbestimmt im Ganzen herum, sondern wird genauer und sicherer.

Wenn wir in den ältern Schriftstellern mehr Nachrichten von Hippokrates und seinen Schriften hätten, so würde die Untersuchung über die Hippokratischen Schriften sehr erleichtert werden. Aber diese fehlen gar sehr, und wir müssen sparsam zusammen lesen, was die Aeltern von ihm sagen.

Die ersten Zeugnisse von Hippokrates haben wir in Platon's Schriften. Eine sehr merkwürdige Stelle im Phädros lautet nach Schleiermacher's Uebersetzung folgendermafsen:

Sokrates. Und glaubst du die Natur der Seele richtig begreifen zu können, ohne des Ganzen Natur?

Phädros. Wenn man dem Asklepiaden (τῷ τῶν Ἀσκληπιαδῶν) Hippokrates glauben soll, auch nicht einmal des Körpers, ohne ein solches Verfahren.

Sokr. Sehr schön, o Freund, dafs er dieses sagt. Wir müssen aber doch aufser dem Hippokrates die Natur fragend untersuchen, ob sie einstimmt.

Ph. Das gebe ich zu.

Sokr. So sieh nun zu, was über die Natur Hippokrates sagt, und die richtige Vernunft. Mufs man nicht so nachdenken über eines jeden Dinges Natur zuerst, ob das einzeln oder vielartig ist, was wir selbst als Künstler behandeln, und auch Andere dazu wollen geschickt machen. Dann, dafs man,

man, wenn es einzeln ist, seine Kraft untersuche, was für eine es hat von Natur, um auf was für Dinge zu wirken, und was für eine, um Einwirkungen, und von was für welchen, aufzunehmen; wenn es aber mehrere hat, diese erst aufzähle, und so von jeder, wie vorher von den einzelnen, sehe, was sie ihrer Natur nach ausrichten, und was sie, von was andern, erleiden kann.

Ph. So wird es geschehen müssen.

Sokr. Jedes Verfahren ohne dieses wäre nur eines Blinden Wanderung.

Wie lernen wir nun den Hippokrates aus dieser Stelle kennen? Als den bloſsen Empiriker, der im Prognostikon oder in den Aphorismen Zeichen auf Zeichen häuft, ohne Bestimmung der verschiedenen Zustände, ohne Rückblick auf Ursachen, ohne Spur von irgend einem System? Wahrlich nicht. Ein Verfahren, wie es in diesem und andern als ächt anerkannten Schriften herrscht, ist nach Platon nicht mehr als eines Blinden Wanderung. Vielmehr hören wir in Platon's Nachricht von einem Denker, der Spekulalation liebt, wie sie gerade die neuern Kritiker dem groſsen Arzte absprechen möchten. Es ist schwer das Buch zu finden, welches Platon im Sinn hatte. Galen deutet es auf die Schrift: *περὶ φύσεος ἀνθρώπου, de natura hominis;* eine Schrift, welche ihm sehr oft als ein Muster der wahren Hippokratischen Lehre dienen muſs. Er frägt, auf welches andere Buch Platon's Rede passe. Sehr wahr, sie paſst auf keines; aber auch auf dieses? Wir finden zuerst darin eine sehr flache Vernünftelei gegen die eleatische Philosophie, der Mensch sey nicht ganz Blut, nicht ganz Galle, sondern er bestehe aus verschiedenen Theilen. Die Stellen, worin gesagt wird, einige Aerzte hätten behauptet, der Mensch sey ganz Blut, ganz Galle etc., ist der Stellung nach offenbar eine Glosse, und Galen setzt sich unnöthig in Verlegenheit, die Aerzte zu finden, welche dieses gesagt haben. Der Schmerz zeige schon, daſs der Mensch nicht Einheit sey; vielleicht der tiefste Gedanke in der sonst flachen Rede. Die Bestandtheile des Menschen werden dann hergerechnet: Blut, Phlegma, gelbe und schwarze Galle, nebst den vier Grundeigenschaften derselben: kalt, warm, feucht, trocken. Wir sehen hier deutlich die vier, der Aristotelischen Physik eigenthümlichen Grundeigenschaften der Körper, und die Schrift ist später als diese Physik. Denn Galen hat es keinesweges erwiesen, daſs diese Theorie von den Aerzten, namentlich von Hippokrates, erfunden, und nur von Platon und Aristoteles ausgebildet sey

ja er steht über diese Paradoxie mit allen seinen Zeitgenossen im Widerspruche. Auch hat Galen durchaus keinen andern Grund für diese Meinung, als die Schrift περὶ φύσεος ἀνθρώπου sey ächt, weil Platon sie schon kannte, und Platon habe sie gemeint, weil sie nach der Vorschrift im Phädros verfafst sey. Als ob nicht die Schrift eines andern Verfassers auch nach dieser Vorschrift gemacht seyn könne. Und sie ist nicht einmal danach verfafst. Denn Platon sagt, das Besondere soll aus der Natur des Universums verstanden werden, und diese Vorschrift ist hier gar nicht angewendet, denn der Verfasser versucht es nicht, jene Grundeigenschaften als solche darzuthun, sondern er nimmt sie als gegeben an.

Die andere Stelle in Platons Protagoras (*Oper. ed. Bipont T.* 3. *p.* 88) sagt uns nichts weiter, als dafs Hippokrates ein Arzt und von der Insel Kos war. Auch hier heifst er der Asklepiade Hippokrates.

Es gab vier Asklepiaden mit dem Namen Hippokrates, wie Suidas lehrt. Nebros (p. 584 v. C. G.) hatte zwei Söhne, Gnosidikos und Chrysos; des erstern Sohn war Hippokrates I., dessen Sohn Heraklides, und des letztern Sohn Hippokrates II. oder der Grofse. Seine zwei Söhne, gleichfalls als Aerzte berühmt, waren Thessalus und Drakon. Thessalus hatte einen Sohn Hippokrates III., und Drakon einen Sohn Hippokrates IV. Könnten wir die Hippokratischen Schriften unter diese vier gleichnamigen Asklepiaden vertheilen, so wäre allen Schwierigkeiten abgeholfen. Aber nichts leitet uns in dieser Vertheilung. Die Alten haben darüber Vermuthungen, aber nur Vermuthungen. So hielt z. B. Glaucias, ein alter Commentator, das Buch *de humoribus*, περὶ χυμῶν, für das Werk eines andern Hippokrates; so schrieb man die Bücher περὶ ἀγμῶν und περὶ ἄρθρων Hippokrates I. zu; so hielt Galen das fünfte Buch περὶ ἐπιδημιῶν für eine Schrift von Hippokrates IV., Drakon's Sohne, u. dgl. m.

Aristoteles, ungeachtet er viele Schriftsteller anführt, schweigt durchaus von einem Arzte Hippokrates. In *Hist. Animal. L.* 3. *c.* 3. kommen mehrere anatomische Angaben vor, die dem Polybus zugeschrieben werden. Wir lesen sie wörtlich in einer Abtheilung der Schrift *de natura hominis* und *de carnibus.*

Aus den Zeiten der Alexandriner führt Galen mehrere Commentatoren an; ein Beweis, dafs nun diese Schriften bekannter wurden. Die meisten der Schriften, welche wir jetzt in der Hippokratischen Sammlung finden, scheinen damals gesammlet zu seyn. Denn ungeachtet in den meisten

eine zwar sehr genaue Zeichenlehre vorkommt, so wird doch in keiner derselben des Pulses gedacht. Bekanntlich wurde die Lehre vom Pulse von Praxagoras von Kos, geboren 341 v. C. G., erfunden, und wir mögen also schliefsen, dafs die meisten Hippokratischen Schriften, gewifs alle worin Semiotik vorkommt, älter waren. Zu den Zeiten der Alexandriner können sie nun auch sehr leicht mit dem falschen Namen Hippokrates gestempelt seyn. Bekannt und oft gebraucht ist die Stelle bei Galen (*Commentar in libr. de natura hominis, Comment. I. in fine*), worin er sagt, dafs die Könige in Alexandria und Pergamus grofse Summen an Bücher verwendeten, und dafs man des Preises wegen viele Schriften grofsen Männern untergeschoben habe. Darum, meint er, sey man über die Schrift *de natura hominis* allein sicher, weil diese Platon anführe. So übel steht es mit der Aechtheit aller Hippokratischen Schriften. Nicht so bekannt ist die Stelle in dem zweiten Commentar über das dritte Buch der *Epidem. text.* 4, wo er von den sonderbaren Karakteren bei den Krankengeschichten redet. Nach Einigen nahm Mnemon von Sida das Buch aus der Bibliothek zu Alexandria und schrieb diese Karaktere hinein; nach andern kam es aus Pamphylien, und war unter den Büchern, welche die Schiffer zusammenhäuften und so an die Bibliothek ablieferten, die daher mit *βιβλία ἐκ πλοίων* bezeichnet wurden. Es führte, wie Einige sagen, die Aufschrift *κατὰ διορθωτὴν Μνήμονα*, oder, wie Andre behaupten, den Namen Mnemons selbst auf dem Titel. Man sieht aus dieser Erzählung, wie leicht damals, absichtlich und unabsichtlich, die Schriften falsche Titel erhalten konnten.

Wir kommen zum Celsus. Er sagt in der Vorrede zu den Büchern *de Medicina*, da wo er die Geschichte der Medizin erzählt, vom Hippokrates: *Hujus autem (Democriti) ut quidam crediderunt, discipulus Hippocrates Cous, primus quidem ex omnibus memoria dignus ab studio sapientiae disciplinam hanc separavit, vir et arte et facundia insignis.* Dieses heifst wohl nicht, dafs Hippokrates die ersten medizinischen Schriften geschrieben, sondern dafs er zuerst die Medizin wissenschaftlich behandelt habe. In derselben Vorrede heifst es: *Neque esse dubium quin alia curatione opus sit, si ex quatuor principiis vel superans aliquod vel deficiens adversum valetudinem creat, ut quidam ex sapientiae professoribus dixerunt; alia, si in humidis omne vitium est, ut Herophilo visum est, alia si in spiritu, ut Hippocrati.* Eine merkwürdige Stelle! Also die Hippokratischen Bücher, wo von den vier Qualitäten die Rede ist (auch das erwähnte *de natura hominis*, worauf

Galen grofsen Werth legt), enthalten eine Meinung, die nicht dem Hippokrates, sondern den *sapientiae professoribus* zugeschrieben wird. Sollte Celsus den Namen Hippokrates nicht genannt haben, wenn diese Theorie ihm eigen wäre? Welche sind nun die Hippokratischen Bücher, nach denen *omne vitium in spiritu est?* Nur eins oder zwei unter allen können in Frage kommen: das Buch περὶ φυσῶν, *de flatibus,* und das Buch περὶ ὀστεῶν φύσεως, *de natura ossium.* Das erste hat das Zeugnifs von Erotian und Galen für sich, aber alle Neuern halten es für unächt. Ein epigrammatischer Styl, eine spitzfindige Physik machen es ihnen mehr als verdächtig. Das πνευμα, lehrt dieses Buch, bewirke alles, und alle Krankheiten rühren davon her, *ructus* und *flatus* entstehen vom eingeschlossenen πνευμα; wenn es sich nach aufsen kehre und verdichte, entstehe Schweifs; wenn es in den Adern das Blut abkühle, Fieberfrost. Dieses sind die Hauptlehren des sonderbaren Buches. Gewifs ist es, dafs, wenn dieses Buch von Hippokrates herrührt, alle andern unächt sind, wegen der ganz verschiedenen Lehren und der verschiedenen Schreibart. Die höchst gezwungene Physik in diesem Buche, die mit der spätern Lehre der Pneumatiker sehr übereinstimmt, die nicht weniger gezierte Schreibart und einige Wörter, ἰδέα νόσου als Idee von Krankheit, μιασμὰ als ansteckender Stoff, scheinen dem Alterthume dieser Schrift zu widersprechen. Das andere, *de natura ossium,* handelt wenig von den Knochen, meistens von den Adern; ist so verworren, dafs es aus mehrern zusammengesetzt scheint. Auch erwähnen desselben die Alten, Erotian und Galen, gar nicht. Es wäre sonderbar, wenn nur in diesen Schriften ächt Hippokratische Lehren sich befänden.

Vor der Zeichenlehre sagt Celsus (*L. 2. Praef.*): *Instantis autem adversae valetudinis signa complura sunt. In quibus explicandis non dubitabo auctoritate antiquorum virorum uti, maximeque Hippocratis.* Wirklich kommen auch viele Zeichen vor, welche wörtlich aus dem Prognostikon, den Aphorismen und einigen andern Hippokratischen Schriften entlehnt sind; aber dieses beweist nichts mehr, als dafs jene Bücher aus Hippokratischen Schriften gezogen wurden.

Wir haben noch eine Erklärung der Kunstwörter in den Hippokratischen Schriften von Erotian, mit einer Anrede an Andromachus, den Leibarzt des Kaisers Nero. Man sieht es als ein Kennzeichen der Aechtheit an, wenn Erotian eine Hippokratische Schrift nennt. Es beweist weiter nichts,

als dafs zu Erotian's Zeiten diese Schriften schon zu den Hippokratischen gerechnet würden.

Plinius lehrt uns den Hippokrates als einen Mann kennen, welchen der Schimmer der Fabel umgiebt. Hippokrates sagt in *L.* 7. *c.* 37: (*Medicina*) *innotuit, qui venientem ab Illyris pestilentiam praedixit discipulosque ad auxiliandum circa urbes dimisit, quod ob meritum honores illi quos Herculi, decrevit Graecia.* So auch früher Varro *d. r. r. L.* 1. *c.* 4. Und Thucydides, dieser sorgfältige Geschichtschreiber, der uns eine Beschreibung der Pest (eigentlich *typhus*) zu Athen gegeben, so genau, als man sie nur von einem Arzte verlangen kann, sollte von jener Begebenheit ganz geschwiegen haben? Eine Begebenheit, welche ganz Griechenland betraf? Wahrlich, dieses ist kaum zu glauben. Ferner heifst es *L.* 29. *c.* 1. *sect.* 2, Hippokrates habe die Tafeln, worauf die Genesenen in den Tempeln ihre Bemerkungen verzeichneten, abgeschrieben, und den Tempel verbrannt, *ut Varro apud nos credidit.* Der historische Hippokrates entschlüpft uns, und es erscheint an seiner Stelle eine mythische Person.

Schon früher als Plinius, redet vom Hippokrates auf eine ähnliche Weise Varro. *An non,* sagt er, *ille Hippocrates medicus in magna pestilentia non unum agrum sed multa oppida, scientia servavit?* (*De re rustic. L.* 1. *c.* 4.)

Galen rühmt sich, durchaus ein Nachfolger des grofsen Arztes von Kos zu seyn; er hat viele Schriften desselben commentirt, und einige dieser Commentare sind bis auf unsere Zeiten entweder in der Grundsprache, oder auch in lateinischen Uebersetzungen gekommen. Galen klagt, dafs sich unter den Hippokratischen Büchern nicht allein völlig unächte befinden, sondern er hält auch einzelne Theile derselben, einzelne Stellen für untergeschoben. Er folgt darin beständig innern Kennzeichen, wenn ihn nämlich die Lehren in denselben falsch oder Hippokratischen Lehren entgegen scheinen. Von der sonderbaren Meinung, welche ihn leitet und verführt, ist schon oben geredet worden. Er glaubt nämlich, die Philosophie, wie Platon und nach ihm Aristoteles sie lehrten, sey nicht von den Philosophen erdacht, sondern ursprünglich von den Aerzten, namentlich von Hippokrates, erfunden, und nur von jenen Philosophen ausgebildet worden. (S. besonders *de Hippocratis et Platonis placitis L.* 8.) Es ist vorzüglich die Aristotelische Lehre von den vier Qualitäten, welche Galen meint, weil er ein besonderer Vertheidiger derselben ist. Als Beweis führt er das Buch *de*

natura hominis an, worin allerdings die Lehre von den vier Qualitäten auf die Arzneikunde angewendet wird, indem er Platon's Zeugnifs von Hippokrates darauf gewaltsam bezieht. Diese vorgefafste Meinung macht ihn zum verdächtigen Zeugen über alles, was die Hippokratischen Schriften betrifft.

Wir haben eine Lebensbeschreibung von Hippokrates, von einem Soranus, nur weifs man nicht, von welchem. Sie enthält die Fabeln, welche schon beim Plinius vorkommen, und noch einige mehr. Ein Graeculus hat diese Mährchen in Briefe ausgesponnen, welche gewöhnlich den Hippokratischen Schriften vorgedruckt werden. Dort schreibt der Senat zu Abdera, ihr sonst so vortrefflicher Mitbürger, Demokrit, sey wahnsinnig geworden, denn er lache über alles, was zu Abdera geschehe, Hippokrates möge kommen und ihn heilen. Nun folgen einige Briefe von Hippokrates über diesen Gegenstand, unter andern einer an einen Krateuas, der zu August's Zeiten lebte, worin er ihm den Auftrag und Regeln giebt, Kräuter zu sammlen, damit er sie auf seiner Reise zum Demokrit gebrauchen könne. Die Sache endigt sich damit, dafs Hippokrates den Abderiten erklärt, Demokrit sey nichts weniger als verrückt, woraus denn sehr natürlich folgt, die Abderiten seyen es vielmehr gewesen. Ein anderes Mährchen ist folgendes. Artaxerxes schreibt an Hippokrates und erbittet sich Rath von ihm in einer Pest, und ersucht ihn endlich sogar, selbst zu kommen. Aber der hochsinnige Hippokrates antwortet, er werde nicht kommen, denn A. sey ein Feind seines Vaterlandes. Auch dieses Geschichtchen ist in mehrere Briefe ausgedehnt. Endlich findet sich noch die Rede von Thessalus und Drakon, Söhnen des Hippokrates, darunter, welche die Koer nach Athen als Gesandten schickten, weil Athen den Koern den Krieg erklärt hatte.

Unter den neuern Kritikern wollen wir nur einige wenige nennen. Von Hieronymus Mercurialis rührt die Eintheilung der Hippokratischen Schriften in drei Klassen her: in ächte Schriften; in solche, die nicht von Hippokrates selbst, aber von seinen Schülern herrühren, und ächt Hippokratische Lehren enthalten; und in unächte Schriften. Uebrigens folgt er Galen in den genauern Bestimmungen, und vergeblich sucht man bei ihm einen Grundsatz, der ihn leitet. Die häufigen Commentatoren Hippokratischer Schriften haben wenig zur Kritik derselben beigetragen; jeder fand das Buch ächt Hippokratisch, welches er zu erläutern unternommen hatte. Der berühmte Foesius ist sehr geneigt, jede Schrift, welche das spätere Zeitalter nicht gar zu grell ausspricht, für ächt zu halten. Haller gesteht selbst,

dafs er nicht die Zeit zu genauern Forschungen gehabt habe, und dafs er behutsam wie Foesius seyn wolle. Von Gruner haben wir eine *Censura librorum Hippocraticorum*, und von ihm und Grimm eine Bibliothek der alten Aerzte. Kennzeichen eines ächt Hippokratischen Buches sind ihm: Kürze, eine abgebrochene, nachdrückliche Schreibart, im Ionischen Dialekt, doch mit Rücksicht auf den Dorischen und Attischen, ohne Schmuck und Theorien. Aber in dem Buche von der Luft, dem Wasser und den Lagen der Oerter, herrscht keine kurze, nachdrückliche, noch weniger abgebrochene Schreibart; auch in den Büchern von der Ptisane findet man diese Eigenschaften nicht. Es ist wahr, in den Schriften, welche Gruner vorzüglich für ächt erklärt, wird einer Theorie nur selten erwähnt. Aber wird Hippokrates als ein Feind der Theorie von Platon, von Celsus geschildert? Das Kennzeichen am Dialekt ist nicht leicht zu bestimmen, und erfordert Sprachforschungen, die noch nicht angestellt sind. Sprengel ist in seiner Apologie des Hippokrates und in seiner Geschichte der Arzneikunde zu wenig von Gruner abgewichen.

Doch ich kehre zu den Theorien zurück, welche in den Hippokratischen Schriften herrschen.

I. Theorie von Galle und Phlegma.

Galle und Phlegma sind nach dieser Vorstellungsart wesentliche Bestandtheile aller Flüssigkeiten des Körpers. Sind sie gehörig gemischt, so ist der Körper gesund; tritt eine derselben hervor, so entsteht Krankheit.

In den Schriften, welche zu dieser Abtheilung gehören, ist diese Theorie keinesweges ausgeführt, wohl aber durch eine oder die andere Stelle angedeutet. Es herrscht in ihnen aber durchaus keine andere medizinische Theorie. Sie sind rein empirische Schriften, und eben deswegen werden viele derselben vorzugsweise für ächt Hippokratisch gehalten.

Diese Theorie ist die älteste medizinische, von der wir Nachrichten haben. Der Ausdruck: alle gallichte Ausleerungen, so wie sie von den Aerzten genannt werden, kommt schon in der Beschreibung der Pest zu Athen von Thucydides vor. Bestimmt sagt Aristoteles (*Physicor. L. 2. c. 3.*), die

Eintheilung der Krankheiten nach Galle und Phlegma sey den Aerzten gewöhnlich. Später unterschied man Arten von Galle und Phlegma; diese Unterscheidungen sind den ältern Schriften noch fremd. Platon giebt im Timäus Galle und Phlegma als Ursachen von Krankheiten an, setzt aber πνευμα hinzu. Merkwürdig, dafs schon in den *Upanishads* (Anquetils *Oupnek'hat*) diese Theorie vorkommt.

Alles stimmt also darin überein, dafs die Schriften dieser Theorie zu den ältesten der Sammlung gehören. Auch finden sich unter ihnen diejenigen, an deren Aechtheit der wenigste Zweifel gewesen ist.

Der Gegensatz von Galle und Phlegma (Schleim) wurde schon früh aufgefafst. Uebermafs an Galle oder Hervortreten derselben ist Ursache der hitzigen Krankheit, Uebermafs an Phlegma oder Hervortreten desselben ist Ursache der chronischen Krankheit. Jene bezeichnet das Heftige, Durchdringende, Entschiedene; dieses das Matte, Aufgelöste, Langsame. Es war eine Uebersicht für Entstehung der Krankheiten, so wie für Anwendung der Heilmittel gegeben, die, wenn sie gleich unsern jetzigen Kenntnissen nicht entspricht, doch ihnen, gehörig gestellt, nicht ganz widerspricht. Es versteht sich, dafs man Galle und Phlegma nicht wörtlich nehmen, sondern nur als Darstellung der oben gedachten Zustände des menschlichen Körpers betrachten mufs.

Die hieher gehörigen Schriften sind folgende.

Επιδημιων α και γ. *Epidemicorum L. I. et III.* Nach Galens und aller Alten Zeugnisse sind diese beiden Bücher allein ächt, und die Neuern haben nichts dagegen erinnert. In ihnen tritt das, was wir Hippokratische Lehre nennen, oder was wir als das Ausgezeichnete dieser Lehre betrachten, am deutlichsten hervor, nämlich die Rücksicht auf die *constitutio anni* (κατάσασις ἔτης), oder das Verhältnifs der Krankheiten zur Witterung; denn epidemische Krankheit heifst bei den Alten bestimmt die Krankheitsform, wie sie durch die Witterung, folglich allgemein, bestimmt wird. Das Verhältnifs der Krankheiten zu einer Periode von mehreren Jahren kannten die Alten noch nicht, auch ist es erst vor nicht gar langer Zeit zur Sprache gekommen. Ferner unterschieden die Alten sehr wohl, was jetzt oft mit dem Epidemischen verwechselt wird, den λοίμος oder eine κατάσασις λοιμώδης, die von andern fremden Dingen, nicht von der Witterung, allgemein bewirkt wird. Der Begriff vom Ansteckenden liegt nicht darin; der Katarrh z. B. kann oft epidemisch seyn, aber jener Katarrh, welcher 1782 von China

China bis S. Domingo zog, würde den Alten ein λοιμος gewesen seyn. Doch dieses beiläufig. Vortrefflich werden die Constitutionen mehrerer Jahre in diesen Büchern geschildert, und es folgen darauf Krankengeschichten, mit einer Genauigkeit erzählt, die noch Muster ist. Die scharfe, treffliche Beobachtung erhebt diese beiden Bücher zu dem ersten Range der medizinischen Schriften, nicht des Alterthums allein, sondern auch der neuern Zeit. Von keiner Theorie kommt etwas vor, als dafs ἐμετοι φλεγματώδεις und χολώδεις unterschieden werden.

Oft ist von Krankheiten die Rede, worin Aderlafs angezeigt war, z. B. im dritten Buche von einer Lungenentzündung, wo Aderlafs vormals, wie jetzt, nothwendig gehalten wurde. Hier gerathen die Auslager in die gröfste Verlegenheit. Wie, sagt Galen, Hippokrates, der in den Aphorismen, in der Schrift *de diaeta in acutis* den Aderlafs liebt, gebrauchte hier ihn nicht? Oder verschwieg er ihn nur? Galen entscheidet für das Letzte. Wahrlich ein guter Beobachter, der nicht einmal die Veränderung der Krankheit nach einem so wirksamen Heilmittel angiebt! Was ist natürlicher zu vermuthen, als dafs dieser Hippokrates von dem Hippokrates der Aphorismen und der *diaeta in acutis* verschieden war. Der reine Krankheitsverlauf, ungestört von Heilmitteln, sollte von dem V. dieser Schriften dargestellt werden.

Alle Krankheitsgeschichten im ersten Buche sind von Kranken auf Thasos, im dritten Buche die Hälfte. Hier kommen noch sechs aus Abdera, zwei aus Larissa, eine aus Cyzicum, eine aus Moeliboea vor. Wie kommt Hippokrates nach Thasos? Nicht die geringste Spur einer Nachricht, dafs sich der grofse Arzt auf Thasos befunden. Diese Insel an der Küste von Thracien hatte einen Tempel des Herkules, war fruchtbar und lieferte guten Wein; aber von einem Tempel des Aeskulap's oder der Hygieia hat man keine Nachricht. Und mehrere Jahre war der Verf. dort, denn die Constitutionen mehrerer Jahre werden beschrieben.

In dem Buche von der Luft, dem Wasser u. s. w. wird dieselbe Theorie vorgetragen. Aber erstlich ist darin nirgends von Thasos die Rede, da der Verf. doch Asien und Europa vergleicht, wobei jene Insel wohl eine Erwähnung verdient hätte; und dann ist die Theorie ganz anders gewandt. So redet der Verf. von dem Austrocknen der Körper, welches vorzüglich die gallichten Personen treffe, auch von wässerigen oder feuchten Naturen u. dgl. m. Wir sehen also schon hieraus, die verschiedene Schreibart ab-

gerechnet, dafs beide Werke wohl nicht einen und denselben Urheber hatten. Eines von beiden mufs unächt seyn.

Es ist ferner sonderbar, dafs nirgends in diesen beiden Büchern Heilmittel angeführt werden. Die Kranken sterben, nach der Erzählung, ohne die geringste Hülfe. Sollte ein berühmter Arzt es wagen dürfen, ein so ruhiger Beobachter der sterbenden Kranken zu seyn? Dafs der V. die Heilmittel verschwieg, wie Galen meint, läfst sich nicht glauben: das hiefse, durch die gröfste Sorglosigkeit das Sorgfältigste zerstören. Die Bücher scheinen mir also mehr von einem blofs beobachtenden Naturforscher, als von einem Arzte zu seyn.

Wenn Galen sagt, alle stimmen darin überein, dafs diese beiden Bücher ächt sind, so geht dieses „alle" nicht über die Zeiten der Alexandriner.

Das zweite Buch enthält unordentlich, mangelhaft erzählte Krankengeschichten, eine höchst unanatomische und daher vielleicht sehr alte Beschreibung der Adern, eine Krankheitsphysiognomik. Das vierte und fünfte Buch enthält, wie das zweite im ersten Theile, viele kurz und mangelhaft erzählte Krankengeschichten aus verschiedenen Gegenden. So auch das siebente. Das sechste besteht ganz aus Aphorismen, und scheint mir in der Schreibart grofse Aehnlichkeit mit dem *Coacae Praenot.* und *Prorrheticon* zu haben. Alle Bücher sind eingestanden unächt. Im vierten Buche wird, wie Sprengel schon erwähnt, eines Kynischen Philosophen gedacht.

Προγνόστικον oder προγνόστικα. *Prognosticon.* Ein allgemein für ächt Hippokratisch anerkanntes Buch, wie Galen sagt. Aber nähere Nachrichten über diesen Ausspruch sucht man vergebens bei diesem Schriftsteller. Viele richtige, genaue Angaben, ein deutlicher bestimmter Ausdruck haben dieses Buch sehr beliebt gemacht. Aber ich sehe nicht, wie man dem Buche eine gute Ordnung zuschreiben kann. Es folgen die Zeichen von Gesicht, Athmen, Schweifs, Schmerz in den Seiten, Geschwüren, Oedemen auf einander. Dann im zweiten Theile: Zeichen von Wassersucht, Hitze in einzelnen Theilen, Schwere der Theile, Farbe der Nägel, Schlaf, Stuhlgang, Urin u. s. w. Nirgends ein Rückblick auf die Ursachen, nicht einmal in der äufserst feinen Semiotik des Urins. Der Hippokrates, welchen Platon uns schildert, sollte man glauben, würde das Ganze doch etwas wissenschaftlicher eingerichtet haben. Ueberhaupt scheint das Buch ein semiotischer Auszug aus Hippokratischen Schriften zu seyn.

Προρρητικον oder προρρητικα. *Prorrheticon.* Wir haben von Galen einen Commentar über das erste Buch. Er sagt zum vierten Text, der Verfasser mache einen *Soloecismus*, weil er von ἐναιωρεμένον ἔρον spricht, statt von ἐναιωρεμένου ἐν ἔρῳ. Wegen dieser und anderer Soloekismen, sagt er, glaubten einige ἄκ εὐλογῶς, das Werk sey nicht vom Hippokrates. Die dunkle, gesuchte Kürze, die sonderbaren Wendungen, die gehäuften Beiwörter, die Reden im Infinitiv stellen das Buch mit dem folgenden und dem sechsten Buche der *Epidem.* zusammen.

Das zweite Buch hat einen ganz andern Verf. Ein deutlicher, einfacher Styl unterscheiden es. Haller und Gruner erkennen es für ächt, Erotian und Galen für unächt. Die Klage im Anfange, dafs man die Vorhersagung in den Krankheiten übertreibe, gehört offenbar einem spätern Zeitalter.

Κώακαι προγνώσεις. *Coacae Praenotiones.* Was vom ersten Theile des *Prorrheticon* gilt, läfst sich auch von dieser Schrift sagen. Auch sind manche Stellen wörtlich in beiden zugleich vorhanden. Nach Gruner uud Grimm älter als Hippokrates. Aber diese geziert zusammengehäuften Ausdrücke haben das Gepräge des höhern Alterthums nicht.

Αφορίσμοι. *Aphorismi.* Von allen Hippokratischen Schriften die berühmteste, und im Ganzen für ächt erkannt. Aber manche Aphorismen verwirft Galen schon als unächt, namentlich die ganze achte Abtheilung, ferner Nr. 46. und 68. der siebenten Abtheilung. Bald ist unter den Sätzen einiger Zusammenhang und Ordnung, bald keine Spur davon. Der letzte Aphorismus der ersten Abtheilung ist schon im zweiten enthalten, der vorletzte ist der neunte der zweiten Abtheilung, und dergleichen Unordnungen mehr. Die dritte Abtheilung enthält viele Sätze aus dem Werke *de aère aquis, locis*, viele andere stimmen mit der Zeichenlehre im *Prognosticon* wörtlich überein. So hatte man Gründe genug, diese Sätze als Auszüge aus Hippokratischen Schriften anzusehen. Ein Ueberblick des Ganzen zeigt eine gröfsere Mannigfaltigkeit. In der ersten Abtheilung, nach einem sehr allgemeinen Anfange, sogleich Sätze von den Ausleerungen, dann von der Diät, den Krisen, von dem, was ἔργα καὶ ἔπει, uralte Begriffe der Arzneikunde.

Zweite Abtheilung. Mancherlei Zeichen. Dann erst die genaue Bestimmung der kritischen Tage, welche im Vorigen nur allgemein angedeutet wurden, offenbar Ausführung der Sätze in der vorigen Abtheilung.

Dritte Abtheilung, περὶ ὥρων καὶ ἡλικίων, wie Galen den Inhalt angiebt. Uebereinstimmend mit den Lehren der Ἐπιδημιῶν.

Vierte Abth. Zuerst wiederum über Ausleerungen, aber feinere Unterscheidung der Krankheiten, als in den ersten Abtheilungen. Unterscheidung von schwarzer und gewöhnlicher Galle, ebenfalls in den vorigen Abtheilungen nicht zu finden. Schon einige Ausdrücke, welche auf die vier Grundeigenschaften zu deuten scheinen. Sätze über Fieber, Schweifs, Urin. Die fünfte Abtheilung ist eine Fortsetzung der vierten, und handelt von Krämpfen, Phthisis, Kälte, Wärme, Schwangerschaft.

Sechste Abtheilung. Ein wunderliches Gemisch von Sätzen, darunter einige sehr auffallende, z. B. Stammelnde bekommen leicht langwierige Diarrhöen.

Siebente Abtheilung. Ebenfalls gemischte Sätze, aber sie haben das Eigenthümliche, dafs sie meistens mit gleichen Wörtern anfangen und absichtlich nach diesen zusammengestellt sind, so mit ἔπι, oder ὁκοσοῖσιν, oder ἤν, z. B. ἐπὶ καύμασιν ἴχυροῖσιν σπασμοὶ ἢ τέτανοι, κακὸν.

So sehen wir also in den Abtheilungen Unterschiede, die es höchst wahrscheinlich machen, dafs sie nicht von einem Verfasser und zu einer Zeit gesammlet wurden. Vielmehr bemerken wir ein Fortschreiten vom Einfachern zum Genauern, dann zum Sonderbaren, endlich zum Spielenden.

Περὶ διαίτης ὀξέων. *De acutorum* (*in acutis*) *diaeta.* Nur der erste Theil von der Ptisane hat Galen's und Erotian's Zeugnifs für sich, die übrigen werden von allen Kritikern mit Recht verworfen, und zeigen sich sogleich als unordentliche Anhängsel. Das Buch von der Ptisane fängt mit einer Polemik gegen die Knidischen Aerzte an. Gab es zu Hippokrates Zeiten schon so viel Schriftsteller dieser Art, dafs eine Polemik dagegen nöthig war? Ueberdies werden viele Arzneimittel angegeben, σίλφιον, ὀπὸς u. dgl.

Περὶ ἀέρων, ὑδάτων, τόπων. *De aëre* (*aëribus*), *aquis, locis.* Einstimmig für ächt erkannt. Der Einfluss der Luft, des Wassers und der Lage der Oerter, nicht allein auf die Gesundheit, sondern auch auf die Sitten, wird gezeigt. Eine Vergleichung der Europäer und Asiaten, so wie eine Nachricht von den Skythen, nehmen einen grofsen Theil des Buches ein. Die Schreibart ist leicht und gefällig, die Untersuchung doch im Ganzen flach, und nicht mit der Schärfe geführt, welche in den Büchern von den epidemischen Krankheiten herrscht. Verdächtig sind mir die mannigfaltigen Hindeutungen auf die folgende Theorie, z. B. den galligen Constitutionen schade die Trocknifs, wegen des Austrocknens, den phlegmatischen nutze sie; woraus folgt, dafs die Galle für trocken und das Phlegma für feucht gehalten

wird, gerade wie in der folgenden Theorie. Dieses Buch gehört daher mehr zur folgenden Klasse.

II. Theorie von den vier Grundeigenschaften.

Die Ableitung der vier Grundeigenschaften aller Dinge: warm, kalt, feucht, trocken, ist dem Aristotelischen System eigenthümlich. Auf eine ganz eigene Weise findet sie der grofse Philosoph, indem er die verschiedenen möglichen Eigenschaften der Körper zusammenstellt, das Abgeleitete ausschliefst, ferner das, was im Verhältnifs von Leiden und Wirken steht, und endlich was nur blofs Streben nach einer Gegend ist. Erst aus diesen Grundeigenschaften und deren möglicher Verknüpfung entstehen die vier Elemente: aus kalt und trocken die Erde, aus warm und trocken das Feuer, aus kalt und feucht das Wasser, aus warm und feucht die Luft.

Keiner der ältern Schriftsteller äufsert auch nur die Vermuthung, dafs Aristoteles diese Lehre von andern entlehnt habe. Galen allein schreibt sie dem Hippokrates zu, und zwar weil sie in dem Buche *de natura hominis* zum Grunde liege, und weil Platon dieses Buch anführe. Wir haben dieses schon erwogen. Wie sehr Galen in dieser Meinung allein stand, sehen wir aus unzähligen Stellen seiner Schriften, sehr deutlich z. B. aus der heftigen Apologie gegen Lykos. Er klagt nicht selten die Neider an, welche ihm die Ehre seiner Entdeckung rauben wollen, denn dafür hält er seine Mefnung.

Es ist den Aerzten gewöhnlich, die herrschende philosophische Theorie auf die herrschende medizinische auszudehnen. In neuern Zeiten, als die Brownische Lehre sich über Deutschland verbreitete, konnte es nicht fehlen, dafs nicht die Kantische Philosophie darauf angewendet wurde, und die Receptivität sowohl als die Spontaneität in der Incitabilität erschieu. So auch damals. Galle und Phlegma lagen zum Grunde, feine Theoretiker hatten die Galle in gelbe und schwarze unterschieden, und jetzt kamen die vier Grundeigenschaften hinzu. Warm und feucht war das Blut, warm und trocken die gelbe Galle, kalt und trocken die schwarze Galle, kalt und feucht das Phlegma. Daher die Mischung im organischen Körper, die κρᾶσις, *temperamentum*, und die vier Hauptmischungen, als die vier Grundtemperamente. In dem Blute und sanguinischen Temperamente tritt die Luft her-

vor, in der gelben Galle und dem cholerischen Temperamente das Feuer, in der schwarzen Galle und dem melancholischen die Erde, in dem Phlegma und phlegmatischen das Wasser. Die Heilmittel wirken durch ihre hervorstechende Eigenschaften; sie sind warm, kalt, feucht oder trocken im ersten, zweiten, dritten, vierten Grade (ἀπόσασις).

Alle Hippokratische Schriften, in denen diese Lehre herrscht, mögen wir also in die Zeiten nach Aristoteles versetzen, folglich lange nach der Zeit, wo Hippokrates lebte. Keine einzige kann auf Aechtheit Anspruch machen, so sehr auch Galen für einige redet. Diese Schriften sind:

Περὶ φύσιος ἀνθρώπε, περὶ γονῆς, περὶ φύσιος παιδίε, περὶ διαίτης ὑγιεινῆς, περὶ διαίτης ὑγιεινόντων, das erste Buch ausgenommen, περὶ τροφῆς, περὶ παθῶν, περὶ τῶν ἐντός παθῶν, περὶ νέσων, περὶ γυναικέων, περὶ γυναικείης φύσιος, περὶ ἱερῆς νόσου, περὶ αἱμορροιδῶν, περὶ παρθενίων, περὶ ἕξέως, περὶ ἑλκῶν, περὶ συρίγγων: zum Theil sehr kleine Schriften, und solche, die kein Zeugniss von Galen und Erotian für sich haben. Diejenigen, worin starke Arzneimittel empfohlen werden, rechnet man zur Knidischen Schule.

III. Theorie von den abgeleiteten Eigenschaften.

Eine Schrift gehört vorzüglich hieher: περὶ ἀρχαίης ἰητρικῆς, *de antiqua medicina*. Der Verfasser eifert gegen die Ableitung der Krankheiten von den Grundeigenschaften: warm, kalt, feucht, trocken, und sagt: Was eigentlich schade, sey das Bittere, Süfse, Herbe, Schale (πλαδαρὸν), nicht gehörig gemischt. Mit Recht behauptet er, die alte Medizin habe sich auf solche Theorien nicht eingelassen, sey durch Erfahrung, durch Beobachtung über das, was helfe und schade, entstanden. Das sonst gute Buch kann nicht von Hippokrates seyn, da es eine Lehre verwirft, welche durch Aristotelische Philosophie entstanden war.

IV. Theorie vom Feuer, als dem allgemein Wirkenden.

Heraklits Philosophie herrscht in dieser Lehre. Die Schrift περὶ σαρκῶν, die man auch περὶ ἀρχῶν genannt hat, ist das wichtigste Buch dieser Klasse.

Es ist darin eine physiologische Erklärung enthalten, wie die Theile des organischen Körpers sich bilden. Fett und Schleim werden durch das Feuer ausgetrocknet, ausgebrannt, und so in mannichfaltige Theile geformt. Das Element des Feuers bildet sie mit Bewufstseyn, denn der αἴθηρ wisse alles. Einige Stellen aus dieser Schrift führt Aristoteles an, schreibt sie aber dem Polybus zu (*Hist. Anim. L.* 3. *c.* 3.). Von Hippokrates ist also diese Schrift nicht, aber alt ohne Zweifel.

Der erste Theil des Buches περὶ διαίτης ὑγιεινόντων mufs ebenfalls hieher gerechnet werden.

V. Theorie vom πνευμα.

Die Schriften περὶ φυσῶν und περὶ ὀστέων φύσεως enthalten diese Theorie, von welcher schon oben geredet ist.

VI. Theorie von den Flüssen.

Eine gewifs uralte Theorie, welche auch in den Schriften der Chinesischen Aerzte herrscht. Sie trägt die Spuren ihres rohen Ursprungs an sich, läfst die schadhafte Materie von einem Theile zum andern flieſsen. Daher der Ausdruck Flufs, ῥεῦς, *catarrhus*. Vom Kopfe senkt sie sich auf die Brust und auf die übrigen Glieder, erregt zuerst Schnupfen, dann Brustbeschwerden, endlich Gliederschmerzen. Auch wirft sich die Materie von einem Theile zum andern (ῥέπει). Unbekümmert um die Wege, welche die schadhafte Materie zu machen hatte, lieſs man sie durch den Körper fortrücken, als ob eigene Kanäle für sie da wären. Es ist die natürlichste medizinische Theorie, welche noch immer unter dem Volke herrscht, und darunter herrschen wird, denn es ist die Sprache der Empfindung. Vielleicht ist auch die Theorie so unrichtig nicht, und kann eine wissenschaftliche Deutung erlangen, wenn die galvanische Versetzung mit der gehörigen Umsicht und Vorsicht auf den organischen Körper angewendet seyn wird.

Unter den Hippokratischen Schriften sind vorzüglich zwei zu nennen, worin diese Theorie herrscht. Die erste hat die Ueberschrift: περὶ τόπων τῶν κατ' ἄνθρωπον, *de locis in homine*. Der Verf. weifs schon, wie die Kälte die Theile spannt und zusammenzieht, wodurch die flüssige Materie ausge-

preſst wird, dann wie die Wärme die Materien schmilzt und sie ausfliefsen läſst, Galen und Erotian führen dieses Buch als ächt auf. Aber es bezieht sich deutlich auf die Lehre von den vier Grundeigenschaften, und gehört also in die Zeiten nach Aristoteles. Die zweite ist die Schrift: περὶ ἀδένων, *de glandulis.* Das Gehirn ist dem V. eine Glandel, worin eine Feuchtigkeit bereitet wird, die verdorben auf andere Theile fliefst und Krankheiten erregt. Galen hält die Schrift für unächt. Sie enthält offenbar Verfeinerung einer alten Theorie.

Unter diese sechs Abtheilungen lassen sich die gröfsern, wichtigern und von Vielen als ächt erkannten Hippokratischen Schriften bringen. Wir haben hier eine Sammlung von Schriften, vor der Zeit geschrieben, als zu Alexandrien Wissenschaften, und mit ihnen die Arzneikunde, blühten, und mit dem Namen Hippokrates bezeichnet. Verschieden ist in ihnen Lehre und Sprache, so dafs sie wenigstens von sechs Verfassern herrühren, unter denen man einen auswählen mag, um ihn Hippokrates zu nennen. Es giebt noch einige andre kleine Schriften in der Hippokratischen Sammlung, welche sich nicht wohl zu einer dieser sechs Abtheilungen bringen lassen, aber sie gehören zu den unbedeutendern, und es ist nicht eine darunter, gegen deren Aechtheit man nicht schon früh grofse Zweifel erhoben hätte.

Kri-

Kritische Untersuchung einiger Erscheinungen, welche als Wirkung der galvanischen Action erklärt worden sind im Allgemeinen, und über Metallreduction auf nassem Wege ins Besondere.

Eingesendet vom Herrn Professor Fischer in Breslau *)

Einleitung.

Unser Streben nach Erkenntniſs der Natur offenbart sich auf zwiefache Weise; erstens in dem treuen und unbefangenen Beobachten der Naturerscheinungen selbst und dem schöpferischen Hervorrufen derselben durch das Experiment, zur Ausmittelung der nähern Bedingung ihres Seyns, und zweitens in dem Zusammenfassen ganzer Gruppen dieser Erscheinungen unter einen allgemeinen Gesichtspunkt, und dem Unterwerfen derselben unter ein gemeinschaftliches Gesetz. Wir wollen jene die rein empirische, diese die speculative Richtung der Naturforschung nennen. Soll jedoch das ganze Streben nicht zwecklos seyn, soll es zu einer Naturwissenschaft führen: so müssen beide Richtungen vereint seyn, und zwar nicht bloſs im Allgemeinen und in der Gesammtheit der Naturforscher als solcher, sondern in jedem Individuum derselben; weil nur derjenige, welcher von einem Gesetze geleitet wird, einzelne Erscheinungen und ihre Bedingungen mit Erfolg und Nutzen beobachten wird, und auf der andern Seite nur derjenige wahrhaft höhere Ansichten über die Natur angeben kann, welcher von der Erfahrung jeder einzelnen Erscheinung ausgeht. Ohne das wechselseitige

*) Vorgelesen den 13. Julius 1815.

Ineinandergreifen beider Richtungen zerfällt das Bemühen des Experimentators in Spielereien, das des Philosophen in leeren Hirngespenstern.

Mit der Erweiterung und Vervollkommnung der Wissenschaften bekömmt, wie natürlich, jene speculative Richtung die Oberhand, und zwar nicht nur in der Gesammtheit der Naturforscher, sondern in jedem einzelnen derselben. Das Hingeben seiner Bemühungen für das bloſse Experimentiren und Beobachten der Erscheinungen verschmähend, strebt ein Jeder, wenn auch nicht selbst ein neues System der Naturwissenschaft zu schaffen, so doch wenigstens an einem vorhandenen thätig mit zu arbeiten. Daher die an sich auffallende Erscheinung, daſs in unserer Zeit, wo die Naturwissenschaft, wie nicht zu leugnen, auf einer hohen Stufe der Vollkommenheit steht, und in der sich der Gegensatz von Empirie und Speculation so hart und gehässig ausgesprochen hat, viele Gegner der Naturphilosophie weit mehr Hypothesen und unbegründete Gesetze aufstellen, als die sogenannten Naturphilosophen selbst. Soll indessen die Wissenschaft wahrhaft fortschreiten: so müssen wir in dem Maſse, als der menschliche Geist sich mehr zu dem Gesetze der Erscheinungen, als zu deren Beobachtung hingezogen fühlt, auch unsere Aufmerksamkeit mit gedoppelter Strenge auf das Besondere jeder einzelnen Erscheinung richten, damit nicht nach äuſserer Aehnlichkeit und andern Scheingründen, Wirkungen ganz verschiedener Natur einer und derselben Ursache zugeschrieben werden. Denn so gleichgültig auch eine solche falsche Zusammenstellung an und für sich seyn dürfte, so wenig bleibt sie es, wenn man den Einfluſs betrachtet, den sie oft auf die Richtung der fernern Bearbeitung einzelner Gebiete der Wissenschaft ausübt.

Die kurze Geschichte des Galvanismus liefert mehrere Beispiele dieser Art, von denen ich nur die Ansicht Ritter's, den Galvanismus mit dem Magnetismus in eins zusammen zu schmelzen, erwähnen will, welcher Irrthum von Erman so musterhaft dargethan und beseitigt worden ist.

Die verschiedenen Theorien, welche über die Natur des Galvanismus herrschen, und namentlich sowohl die beiden entgegengesetzten Ansichten, nach welchen entweder erstens die elektrische Spannung, welche bei Berührung der beiden heterogenen Körper einer Klasse entsteht, als die alleinige Ursache und als das ursprünglich Thätige bei dem galvanischen Processe, jede Wirkung aber, so wie die in der Kette selbst vorgehende Oxydation, als Produkt und Folge betrachtet wird; oder umgekehrt zweitens, die Oxydation, welche in der Kette zwischen den Gliedern beider Klassen der Lei-

ter eintritt, als die erste und alleinige Ursache des galvanischen Processes gesetzt, und zum Erklärungsprincip aller Wirkungen wird; sowohl diese Theorien, als auch jene dritte, welche diese entgegengesetzten Ansichten vereinigt, indem sie den galvanischen Proceſs als identisch mit dem chemischen betrachtet; die eine wie die andere scheinen zu mehreren ungegründeten Behauptungen Veranlassung gegeben zu haben. Denn je nachdem man sich für diese oder jene der streitenden Partheien erklärte, glaubte man auch in jedem chemischen Proceſs die Bedingungen zu einer galvanischen Kette zu sehen, oder umgekehrt bei jeder galvanischen Action den Oxydationsproceſs voraussetzen zu müssen; oder endlich, man hielt sich für befugt, in jeder galvanischen oder chemischen Wirkung beide, den galvanischen wie den chemischen Proceſs, nachzuweisen.

Ich kann nun um so weniger in diesen Streit unmittelbar eingehen, als er in der That kaum zu entscheiden ist. Denn die Vertheidiger der einen wie der andern Ansicht werden nie darum verlegen seyn, jeder galvanischen Action eine, wenn auch nur unbedeutende, in keinem Produkte sich darstellende, nicht wahrnehmbare Oxydation unterzulegen, und umgekehrt, bei jeder chemischen Action eine, wenn auch durch keine Erscheinung wahrzunehmende galvanische Kette wirken zu lassen. Auch werden sie nie in Verlegenheit seyn, die drei Glieder nachzuweisen, die zur Bildung einer galvanischen Kette erforderlich sind, indem ihnen immer der Ausweg offen bleibt, die beiden überall vorhandenen Elemente, nämlich Luft und Wasser, zu Hülfe zu nehmen, um das fehlende Glied zu ersetzen; sie werden auch wohl nicht einmal anstehn, Substanzen als Glieder dieser Kette anzunehmen, welche sonst den Galvanismus nicht zu erzeugen und zu leiten vermögen, ja selbst Substanzen, welche hemmend und vernichtend dagegen wirken.

Uebrigens scheint mir die Entscheidung dieses Streites, wenn er mit den angegebenen Waffen geführt wird, für die Wissenschaft selbst von wenig Bedeutung zu seyn, und dem Chemiker kann es eben so gleichgültig seyn, wenn bei dem chemischen Proceſs auſser der chemischen Verwandtschaft auch eine unbemerkbare galvanische Thätigkeit als mitwirkend vorausgesetzt wird, als es dem Elektriker ist, wenn man bei dem elektrischen Proceſs eine nicht wahrzunehmende Oxydation als begleitend annimmt. Die sehr wahrscheinliche Ansicht hingegen, nach welcher die chemische Verwandtschaft als gegründet auf dem elektrischen Gegensatz der Körper be-

trachtet wird, ist, wie ich glaube, von den aufgestellten Theorien ganz unabhängig.

Diese Abhandlung soll nun eine von dem empirischen Standpunkte ausgehende Beleuchtung aller derjenigen Erscheinungen seyn, bei welchen man aufser der chemischen Action auch noch eine galvanische annehmen, oder die man wohl gar nur aus der letztern erklären zu müssen glaubt.

Die Abhandlung selbst zerfällt, nach den Gegenständen der Untersuchung, in vier Abschnitte, von denen der erste die Erscheinungen, welche Jäger bei Einwirkung des oxydirenden Zinks auf Pflanzenfarben beobachtet hat *), näher prüfen soll, da sie von Vielen als die Basis der Oxydationstheorie des Galvanismus angesehen werden. Der zweite Abschnitt soll der Untersuchung der Metallreductionen gewidmet seyn, die man bis jetzt aus der nähern Verwandtschaft zum Sauerstoff zwischen dem Reducirenden und Aufgelösten zu erklären suchte, in neuerer Zeit aber als die Wirkung einer galvanischen Kette betrachtet hat; worauf dann im dritten Abschnitte eine nähere Beleuchtung derjenigen Metallreductionen folgen wird, die als Wirkung einer galvanischen Kette aus zweien Leitern zweiter und einem Leiter erster Klasse erklärt worden sind, wovon uns Buchholz die ersten und glänzendsten Erscheinungen mit dem salzsauren Zinn bezeichnet hat. Die genauere Erforschung der Umstände, unter welchen Metallreductionen durch galvanische Ketten von zweien festen und einem flüssigen Körper hervorgebracht werden, soll in dem vierten Abschnitte das Ganze beschliefsen.

Erster Abschnitt.

Ueber die Wirkung des Zinks auf die Pflanzenfarben.

Die Versuche von Jäger sind im Wesentlichen folgende:

1. Wird ein benetztes Kurkumapapier auf eine Zinkplatte gelegt: so erhält es orangerothe Flecken, mit gelben unveränderten Zwischenräumen. Die gefärbten Flecke entsprechen den blank gebliebenen, nicht

*) Gilbert's Annalen der Physik Bd. XI. S. 288.

oxydirten Stellen des Zinks, so wie die unverändert gebliebenen den oxydirten Stellen des Zinks.

Diese Farbenveränderung des Kurkumapapiers ist genau dieselbe, welche ein schwaches Laugensalz erzeugt.

2. Auf Lakmuspapier hingegen entstehen unter diesen Umständen rothe Flecke mit unveränderten Zwischenräumen, welche den gelb gebliebenen Stellen des Kurkumapapiers und den oxydirten des Zinks entsprechen. Doch ist auf Lakmus die Wirkung weit schwächer als auf Kurkuma.

3. Beide Farbenveränderungen entstehen zu gleicher Zeit, wenn man auf eine Zinkplatte Lakmus- und Kurkumapapier übereinander, und zur Verhütung, dafs die Farben nicht zusammenfliefsen, weifses Papier dazwischen legt. Man sieht dann besonders deutlich, dafs die rothen Flecke des Lakmuspapiers genau die Stelle und Figur der gelb gebliebenen des Kurkumapapiers und der oxydirten des Zinks haben, so wie die unverändert gebliebenen Stellen des Lakmuspapiers genau den gerötheten des Kurkumapapiers und den blank gebliebenen des Zinks entsprechen.

Hierdurch nun sieht sich Jäger zu dem Schlusse berechtigt, dafs bei der Oxydation des Zinks sich zugleich eine Säure und ein Laugensalz an verschiedenen neben und zwischen einander liegenden Stellen bilden, und zwar die Säure wahrscheinlich da, wo der Zink oxydirt wird.

Dafs die organische Substanz der Pflanzenfarben oder des Papiers keinen Einfluss auf diese Erscheinung habe, sucht der Verfasser durch mehrere Versuche zu beweisen, worunter wir den 9ten als den überzeugendsten anführen wollen, nach welchem eine Zinkstange dem reinen Wasser, mit welchem es in verschlossenen Gefäfsen lange Zeit in Berührung war, die Eigenschaft mittheilt, den Aufguss der Herbstrose grünlich zu färben. Wenn nun in diesem Falle nur die alkalische Wirkung, nie aber die der Säure, zum Vorschein kommt, so sucht dies Jäger dadurch zu erklären, dafs die in geringer Menge entwickelte Säure (denn in der That ist die Reaction der Säure in 2 und 3 weit schwächer als die alkalische) in einem Fluido, das allen in ihm enthaltenen Stoffen eine freie Bewegung gestattet, von dem Laugensalze gesättigt wird, und nun blofs der Ueberschufs des letztern sichtlich reagirt.

Nachdem Jäger ferner angegeben hat, dafs von allen diesen Wirkungen des Zinks auf die gefärbten Papiere sich auch nicht eine Spur zeige, wenn man das Gold auf dieselbe Weise mit ihnen in Berührung bringt, so wird im 10ten Versuch folgendes dargethan. Wenn auf eine Zinkplatte nasses Lakmus- und Kurkumapapier über einander geschichtet, und auf das letzte Papier ein Goldstück gelegt wird, welches in metallischer Berührung mit dem Zink steht, „so entsteht auf dem Kurkumapapier ein hochrother „Rand um das Goldstück herum, und die ganze Fläche unter dem Goldstück „wird erst hochroth, dann weifs und völlig farbenlos. Zugleich entsteht auf „dem Lakmuspapier ein rother dem Goldstück entsprechender Discus. Legt „man umgekehrt das Kurkumapapier auf den Zink und das Lakmuspapier „unter das Gold, so wird ersteres beinahe gar nicht, wenigstens nicht in der „Mitte gefärbt, und letzteres bekömmt einen weifsblauen Discus und höchstens an den Ecken einige rothe Flecken. — — — Die Fläche des Zinks „wird bei diesen Versuchen ohne Schlangenfiguren zusammenhängend und „gleichförmig oxydirt." Weiterhin zeigte ihm sein 16ter Versuch, dafs, wenn Gold und Zink, zwischen welchen nasse Papiere auf die im 10ten Versuche angegebene Weise liegen, nicht mit einander metallisch verbunden sind, die bei diesem Versuche wahrgenommenen Erscheinungen auch nicht erfolgen, und überhaupt selten andere, als die der Zink für sich giebt.

Da nun aus diesen Versuchen das Entstehen zweier verschiedener, in ihren chemischen Reactionen kenntlicher Stoffe bewiesen ist, die unter und neben einander auf der Fläche des mit dem feuchten Körper in Berührung stehenden Zinks sich bilden, und Volta's Versuche zeigen, dafs zu gleicher Zeit zweierlei Elektricitätszustände bei dieser Einwirkung des Metalls auf den feuchten Körper entstehen — denn er fand den befeuchteten Zink negativ elektrisch, und nirgends entsteht die eine Elektricität ohne die andere — so glaubt sich Jäger zu der Hypothese berechtigt, dafs „die in dem „Contact des Zinks mit dem feuchten Körper entstehenden Elektricitäten „aus dem letztern einen sauern und einen alkalischen Stoff abtrennen, deren „einer in der positiven Elektricität aufgelöst wird, indessen sich der andere „mit der negativen verbindet." Diesen elektrischen Auflösungen werden alsdann mehrere hypothetische Eigenschaften zugeschrieben, wodurch endlich eine genügende Erklärung der angegebenen Wirkungen der Zinkgoldkette sich ergeben soll.

Wir übergehen dies Alles mit Stillschweigen, weil das bereits Angeführte, verbunden mit den darzustellenden Versuchen, vollkommen hinreichend seyn wird, die gänzliche Grundlosigkeit dieser Ansicht darzuthun *).

Wenn wir auf den Grund sehen, durch welchen Jäger zur Annahme der aufgestellten Hypothese und zu deren noch weiterer Entwickelung sich bewogen fühlte: so finden wir ihn einzig und allein darin, weil eine alkalische und eine saure Substanz zugleich, und scheinbar von einem Körper erzeugt werden, ohne dafs beide im Stande sind sich zu verbinden, und dennoch beide Farbenveränderungen oder wenigstens eine derselben aufzuheben; gesetzt nämlich, dafs die Säure oder das Laugensalz in gröfserer Quantität zugegen wäre, als zur blofsen Neutralisation erforderlich ist. Denn wäre entweder nur das Lakmuspapier geröthet oder das Kurkumapapier gebräunt worden: so würde Jeder diese Erscheinung dem durch Einwirkung des Wassers sich bildenden Zinkoxyd zugeschrieben haben, welches in dem einen Falle die Natur eines schwachen Laugensalzes, in dem andern die einer schwachen Säure verrathen hätte; wovon das eine wie das andere mit unsern bisherigen Kenntnissen von den Metalloxyden sehr wohl übereinstimmen würde. Dafs aber das erzeugte Oxyd die entgegengesetzte Natur einer Säure und eines Laugensalzes habe, betrachtet man als unmöglich **); man müfste demnach eines von beiden von dem organischen Körper, dem Papier oder der farbigen Substanz herleiten; dagegen nun spricht der Versuch, nach welchem Zink dem reinen Wasser dieselbe Eigenschaft mittheilt ***); daher sah Jäger sich bewogen, das Zinkoxyd ganz unbeachtet zu lassen und zu den sich entwickelnden zweien Elektricitäten seine Zuflucht zu nehmen.

*) Es war mir eine sehr erfreuliche Erscheinung, dafs Jäger in einem in den letzten Heften der Gilbertschen Annalen erschienenen Aufsatz, über trockene Säulen, dieses von ihm entworfene hypothetische Gebäude selbst aufgegeben zu haben scheint.

**) Obgleich ein Beispiel dieser Art schon längst bekannt ist, nämlich die Auflösung des weifsen Arsenikoxyds im Wasser, welche die Lakmustinktur röthet und den Veilchensyrup grün farbt. Gewifs wird dies auch mit mehreren Körpern der Fall seyn, wenn sie in dieser Hinsicht näher geprüft würden.

***) Streng genommen wird nach Jäger in diesem Falle dem Wasser nur eine alkalische Eigenschaft mitgetheilt; aber wir wollen die Voraussetzung desselben als richtig annehmen, dafs die zugleich entstehende schwache Säure von dem Laugensalze neutralisirt und vernichtet wird, und dafs nur das letztere, in so weit von demselben Ueberschufs vorhanden ist, sich wirksam zeigt.

Aus Versuchen, welche ich über diese Farbenveränderungen angestellt habe, haben sich folgende Resultate ergeben:

1. Feuchtes Lakmus- und Kurkumapapier erleiden, auf Zink gelegt, genau die von Jäger angegebenen Veränderungen. Dagegen bleiben sie unverändert auf Platin, Gold, Silber, Kupfer *), Zinn und Blei; nur Eisen bringt eine ähnliche Färbung hervor.
2. So bedeutend und unbezweifelt aber auch die Wirkung beim Kurkumapapier ist: so schwach und unsicher ist sie beim Lakmuspapier. Denn nach der verschiedenen Beschaffenheit desselben erscheinen oft die rothen Flecken nicht anders, als ob an diesen Stellen die Farbe gleichsam abgespült worden wäre, indefs an den andern Stellen das Blau weit gesättigter geworden ist, als es vor der Einwirkung des Zinks war. Ja, wenn das Lakmuspapier noch so schwach geröthet ist, so bleiben nicht nur die rothen Flecken ganz weg, und es kommen blaue zum Vorschein (welches auch Jäger a. a. O. S. 294 beobachtet hat), sondern aufser diesen blauen Flecken verlieren auch die andern Stellen von ihrer rothen Farbe, und nähern sich der blauen, so dafs in vielen Fällen das Lakmuspapier statt der Wirkung einer Säure nur die eines Laugensalzes anzeigt.
3. Wird Zink in Wasser gesetzt: so erhält das letztere nach einiger Zeit die Eigenschaft, als eine schwache Säure zu wirken, indem es das Lakmuspapier schwach röthet; nach längerer Zeit hingegen wirkt das Wasser wie eine schwache Laugensalzauflösung **), indem es das geröthete

*) Wenn die Verdunstung des nassen Kurkumapapiers sehr langsam geschieht, dann wird es durch das Kupfer etwas bräunlich gefärbt, aber nicht fleckenweise, sondern gleichförmig auf der ganzen Oberfläche, wie auch Berzelius beobachtet hat. S. Gilbert's Annalen Bd. 27. S. 318. Noch deutlicher ist die alkalische Wirkung des Kupfers auf Papier, das mit Herbstroseinfusum gefarbt ist, welches überhaup ein sehr empfindliches Reagens auf Laugensalze ist.

**) Diese auflösende Wirkung des Wassers auf den Zink äufsert sich sehr sichtbar dadurch, dafs es an einzelnen auseinander liegenden Stellen angefressen wird, und das gebildete Oxyd sich als ein weifser Kranz um die angefressenen schwarz erscheinenden Punkte anlegt.

Uebrigens mufs auch angeführt werden, dafs ich zu diesem Versuche gewöhnliches destillirtes Wasser genommen habe, ohne es vorher auszukochen (weil es auch in dieser Art mit den gefarbten Papieren auf das Zink angewendet wird). Woher es wohl kommen mag, dafs ich die Wirkung einer schwachen Säure bemerkt habe, welche Jäger niemals gefunden zu haben angiebt?

röthete Lakmuspapier blau und das Herbstrosenpapier grün färbt. Auf Kurkumapapier bringt es jedoch keine Veränderung hervor.

4. Das Zinkoxyd löst sich in geringer Menge im Wasser auf, und theilt demselben die angegebene schwache alkalische Eigenschaft mit.
5. Zinkoxyd unmittelbar mit dem nassen gefärbten Papier in Berührung gebracht, wirkt stark alkalisch. Es verwandelt nämlich die blaue Farbe des Herbstrosenaufgusses in die grüne, die des Kurkumapapiers in die röthlich braune, und die des gerötheten Lakmuspapiers in die blaue.
6. Diese alkalische Wirkung des Oxyds ist demnach weit stärker als die des Wassers worauf Zink gewirkt hat, oder worin etwas Zinkoxyd aufgelöst ist.

Aus diesem Allen glauben wir uns zu dem Schlusse berechtigt, dafs die Farbenveränderungen, welche der Zink hervorbringt, gröfstentheils und wesentlich von dem gebildeten Oxyde herrühren. Die (scheinbare) Röthung des Lakmuspapiers aber hat, so wie die fleckenweise Färbung der beiden gefärbten Papiere, und das scheinbare Nebeneinanderbestehen einer alkalischen und sauren Substanz, ohne eintretende Neutralisation, einzig und allein in dem verschiedenartigen und nicht gleichzeitigen Verdünsten und Trocknen der verschiedenen Stellen des Papiers seinen Grund. Die Sache verhält sich nämlich so. Durch die mehr oder weniger unebene Fläche des Zinks *) und des nassen Papiers legt sich das letztere an der einen Stelle mahr als an der andern an; der Zink wird daher an der einen auch früher oxydirt als an der andern. Durch diese Bildung des Oxyds nimmt auch die Adhäsion des Papiers an diesen Stellen immer mehr zu, während es an den übrigen Stellen sich immer mehr von dem Zink gleichsam ablöst. Das gebildete Zinkoxyd wirkt nun alkalisch, aber die Wirkung äufsert sich vorzüglich an den vom Zink gelösten Stellen des Papiers, weil hier die Verdunstung des Wassers weit besser als an den mit Zink verbundenen Stellen von Statten geht (wie es überhaupt bei der Einwirkung einer sehr schwachen Laugensalzauflösung auf Kurkumapapier der Fall ist, dessen Farbenveränderung nur während des Trocknens sichtbar wird). Aber nicht nur die Auflösung des Zinkoxyds zieht sich an diese Stellen hin, sondern auch die Farbe des Papiers selbst, wie man bei allen aufgelösten Substanzen sehen kann, dafs sie sich, während der Verdunstung ihres Auflösungsmittels, nach den Rän-

*) Siehe die vorhergehende Anmerkung.

dern des Papiers hinziehn. Beim Kurkumapapier ist dies zwar nicht leicht wahrzunehmen, aber desto deutlicher beim Lakmuspapier, dessen Farben sich von den mit dem Zink adhärirenden Stellen nach den davon gelösten hinzieht. Die gerötheten Stellen des Lakmuspapiers haben daher im Allgemeinen ihre scheinbare rothe Farbe nur von der Schwächung ihrer blauen Farbe erhalten; wie denn auch in der That das einmalige Bestreichen des Papiers mit Lakmustinktur demselben eine violetrothe Farbe mittheilt, während es beim zweiten Male blau wird. Doch wirkt auch der Zink, wie wir (Vers. 3.) gesehen haben, indem er sich oxydirt, als eine sehr schwache Säure, und diese kann die rothen Flecke mit bewirken.

Aus dem Angegebenen erhellt zugleich, warum die gerötheten Flekken des Lakmuspapiers den gelbgebliebenen des Kurkumapapiers und den angegriffenen des Zinks, so wie die gerötheten des Kurkuma den blaugebliebenen, oder richtiger den noch blauer gefärbten des Lakmus, und den blank gebliebenen des Zinks, in der Form und Gestalt genau entsprechen.

Dafs aber, durch die fleckenweise Statt findende Oxydation des Zinks, das Papier auch an den einen Stellen mehr als an den andern anliegt, also auch an den einen früher als an den andern trocknet, und daher die laugensalzige und scheinbar saure Färbung durch und neben einander sich darstellen kann, davon werden wir in der Folge den Beweis führen.

Ich komme nun zur nähern Prüfung der von Jäger dargestellten Farbenveränderungen durch Einwirkung der Zinkgoldketten, und führe aus mannigfaltigen Beobachtungen, welche ich über diesen Gegenstand angestellt habe, der Kürze wegen nur folgende Resultate an:

7. Bei Einwirkuug einer Kette aus einer Zink- und einer Kupferplatte, zwischen welchen Lakmus- und Kurkumapapier (mit dazwischen gebrachtem weifsen, zur Verhütung des Zusammenfliefsens der Farben) gelegt worden, fand ich zwar Jäger's Angaben 1 und 2 bestätigt; doch zeigte sich auch öfters die Röthung des Kurkumapapiers auf dem Rande der Scheibe, deren Mitte gelb, manchmal auch weifs war, während auf dem Lakmuspapier ein rother Diskus entstand, welcher von einem blauen Rande umgeben war, wenn die beiden Metallplatten nicht in metallischer Berührung waren, keinesweges also in Folge galvanischer Wirkung.
8. Diese zusammenhängende Färbung findet selbst dann Statt, wenn die auf Zink geschichteten gefärbten Papiere mit einer Glasscheibe belegt

werden. Immer ist eine zusammenhängende peripherische Röthung des Kurkumapapiers wahrzunehmen, dessen inneres Rund ungefärbt oder zum Theil entfärbt ist; während das Lakmuspapier nach innen ein röthliches Rund zeigt, welches von einer Peripherie umgeben wird, deren Farbe nur blauer erscheint als vor der Einwirkung.

9. Wird die Kette dergestalt construirt, dafs auf zwei neben einander liegende sich berührende Platten von Zink und Kupfer die gefärbten Papiere so gebracht werden, dafs das eine auf dem Zink, das andere auf dem Kupfer zu liegen kommt, und beide durch einen Streifen weifses Papier verbunden sind: so erfolgt die Wirkung immer nur auf das den Zink berührende Papier, das auf dem Kupfer liegende bleibt dagegen unverändert, die oben angegebene unbedeutende dunklere Färbung des Kurkumapapiers allein ausgenommen. Auch ist dann die Farbenveränderung auf dem Zink nicht mehr fleckenweise, sondern nach den Rändern zusammengeflossen; welches besonders dann der Fall ist, wenn der weifse Papierstreifen (die leitende Verbindung) auf der Mitte der gefärbten Papierscheibe, welche mit dem Zink in Berührung ist, liegt; welche Erscheinung den Grund offenbar darin hat, dafs da, wo der nasse Papierstreifen das gefärbte Papier berührt, die Verdunstung verzögert und verhindert wird; daher sich die Wirkung des Zinks zuerst und vorzüglich an den Rändern zeigt.

10. Den sichersten Beweis von der Richtigkeit dieser Ansicht über den Einfluss der Verdunstung, oder wenigstens von der Unabhängigkeit dieser Erscheinung von jeder galvanischen Einwirkung, giebt die Beobachtung, dafs jeder feste Körper, auf die Mitte des gefärbten Papiers gesetzt, die Einwirkung des Zinks von der Mitte nach der Peripherie hinleitet.

11. Noch deutlicher ist diese Erscheinung (dafs nämlich alle Wirkung des Zinks von innen nach den äufsern Rändern hingeleitet wird) wenn das gefärbte Papier auf eine ebene Glasscheibe gelegt und mit einem dünnen Zinkblatte bedeckt wird, welches, um ganz fest anzuliegen, mit einigen Metallplatten beschwert werden kann. Endlich

12. geschieht gar keine deutliche Färbung, wenn die Zinkplatte bedeutend erwärmt wird, und umgekehrt, wenn bei niedriger Temperatur eine verhältnifsmäfsig kleine Papierscheibe entweder zwischen zwei gro-

fsen Zinkplatten, oder zwischen einer Zinkplatte und einer Glasscheibe gelegt wird.

Die Erklärung der von Jäger angeführten Erscheinungen ist nunmehr durch das Angegebene von selbst klar, und es bedarf keiner weitern Erörterung, um darzuthun, dafs sie dem Wesen nach durchaus unabhängig von galvanischer Einwirkung sind. Denn, dafs da, wo, aufser der Wirkung des Zinks, auch noch die der galvanischen Kette eintritt, diese Farbenveränderungen schneller und bedeutender sich zeigen, erklärt sich daraus, weil alsdann mit der Oxydation des Zinks auch die Zersetzung der in dem Papier etwa enthaltenen Salze *) bedeutend wird, deren Grundlagen nun die alkalische Wirkung des Oxyds (und von dieser kann vorzüglich nur die Rede seyn) bedeutend erhöhn.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Reduction einer Metallauflösung durch ein anderes Metall.

Die längst bekannte regulinische Darstellung eines Metalles aus seiner Auflösung durch das Hineinsenken eines andern Metalls wurde bisher aus der nähern Verwandtschaft des Metalls zum Sauerstoff (nach der phlogistischen Ansicht, aus der nähern Verwandtschaft des Metalls zum Phlogiston) erklärt. So wird nach dieser Ansicht das Silber aus seiner Auflösung durch Quecksilber, Kupfer, Blei u. s. w. regulinisch ausgeschieden, weil diese Metalle eine nähere Verwandtschaft zum Sauerstoff haben, als das Silber. Quecksilber ferner wird durch Kupfer, Blei, Eisen, Zink reducirt, weil diese mit dem Sauerstoff näher als das Quecksilber verwandt sind. Jedes Metall endlich wird durch ein leichter oxydirbares, niemals aber ein leichter oxydirbares durch ein für die Oxydation weniger empfängliches reducirt. Also niemals Quecksilber durch Silber, Kupfer durch Quecksilber, Blei durch Kupfer u. s. w.

*) Aus Versuchen, welche ich bereits im Jahre 1811 angestellt habe, scheint in der That jedes Papier, auch das ungeleimte, etwas Kochsalz, oder wenigstens ein salzsaures Salz, zu enthalten.

Nachdem man aber mit der reducirenden Kraft der galvanischen Kette vertrauter geworden war, glaubten einige Naturforscher, namentlich Sylvester *) und v. Grotthuſs **), diese Reduction nicht als die Folge chemischer Verwandtschaft, sondern als ein Produkt der unter diesen Umständen sich bildenden einfachen galvanischen Kette betrachten zu müssen, hauptsächlich auf Veranlassung der krystallinischen Form, welche die reducirten Metalle annehmen. Denn wenn z. B. ein Zinkstab in eine Bleiauflösung gesteckt wird, so schlägt sich anfangs unmittelbar an dem Zink das ausgeschiedene Blei nieder, in der Folge aber legt es sich nicht an dem Zink selbst, sondern an dem bereits dargestellten Blei in baumähnlichen Verzweigungen an.

Hiebei nimmt man nun, nach der erwähnten Ansicht, die Bildung der ersten Bleiblättchen als Wirkung der chemischen Verwandtschaft des Zinks zum Sauerstoff an; weiterhin aber, wenn einmal aus dem Zink, dem wenigen reducirten Blei und der Bleiauflösung die galvanische Kette gebildet ist, werde die Reduction des Bleies nicht mehr durch den Zink bewirkt, sondern von der Zinkbleikette, an deren negativem Metalle, dem Blei nämlich, sich das Aufgelöste metallisch anlege ***).

Als Gründe dieser Erklärungsart werden insbesondere von Hrn. v. Grotthuſs folgende angegeben:

1. Die fortdauernde Reduction könne nicht Wirkung des Zinks (d. h. seiner nähern Verwandtschaft zum Sauerstoff) seyn; denn sonst müſste das Blei auch nur da, wo ein Entziehen des Sauerstoffs Statt findet, also unmittelbar am Zink, regulinisch dargestellt werden, keinesweges aber könnte ganz entfernt vom Zink die Reduction sich in einem Anschieſsen zum Bleibaum äuſsern. Zwar könnte man annehmen wollen, es werde das Blei nur vom Zink reducirt, und sinke von da in kleinen unmerklichen Theilen herab, bis es sich an die vom Zink

*) Gehler's Journ. f. Chem. u. Phys. I. S. 539.

**) Ebendaselbst V. S. 119.

***) Nach Ritter ist diese Reduction vom Anfange an galvanischer Natur, indem jedes oxydirbare Metall durch die Erhabenheiten und Vertiefungen seiner Oberfläche das Aequivalent eines oxydirbaren und eines weniger oxydirbaren Metalls darstellt, und daher, wenn Zink in eine Bleisalzauflösung gesenkt wird, vom Anfange an eine galvanische Kette construirt ist. Da sich diese Rittersche Ansicht auf die im ersten Abschnitt in Untersuchung gezogenen Jägerschen Beobachtungen als auf die einzigen dafür sprechenden Erfahrungen stützt: so können wir sie füglich mit Stillschweigen übergehn.

entfernten Verzweigungen des Blei's ansetzt. Diese Vorstellungsart sey aber unmöglich, theils deswegen, weil der obere Theil der Flüssigkeit, welcher das Zink umgiebt, gar kein Blei mehr enthält, sondern nur essigsauren Zink, theils auch, weil dieselbe Erscheinung (nämlich das Ansetzen des reducirten Metalls an der vom Zink entfernten Verzweigung) Statt findet, wenn das Zink vom Boden aus auf die Metallvegetation einwirkt. Eben so wenig könne man annehmen, das Niederschlagen des Metalls habe in der That immer am Zink Statt, die ältere Vegetation werde aber durch die neu sich ansetzende fortgeschoben, weil, wenn man sich das Ende des letzten Metallzweigs genau merkt, man nach einiger Zeit finden wird, dafs es noch genau die alte Stelle im Glase einnimmt, und dafs sich an ihm nun neuere Zweige angesetzt haben.

2. Die gänzliche Unhaltbarkeit der bisherigen Annahme werde durch die Beobachtung bestätigt, dafs die Metallvegetation, wenn sie durch eine leichte Bewegung vom Zink abgelöst wird, nun durchaus keinen Zuwachs weiter erhält, wodurch ihr Contact mit dem Zink als wesentlich nothwendig zu ihrem Wachsthum erscheint; aufserdem aber

3. durch einen von v. Grotthufs angestellten Versuch. v. Grotthufs füllte nämlich eine 6 Zoll Höhe und 5 Linien Durchmesser haltende Röhre zur Hälfte mit einer concentrirten Auflösung von salpetersaurem Kupfer. Auf diese liefs er eine, mit etwas Alkohol vermischte, und mit noch mehr Wasser verdünnte, Auflösung des salpetersauren Silbers sanft herabfliefsen, und tauchte nun in den obern Theil der Röhre, also in die Auflösung des salpetersauren Silbers, einen Cylinder von Kupfer, worauf er sogleich die Silbervegetation entstehen sah, welche nach 24 Stunden, bis zur blauen Kupferauflösung gelangt, auf den Extremitäten Kupfer niederschlug. Dabei bemerkt v. Grotthufs auch, dafs der Kupferniederschlag auf die Silberzweige noch schneller entstand, wenn statt des Kupfers ein Zinkcylinder genommen wurde.

Ich will noch, ehe ich die Versuche anführe, welche ich über diesen Gegenstand angestellt habe, die hier angegebenen Gründe näher beleuchten. Die unter 1 und 2 angegebenen sind nicht sehr erheblich. Denn wohl kann man annehmen, dafs zwar nur das Zink durch sein Entziehen des Sauerstoffs (und der Säure) das aufgelöste Metalltheilchen regulinisch ausscheidet,

dafs dies aber, aus Krystallisationsanziehung, sich lieber an die Stelle *a* als an die Stelle *b* anlegt. Dafs man aber, wenn diese Stelle *a* bedeutend entfernt vom Zink ist, das Bleitheilchen nicht sich senken oder steigen sieht, ist eben so wenig auffallend, da man überhaupt bei jeder Kristallisation eines Salzes ein solches Wandern der Salzkrystallchen nicht wahrnimmt, welches doch Statt finden müfste, wenn z. B. auf dem Boden des Gefäfses die Krystallisation vor sich geht, und durch Verdünstung der Auflösung vorzüglich das in der obersten Schicht enthaltene Salz zur Krystallisation sich eignet. Aber, so wie man bei der Salzkristallisation annehmen kann, dafs das auf der Oberfläche der Flüssigkeit zur Krystallisation geneigte oder krystallisirte Salztheilchen, bei Berührung der darunter liegenden Schicht, sich wieder mit dem Auflösungsmittel verbindet, dadurch einem in dieser Schicht enthaltenen Salztheilchen sein Auflösungsmittel entzieht, und auf diese Weise zur Krystallisation geneigt macht, bis dieses wiederum dieselbe Wirkung auf das angränzende Salztheilchen ausübt, und so fort, bis das mit der bereits gebildeten Krystallisation oder mit der zur Krystallisation am besten geeigneten Stelle in unmittelbarer Berührung stehende Salztheilchen seines Auflösungsmittels beraubt wird, und sich krystallinisch anlegt: so kann man auch dasselbe bei der Reduction der Metalle annehmen, so dafs sich in der That nicht das durch den Zink seines Sauerstoffs und seiner Säure beraubte Metalltheilchen an die gebildete und vom Zink entfernte Vegetation anlegt, sondern das mit dem Ende der Verzweigung in unmittelbarer Berührung stehende, und durch Austausch seiner Bestandtheile, seines Sauerstoffs und seiner Säure beraubte Metallsalztheilchen. Will man aber diesen eben bezeichneten Procefs, dieses immerwährende Trennen und Verbinden des Bestandtheile, nicht mehr als einen chemischen durch krystallinische Anziehung in der angegebenen Art sich gestaltenden gelten lassen, sondern einen galvanischen nennen: so müfste man einen solchen bei jeder Salzkrystallisation annehmen, bei welchem sich die drei Glieder der Kette schwerlich möchten nachweiren lassen, und der Gegenstand fiele dann aufserhalb der Gränzen dieser Untersuchung.

*) Wollte man hingegen den Grund dieser Erscheinung mit dem Namen Krystallelektricität belegen: so hatte ich an und für sich nichts gegen diese Benennung, sobald man einen klaren und bestimmten Begriff damit verbinden, und die Krystallelektricität als keine *qualitas occulta* betrachten wollte, durch welche man Alles und Jedes erklären zu können glaubt.

Aus dem Gesagten erklärt sich dann auch von selbst schon die Beobachtung, von welcher Grotthufs seinen zweiten Beweisgrund für die aufgestellte Ansicht hergenommen hat. Was dagegen den dritten Beweisgrund von Grotthufs anbetrifft: so liefse sich gegen diesen durchaus nichts anführen, wenn die Kupferauflösung wirklich durch das Silberbäumchen reducirt werden könnte, das früher durch Kupfer (und nicht durch Zink) gebildet worden ist. Denn dann könnte es durchaus nicht nach den bisherigen Erfahrungen als Folge chemischer Action, sondern müfste als die der galvanischen Kupfersilberkette angesehen werden.

Nach diesen Bemerkungen komme ich zu den eigenen Versuchen in dieser Sache. Was daraus sich ergiebt, ist Folgendes.

1. Wenn die Metallauflösung, hinreichend mit Wasser verdünnt, in einem engen Gefäfse ist, und der Zinkstab von geringer Masse in die Flüssigkeit getaucht wird: so wird die Metallvegetation dadurch vorzüglich begünstigt, d. h. das Metall stellt sich in breiten Blättern mit vollkommenem Metallganz dar, die immer mehr von dem Zink sich entfernen und in die Flüssigkeit sich hineinziehn. Ist hingegen die Flüssigkeit concentrirt in einem weiten Gefäfse, oder wird ein dicker Zinkstab hineingesenkt: so legt sich das reducirte Blei nur um und an den Zink in kurzen Fäden an, ohne eine Verzweigung zu bilden.
2. Wird ein Zinkblatt mit einer sehr dünnen Spitze in die Bleiauflösung gesenkt, und ist die Röhre, worin diese enthalten ist, nicht gar zu eng (von $\frac{1}{2}$ Zoll Weite): so entsteht anfangs eine kleine Verzweigung, welche aber bald aufhört, und ungeachtet der vorhandenen Bleiauflösung nicht mehr fortwächst. Der Grund hievon kann einzig und allein der seyn, dafs unter diesen Umständen, nach kurzer Zeit, die in die Bleiauflösung gesenkte Spitze des Zinkblatts, statt mit essigsaurem Blei, mit essigsaurem Zink umgeben ist, wo dann der Zink nicht mehr wirken kann, so dafs füglich kein Blei weiter reducirt wird. Eine enge Röhre hingegen wirkt als ein Haarröhrchen, und verhindert durch das Aufströmen der Flüssigkeit, dafs das gebildete essigsaure Zink sich nicht über dem essigsauren Blei abgesondert darstellen kann *).

3. Noch

*) In der oben angegebenen Stelle aus des Hrn. v. Grotthufs Abhandlung wird zwar geäufsert, es sey in dem obern Theil der Flüssigkeit (nachdem der Zink einige Zeit gewirkt

3. Noch auffallender ist diese Wirkung, wenn die Bleiauflösung in einem weiten Gefäfse enthalten ist, und man ein zugespitztes Zinkblatt in die Mitte und ein anderes in den capillären Raum der Flüssigkeit einsenkt. An dem ersten wird eine sehr unbedeutende Reduction Statt finden, welche nach kurzer Zeit ganz aufhört, indefs an dem zweiten eine schöne immer weiter sich ausbreitende Vegetation erfolgt; wobei denn auch klar ist, dafs, wenn schon das Anlegen der Vegetation an die Wände des Glases einen günstigen Einfluſs auf den Wachsthum desselben bei dem zweiten Zinkblatte haben mag, dieses doch nicht die alleinige Ursache seyn kann.
4. Werden zwei Stäbe, ein Zinkstab und ein Bleistab, in eine Auflösung des essigsauren Bleies eingesenkt: so erfolgt, wenn die Metalle sich aufserhalb der Flüssigkeit berühren, durchaus nur am Zink, nicht aber am Blei eine Reduction. Dasselbe ist auch der Fall, wenn der Zink mit Silber, Gold und Platin in die Auflösung des Bleisalzes getaucht wird. Bei den letzten Metallen wirkt jedoch die Kette Zinkplatin so mächtig, dafs das Blei sich nach einiger Zeit, aufser am Zink, auch am Platindrath anlegt, obgleich dies, der Quantität nach, sehr unbedeutend ist.
5. Mächtiger noch ist die Wirkung dieser Ketten, wenn die Berührung der beiden Metalle innerhalb der Flüssigkeit ist (Ketten ohne Zwischenraum); aber auch dann geschieht dennoch anfangs das Anlegen des reducirten Bleies nur am Zink, und dies dauert so lange, bis der ganze Theil desselben von der Spitze an damit belegt ist, und nun das reducirte Blei den Berührungspunkt des zweiten Metalles (Blei, Silber, Gold) erreicht hat; dann legt es sich an diesem Metalle an, aber zugleich und in reichlicher Menge auch am Zink.
6. Wird über essigsaures Blei eine mit Wasser verdünnte Auflösung des essigsauren Zinks geschichtet, und in den essigsauren Zink ein Zinkstab, an dessen Spitze ein Bleiblättchen befestigt ist, so gesenkt, dafs das Blei eben nur die Oberfläche des essigsauren Blei's berührt: so geschieht lange keine Wirkung. Erst nach Einer oder mehreren

hat) kein Blei mehr enthalten, sondern nur essigsaurer Zink; aber wir glauben aus dem Grunde diese Angabe unberücksicht lassen zu dürfen, weil v. Grothufs dies nur hypothetisch voraussetzt, sich aber nicht durch einen Versuch davon überzeugt hat, wie wir vom Gegentheil.

Stunden sieht man die Bleireduction erfolgen, aber nicht am Blei, oder wenigstens nicht am Blei allein, sondern auch am Zink. Zugleich aber kann man deutlich wahrnehmen, dafs die beiden Flüssigkeiten gröfstentheils in einander geflossen sind, und dafs demnach das Zink mit essigsaurem Blei umgeben ist *).

7. Endlich wurde auch noch der Versuch des Hrn. v. Grotthufs wiederholt, aus welchem sich der bündigste Beweis für die galvanische Ansicht ergeben hatte, wobei die Vorschriften des Urhebers genau beobachtet wurden. Das Resultat war verschieden, je nachdem das salpetersaure Kupfer und das darüber geschichtete salpetersaure Silber vollkommen neutral war, oder einen Ueberschufs von Säure hatte. Im ersten Falle wurde durch das Kupfer, welches in die Silberauflösung gesenkt wurde, ein Silberbäumchen gebildet, woran sich keine Spur von Kupfer zeigte. Im letztern Falle, und besonders wenn das salpetersaure Kupfer einen Ueberschufs an Säure zeigte, wurde an die Verzweigung des Silberbäumchens, wenn sie die Kupferauflösung erreicht hatte, auch etwas reducirtes Kupfer angesetzt. Der Grund davon liegt darin, weil alsdann der Fall eintritt, wovon wir im nächsten Abschnitte handeln werden. Es wirkt nämlich das Kupfer auf zwei über einander geschichtete, in verschiedenem Grade concentrirte und mit einem Ueberschufs von Säure versehene Kupferauflösungen. Die Reduction des Kupfers am Silberbäumchen ist daher nicht Wirkung der galvanischen Kupfersilberkette, sondern einer Kette von zweien flüssigen und einem festen Leiter (zu deren Wirkung, wie wir bald sehen werden, ein Ueberschufs von Säure nöthig ist), und das Silberbäumchen dient nur als Verlängerung des Kupferdraths. Wird hingegen statt des Kupfers Zink genommen, so erfolgt die Reduction des

*) Es ist bei diesem Versuch durchaus nöthig, dafs das mit dem Zink verbundene Blei nur in den obern Theil des essigsauren Blei's gesenkt wird. Denn reicht es tiefer hinein: so erfolgt freilich Reduction, aber aus dem Grunde, weil hier der Fall eintritt, den wir in dem nächstfolgenden Abschnitt abhandeln werden, indem eine Kette gebildet wird, welche aus zwei Flüssigkeiten (einer gesättigten und verdünnten Bleiauflösung) und einem festen Körper (dem Bleidrath) zusammengesetzt ist. Uebrigens versteht es sich von selbst, dafs der angegebene negative Erfolg und Versuch 2, 3, 4 und 6 nur während einer bestimmten Zeit, etwa von einigen Stunden, Statt finden kann. Denn nach längerer Zeit sind die über einander geschichteten Flüssigkeiten in einander geflossen, so dafs in der obern Flüssigkeit aufser dem essigsauren Zink auch essigsaures Blei enthalten ist, und nunmehr erfolgt, wie natürlich, die Reduction des Bleies.

Kupfers am Silberbäumchen immer und in höherem Grade, weil nämlich der Zink nicht blofs mit der Silberauflösung, sondern nach einiger Zeit auch mit der des Kupfers in Berührung kommt, welche er auch im neutralen Zustande reducirt. Nach diesem Allen glaube ich, dafs die regulinische Darstellung der Metalle aus ihren Auflösungen durch ein anderes Metall nach wie vor als Wirkung der chemischen Verwandtschaft zu betrachten sey, und dafs diese Erscheinungen, der Ursache nach, nicht von den andern chemischen, z. B. von dem Niederschlagen der in Säuren aufgelösten Erden durch die Laugensalze, getrennt werden können. Eine tiefere Erörterung hierüber werden wir erst nach vorausgeschickter Untersuchung über die Metallreductionen durch die bekannten galvanischen Ketten am Schlusse dieser Abhandlung zu geben im Stande seyn, und glauben aus diesem Grunde uns hier die Mühe ersparen zu können, auch die einzelnen angegebenen Erscheinungen nachzuweisen, woraus die Richtigkeit der einen Ansicht, welche die chemische Verwandtschaft, und das Unhaltbare der andern, welche die galvanische Kette als Grund der in Rede stehenden Metallreduction betrachtet, überzeugend hervorgeht.

Dritter Abschnitt.

Von der regulinischen Ausscheidung der Metalle aus ihren Auflösungen durch ein und dasselbe Metall, welches sowohl in der Auflösung enthalten ist, als auch mit ihr in Berührung gebracht wird.

Man kannte schon lange diejenigen Ketten, welche aus zwei specifisch verschiedenen Flüssigkeiten und einem festen Leiter zusammen gesetzt sind, in Rücksicht ihrer physiologischen Wirkung. Man hatte sogar bereits versucht, sie zur galvanischen Säule zusammen zu setzen, und die Wirkung derselben, sowohl in physiologischer als chemischer Hinsicht, sehr bedeutend gefunden. Noch immer aber war, aufser der Oxydation, keine chemische Erschei-

nung dieser Kette bekannt, als Buchholz (im Sept. 1804) zuerst seine Reduction des salzsauren Zinnes durch das in der Auflösung vorhandene metallische Zinn bekannt machte, welche von ihm nur auf eine sehr gezwungene und unnatürliche Weise aus chemischen Gesetzen erklärt werden konnte *), von Ritter hingegen bald (zu Anfange des Jahrs 1805) als die Wirkung einer galvanischen Kette aus zwei Leitern zweiter und einer erster Klasse erkannt wurde. Ritter's Ansicht wurde allgemein angenommen, da er die Richtigkeit derselben, sowohl aus den nähern Umständen, als auch aus den Bedingungen dieser Zinnreduction, in einer durch viele Versuche begründeten umständlichen Abhandlung **) bewiesen hatte.

Doch verdient bemerkt zu werden, was Ritter am Schlusse seiner angestellten Versuche sagt ***). „Sich gegenseitig zu erklären," heifst es wörtlich, „sind derselben gewifs nicht genug, wohl aber um sie dem Ge„biete zu vindiciren, in welches jenes (das Buchholzische Phänomen) ge„hörte, dem Galvanismus." Und dazu die Anmerkung: „Es fehlen dazu noch „die Versuche, über das Verhalten anderer Metalle als Zinn in den vo„rigen Ketten, über das genau verglichene Verhalten von Zinnauflösung je„der Art und jedes Grades der Concentration u. s. w. zu Zinn und andern „Metallen, ohne alle Kette u. s. w." Zugleich kündigt Ritter diese noch rückständigen Versuche als angefangen an, und verspricht, sobald sie vollständig beendigt seyn würden, sie mitzutheilen und mit den frühern zu einem Ganzen zu verarbeiten. Inzwischen hat Ritter dieses Versprechen der Hauptsache nach nicht erfüllt. Zwar erschien nach Verlauf von mehr als einem Jahre eine sehr umständliche Verarbeitung seiner ersten Versuche mit dem salzsauren Zinn †), aber ohne auch nur einen einzigen der von ihm selbst als nothwendig anerkannten Versuche angestellt zu haben, oder wenigstens bekannt zu machen. Er entschuldigt sich hierüber mit den Worten: „Ich gab in der Note an, was hiezu fehlte, und hatte dort noch einige „Hoffnung, Zeit zu gewinnen, die nöthigen Versuche noch nachzuholen. Da „indefs jene mit dieser immer beschränkter wird, so will ich gegenwärtig „einen neuen Weg einschlagen, auf dem ich dennoch die gedachte Schuld

*) Gehler's Journ. der Chemie Bd. III. S. 433.

**) Ebendas. Bd. IV. S. 253.

***) Das. S. 277.

†) Gehler's Journ. für Ch. u. Phys. Bd. I. S. 389.

„Schuld abzuführen gedenke." Dagegen hat Buchholz im Jahre 1808 einen Theil der von Ritter angegebenen Versuche mit andern Metallauflösungen als der des Zinns angestellt *), woraus das Resultat hervorging, dafs aufser dem salzsauren Zinn auch die Auflösungen anderer Metalle, namentlich des Silbers, Kupfers und Bleies, wenn nämlich über dergleichen concentrirte Auflösungen Wasser geschichtet, und sodann durch beide über einander stehende Flüssigkeiten ein Stab desselben Metalls, als in der Auflösung enthalten ist, gesenkt wird, die regulinische Ausscheidung des aufgelösten Metalls zu bewirken im Stande sind.

Ich will nunmehr auch hier, ehe ich die Resultate meiner eigenen Versuche aufstelle, zuvörderst die Gründe prüfen, durch die man sich bewogen fühlte, diese Erscheinungen aus dem Gebiete der Chemie zu reifsen und in das des Galvanismus zu versetzen. Es ist aber der erste und Hauptgrund der, dafs sie sich nach chemischen Principien nur sehr schwer, nach galvanischen hingegen leicht und natürlich erklären lassen. Aufserdem ist ein zweiter Grund, dafs sie nur unter Bedingungen Statt finden, welche wir zur Darstellung galvanischer Ketten als unumgänglich nöthig erkannt haben. Hier ist nun zunächst so viel klar, dafs der erste Grund für sich allein nicht entscheiden kann, weil die oft einseitig und aus beschränktem Gesichtspunkte beurtheilte Leichtigkeit und Natürlichkeit einer Erklarungsweise für die Wahrheit derselben nicht immer sichere Bürgschaft leistet, wie man durch viele Hypothesen der ältesten und neuesten Physiker darthun könnte. Was aber den zweiten Grund betrifft: so hat zwar Ritter mehrere Umstände hervorgehoben, die zum Gelingen dieser Reduction absolut nöthig sind, und die zugleich zur Construction derjenigen galvanischen Ketten erfordert werden, welche aus zwei Leitern zweiter und einem erster Klasse zusammen gesetzt sind; dabei aber hat er andere unbeachtet gelassen, die ebenfalls zur Darstellung dieser Metallreduction nöthig sind, ohne dafs sie in einer Beziehung zur galvanischen Kette stehen. Allerdings spricht nämlich für das Daseyn galvanischer Thätigkeit das nothwendige Uebereinanderschichten der Zinnauflösung mit Wasser, da das Zinn nach Ritter's Versuchen (ohne diese Schichtung) in keiner Zinnauflösung, sie mag gesättigt oder nicht gesättigt, concentrirt oder verdünnt seyn, eine Reduction bewirkt. Auch das gleich-

*) Gehler's Journ. für Chem. u. Phys. Bd. V. S. 127. Früher hat jedoch Bünger auf eine Kupferreduction aufmerksam gemacht, welche ganz auf dieselbe Weise wie die Buchholzsche Zinnreduction erfolgt ist. S. G. allgem. Journ. der Chem. Bd. IV. S. 444.

zeitige Oxydiren des Zinnstabs an der einen Stelle, und das Reduciren des aufgelösten an einer andern, scheint eine galvanische Kette zu verrathen. Dagegen ist aus der Natur galvanischer Ketten nicht zu erklären, warum zum Erfolg der Reduction durchaus vorausgesetzt wird, dafs entweder die Zinnauflösung, so wie überhaupt jede andere Metallauflösung, freie Säure enthalte, oder aber dem darüber geschichteten Wasser Säure zugesetzt werde, wie es sowohl durch die Versuche von Ritter, als auch und noch mehr durch die von Buchholz bewiesen ist *), da doch die galvanische Action schon bei vollkommener Sättigung der Auflösung, wenn gleich langsamer, von Statten geht, und daher die Reduction des Metalls erfolgen müfste, was auch selbst aus Ritter's Erörterung deutlich hervorgeht. Eben so ungünstig ist für die Annahme einer galvanischen Kette, dafs keine Reduction erfolgt, wenn statt des oxydulirten salzsauren Zinns oxydirtes genommen wird **), oder wenn das über die Zinnauflösung geschichtete Wasser statt mit Salzsäure mit Salpetersäure vermischt worden ist ***). Bei so bedenklichen Zweifelsgründen wäre es um die Wahrheit, oder auch nur um die Wahrscheinlichkeit der galvanischen Ansicht darzuthun, durchaus nöthig gewesen, dafs man wenigstens untersucht hätte, ob eine solche Kette, welche aus zwei Auflösungen eines Metallsalzes, die einzig und allein der Concentration nach verschieden sind, und aus dem Metall selbst zusammen gesetzt ist, auch in anderer Hinsicht eine galvanische Action hervor zu bringen im Stande sey. Dies ist aber nicht geschehen, und Buchholz hat bei seinen Untersuchungen, welchen er die verschiedenen von ihm gebrauchten Metallauflösungen in Beziehung auf die Annehmbarkeit einer galvanischen Kette unterwarf, es nicht einmal nöthig befunden, auch nur einen einzigen von den Versuchen anzustellen, welche Ritter bezeichnet, aber aus Mangel an Zeit nicht angestellt hatte. Denn wenn er diesen Fingerzeig hätte befolgen wollen, so hätte er die untersuchten Auflösungen auch mit einem andern Metall als dem aufgelösten in Berührung bringen müssen. Natürlich waren daher die eigenen Versuche über diesen Gegenstand besonders auf die angegebenrn Punkte gerichtet, und ich theile hier die Resultate derselben mit.

*) S. G. Journ. für Ch. u. Phys. Bd. V. S. 130.

**) S. G. N. allg. Journ. der Chem. Bd. IV. S. 264.

***) G. Journ. für Ch. u. Phys. Bd. I. S. 475. Ritter sucht zwar hier jene Erscheinung des oxydirt salzsauren Zinns zu erklären, aber wie wenig ihm dies gelungen ist, kann jeder leicht beurtheilen. S. 449 u. f.

1. Wenn man eine concentrirte und eine verdünnte Zinnauflösung in zweien Gläsern neben einander setzt, und sodann in die eine Flüssigkeit die Schenkel, in die andere den Nerven eines frisch präparirten Frosches bringt, und beide Flüssigkeiten durch einen Zinkstreifen verbindet: so zeigt sich keine Spur einer Zuckung.
2. Dasselbe ist der Fall, wenn man den Frosch in salpetersaures Blei oder salpetersaures Silber auf die angegebene Art stellt, und die Verbindung der beiden Flüssigkeiten in dem ersten Falle durch einen Bleidrath und in dem zweiten durch einen Silberdrath bewirkt.
3. Auch dann erfolgt keine Zuckung, wenn die Verbindung der beiden Auflösungen des Metallsalzes durch ein anderes Metall bewirkt wird; z. B. wenn die beiden Auflösungen des salzsauren Zinnes durch einen Silber- Gold- oder Platindrath verbunden werden. Nur müssen diese Dräthe ganz rein seyn, weil die geringste Spur eines heterogenen Metalles, welches an ihren Spitzen kleben könnte, sogleich Zuckungen hervorbringt.
4. Wenn durch die über einander geschichteten Auflösungen des salzsauren Zinnes ein Kupfer- Silber- Gold- oder Platindrath oder Kohle gebracht wird: so erfolgt keine Spur einer Reduction, überhaupt gar keine Veränderung *).
5. Eben so erfolgt keine Reduction des Bleies, wenn die benannten Metalle oder Zinn in die Bleiauflösung gebracht werden, so wie keine des Silbers, wenn in die Silberauflösung ein Gold- oder Platindrath gebracht wird.

Mit diesen Resultaten schien nun die Erklärung der Metallreductionen aus einer Wirkung galvanischer Ketten nicht wohl bestehen zu können. Denn wenn man auch die Resultate der drei ersten Versuche dadurch beseitigen wollte, dafs man annähme, eine galvanische Kette könnte zwar Metallreductionen bewirken, ohne darum wirksam genug zu seyn, um einen reizbaren Frosch in Zuckungen zu versetzen, so bleibt es immerhin unbegreiflich, warum als das dritte Glied dieser Kette gerade dasselbe Metall, welches in der Auflösung enthalten ist, genommen werden mufs. Denn Rit-

*) Dafs durch einen Platindrath keine Reduction erfolgt, führt auch Ritter in seinem ersten Aufsatz S. 272 ganz beiläufig an; es ist uns daher sehr auffallend, dafs er in seinem zweiten Aufsatz (in der so genannten Verarbeitung seiner Versuche) diese Erscheinung ganz unberührt gelassen hat.

ter's Ansicht erklärt zwar, wie und warum eine Metallauflösung durch das in der Auflösung enthaltene Metall selbst reducirt werden könne; sie schliefst aber die Reducirbarkeit durch andere Metalle keinesweges aus, sondern setzt diese vielmehr voraus. Wurde aber die Rittersche Erklärungsweise verworfen, so blieb mir nichts übrig, als die Erklärung aus den Grundsätzen des chemischen Processes; und doch war nicht zu leugnen, dafs diese, so weit sie bis jetzt bekannt sind, keinen genügenden Erklärungsgrund an die Hand geben konnten *). Bei so bewandten Umständen war es vor Allem wichtig, die Erscheinungen genauer zu beobachten, welche die Metalle darbieten, wenn sie ohne Mitwirkung anderer Potenzen von Säuren aufgelöst werden. Bisher hatte man nämlich bei der Auflösung eines Metalles in Säuren nichts anderes zum Zwecke gehabt, als eben die Bereitung einer gesättigten Auflösung, und hatte zu dem Ende das Verfahren, das man beobachtete, so eingerichtet, dafs man jenen Zweck so schnell als möglich erreichte. Daher die mechanische Zertheilung des Metalles und die Anwendung der Wärme **). Um nun auch einmal die Erscheinungen beobachten zu können, wie sie bei der allmähligen Auflösung eines Metalles sich darstellen, mufste ich die Metalle in ganzen Stücken und bei gewöhnlicher Temperatur der Einwirkung verdünnter Säuren aussetzen. Der Erfolg war, dafs wenn ich einen Bleistab in verdünnte Salpetersäure steckte, die ganze Oberfläche des Bleistabs, so weit er von der Säure umgeben war, nach einiger Zeit (oft schon nach einigen Minuten) krystallinische Facetten hatte, wovon sich bei längerer Einwirkung der Salpetersäure (nach Verschiedenheit der herrschenden Temperatur und der Mächtigkeit der Säure nach 24 Stunden oder nach mehreren Tagen) fadenartige Kristallisationen von regulinischem Blei ansetzten. Was der Grund dieses, nicht weniger als jene Zinnreduction, überraschenden Phänomens sey, ist im ersten Augenblick schwer einzusehen. Zwar drängt sich dabei mächtig der Gedanke von galvanischer Action auf. Man

*) Die von Buchholz gegebene Erklärung der Zinnreduction (s. seine erste Abhandlung a. a. O. S. 433.) ist schon aus dem Grunde unzureichend, weil nach dessen eigenen spätern Versuchen auch andere Metallsalze dieselbe Erscheinung bewirken, bei denen jene angenommenen Eigenschaften (des Zinnsalzes) durchaus nicht statt finden.

**) Erst nachdem man die verschiedenen Oxydationszustände kennen lernte, mit denen ein und dasselbe Metall sich in einer und derselben Säure auflöst, unterschied man bei einigen Metallen die Auflösung derselben in einer Säure bei gewöhnlicher Temperatur und beim Siedepunkt.

Man könnte nämlich annehmen, es bilde die Salpetersäure durch die Auflösung des Bleies verschiedene Schichten, welche dann mit dem Blei zusammen eine ähnliche Kette hervorbringen, als wenn vom Anfange an durch eine Bleiauflösung und die darüber geschichtete (verdünnte) Salpetersäure ein Bleistab gesteckt worden wäre. Aber die Unrichtigkeit einer solchen Annahme ist bei weiterer Ueberlegung leicht einzusehen. Denn 1) ist die Zeit von wenigen Minuten doch gar zu kurz, um eine solche Schichtung mit dem aufgelösten Blei zu bilden. Sodann zeigt sich 2) kein Unterschied, es mag nun die Salpetersäure ruhig bleiben oder fortdauernd mit dem Bleistab bewegt werden; und endlich 3) sind die Facetten angegebenermafsen durchaus und ganz gleichmäfsig auf der ganzen Oberfläche des Bleies, und nicht blofs an einzelnen Stellen sichtbar. Bei weiterem Nachdenken kann inzwischen über die wahre Natur dieser Erscheinung kein Zweifel bleiben. Eine wesentliche Eigenschaft der Metalle ist nämlich ihre innere krystallinische Structur. Durch die verschiedenen Behandlungsweisen, die sie zu unserem Gebrauch erfahren müssen, durch das schnelle Abkühlen, Hämmern, Plätten, und durch andere störende Momente, erscheinen sie zwar auf ihrer Oberfläche ohne alle Krystallisation; sie ist aber in ihrem Innern nichts weniger als zerstört, wie dieses auch ihr Bruch zeigt. Wird nun ein solches Metall der Einwirkung eines Auflösungsmittels ausgesetzt: so kann bei günstigen Umständen, d. h. bei eigenthümlicher Beschaffenheit des Metalls und des Auflösungsmittels, die erste Wirkung des letztern die seyn, dafs die äufsere Oberfläche, gleichsam die unkrystallinische Hülle, aufgelöst wird, wo alsdann das Metall in seiner eigenthümlichen Krystallisation erscheint. Bei der gelinden Wirkung der Salpetersäure auf das Blei ist dies wirklich der Fall, und die krystallinischen Facetten sind nicht durch die Salpetersäure erst erzeugt, sondern blofs sichtbar geworden *).

7. Eine ähnliche Erscheinung wie beim Blei suchte ich lange vergebens auch mit andern Metallen hervor zu bringen. Endlich aber war ich so glücklich, sie noch glänzender bei dem Zinn zu erhalten, als ich

*) Eine artige Erscheinung, welche zugleich für die Richtigkeit dieser Ansicht spricht, erhält man, wenn man die Salpetersäure mit etwas wenigem salpetersauren Silber oder Kupfer vermischt, und einen Bleistab hineinsenkt. Man sieht nämlich anfangs nichts als das matte Anlaufen des Bleies, und wie es mit dem aufgelösten Silber oder Kupfer belegt wird. Nach einiger Zeit aber löst sich das Metallhäutchen ab, und nun erscheint das Blei mit seiner schönen Krystallisation.

es den Dämpfen der Salzsäure aussetzte. Man braucht zu diesem Ende nur die Oeffnung der Flasche, worin Salzsäure enthalten ist, mit einem glatten Blatt Staniol (diese Art Zinn eignet sich vorzüglich dazu) zu belegen: so wird man nach wenigen Stunden ebenfalls die ganze Oberfläche des Zinnblattes, welches den Dämpfen ausgesetzt war, mit glänzenden krystallinischen Facetten bedeckt finden. Bei längerer Einwirkung der Salzsäure nehmen sie zu, bis das Zinn durchfressen wird und in dieser Durchlöcherung krystallinische Fasern zeigt *). Uebrigens läfst sich annehmen, dafs, wenn gleich bis jetzt es nur mit diesen beiden Metallen gelungen ist, die angeführte Erscheinung hervorzubringen, sie dennoch auch bei den meisten andern zu erhalten seyn wird, wenn sie nur unter eben so günstigen Umständen der Einwirkung der Auflösungsmittel ausgesetzt werden, wie es bei Blei und Salpetersäure und bei Zinn und Salzsäure der Fall ist.

8. Hieher gehört auch die Beobachtung, dafs die Metalle, indem sie sich in Säuren ruhig auflösen, dieses vorzüglich an der Oberfläche der Säure thun, so dafs, wenn man das Metall in Form eines Cylinders anwendet, derjenige Theil, welcher in der Säure lange gestanden hat, einen Kegel darstellt, dessen Spitze an der Oberfläche der Säure ist. Daher bricht auch manchmal der Metallstab an dieser Stelle ab.

9. Wird ein Cylinder von Kupfer in eine neutrale Auflösung von salpetersaurem Silber gesteckt, so sieht man dann, dafs von der Gränze der Flüssigkeit aus, die farbenlose Auflösung sich grün färbt, und an dieser Stelle sich auch weit mehr Silber reducirt, als an den übrigen; woraus ebenfalls deutlich hervorgeht, dafs an jener Stelle vorzüglich die auflösende Kraft der Säure wirkt; was auch aufserdem an dem Kupferstabe selbst sichtbar ist, indem dieser am meisten an den Gränzen der beiden Flüssigkeiten angegriffen wird. Dieser Versuch zeigt auch, dafs an dem untersten Ende des Kupferstabes die Säure stark

*) Eine ähnliche Krystallisation, wie die angegebene des Bleies und des Zinnes, hatte ich vor einigen Jahren bei dem Hornsilber beobachtet. Es ist nämlich, wie bekannt, in Ammonium leicht auflöslich. Wirkt daher das letztere nicht lange oder nicht mächtig genug darauf ein, so löst es ebenfalls anfangs die unkrystallinische Hülle ab, und das Hornsilber erscheint dann auf seiner ganzen Oberfläche krystallisirt. Wollte man daher dieser Art Krystallisation dennoch einen galvanischen Ursprung geben, so müfste man es auch beim Hornsilber thun, welches ein absoluter Nichtleiter für galvanische Elektricität ist.

einwirkt. Denn auch von hier aus färbt sich die Flüssigkeit grün, und auch hier schlägt sich mehr reducirtes Silber nieder, als an dem übrigen Kupfer *).

10. Noch deutlicher ist diese stärkere Einwirkung an den angegebenen beiden Stellen wahrzunehmen, wenn in dem angeführten Versuche (9.) über die gesättigte Silberauflösung Wasser geschichtet und ein Kupferstab durch beide Flüssigkeiten gesteckt wird **). Der Grund dieser Erscheinung dürfte vielleicht darin gesetzt werden, dafs die Säuren, besonders die Salpeter- und Salzsäure (mit denen ich einzig und allein bis jetzt diese Versuche angestellt habe), ein Streben haben, die Luftform anzunehmen, welches sie hauptsächlich bei Berührung ihrer wässerigen Auflösungen mit der Luft und an dieser Berührungsfläche äufsern. Wird daher ein Metallstab in eine von diesen (in Wasser aufgelösten) Säuren gesteckt: so wird er zwar auf seiner ganzen Oberfläche angegriffen, aber vorzüglich da, wohin die Säure strebt, nämlich bei der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit der Luft. (Dafs die Säure zugleich auch das Metall mehr an seinem Ende (Spitze) angreift, als an andern Stellen, rührt wohl blofs daher, dafs das Metall der Säure an dieser Stelle mehr Fläche als an den übrigen darbietet.

So viel von den Resultaten der von mir angestellten Versuche, durch welche ich mir zu einer richtigern Ansicht von den in Frage stehenden Metallreductionen den Weg bahnen mufste. Ehe ich jedoch zur genauern Ausführung dieser Ansicht fortgehe, wird es nöthig seyn, noch einige Bemerkungen voraus zu schicken. Nämlich 1) dasselbe, was den bisherigen Untersuchungen zufolge bei der Einwirkung der reinen Säuren auf die Metalle Statt findet, erfolgt auch, wenn die Säuren, mit einem Metalle verbunden, in Contact mit einem andern Metall gesetzt werden, zu welchem sie mehr Verwandtschaft als zu dem (bereits) aufgelösten besitzen. Sodann mufs 2)

*) Doch ist, wie leicht einzusehen, diese stärkere Auflösung des untersten Theils an dem Metallstabe nicht so bestimmt und deutlich zu erkennen, als die im vorigen Versuch (8.) angegebene.

**) Es gewährt eine angenehme Erscheinung in diesem Falle, wenn man in einer ganz farbenlosen Flüssigkeit an zwei von einander entfernten Stellen grüne Schichten sich bilden sieht, welche immer zunehmen, während die darüber und dazwischen liegenden Schichten (lange) ungefärbt bleiben.

auf die Beschaffenheit der Metallsalze aufmerksam gemacht werden. Es lassen sich nämlich im Allgemeinen die Metallsalze (nur mit sehr seltenen Ausnahmen) nie im vollkommenen neutralen Zustand darstellen *); auch sind sie überhaupt leicht zu zersetzen (durch Licht, Luft und Wasser), und äufsern alsdann ein Bestreben, aus dem frühern Zustande eines (dem neutralen nahen) Salzes in den zweier verschiedenen überzugehen und somit in zwei Salze zu zerfallen, wovon das eine einen (grofsen) Ueberschufs an Säure und das andere ein grofses Uebergewicht der Grundlage zeigt. Daher dann auch das erste im Wasser aufgelöst bleibt, das zweite hingegen sich niederschlägt. Diese Beschaffenheit der Metallsalze läfst uns nämlich leicht einsehen, warum die Einwirkung der Säure auf das Metall an der Gränze besonders einer Metallauflösung nach stärker erscheint, wenn darüber Wasser geschichtet wird, als bei der unmittelbaren Berührung mit der Luft es der Fall ist. Nach diesen Vordersätzen mag der Erklärungsversuch selbst folgen.

Das salzsaure Zinn (denn, da die Erscheinung bei diesem Salze am glänzendsten erfolgt, so wollen wir es auch vorzugsweise als Beispiel brauchen), das salzsaure Zinn, welches selbst bei anhaltender Einwirkung der Salzsäure und bei hoher Temperatur immer nur mit einem Ueberschufs von Säure (oder mit dem an Grundlage) dargestellt werden kann, scheint besonders geneigt, sich auf die angegebene Art zu zersetzen. Wird demnach über diese concentrirte Auflösung Wasser geschichtet und ein Zinnstab durch beide Flüssigkeiten durchgesteckt: so wirkt die (überschüssige) Salzsäure vorzüglich an der Gränze der Schichtung auf das Zinn ein, und stellt es, nachdem sie die unkrystallinische Hülle aufgelöst hat, in seiner eigenthümlichen Krystallisation dar. Durch die Aufnahme des neuen Antheils von Zinn gehen aber die mit dem Zinn in unmittelbarer Berührung stehenden Salztheilchen in den Zustand eines neutralen Salzes über, welches, ehe es sich mit dem übrigen Salze in ein chemisches Gleichgewicht setzen kann, von dem Wasser in ein Salz mit Ueberschufs der Säure und in eins mit Ueberschufs der Grundlage zersetzt wird, wovon das erste von neuem auf das metallische Zinn einwirkt, während das letzte

*) Von mehreren Salzen des Kupfers, Zinns, Blei's, Quecksilbers und Silbers, welche ich in dieser Hinsicht untersuchte, bildet das salpetersaure Silber allein eine vollkommen neutrale Verbindung, welche das Lakmuspapier nicht röthet.

durch Krystallisationsanziehung die überschüssige Grundlage an die krystallinischen Facetten (krystallinisch) sich anzulegen gestattet *). Die Natur dieser Erscheinung könnte demnach mit wenigen Worten so ausgedrückt werden: unter günstigen Umständen kann die krystallisirte Oberfläche eines Metalles selbst reducirend auf die Auflösung desselben Metalles wirken, wenn es dem aufgelösten Gelegenheit darbietet, sich vollkommen krystallisirt darzustellen. Da nun bei dem Zinnsalz alle diese günstigen Umstände sich vereinigen, so ist auch die Reduction desselben bei weitem am schönsten und am glänzendsten vor allen andern Metallen.

Aus dieser Erklärung sind die Bedingungen, unter welchen einzig und allein jene Erscheinung erfolgt, als das Schichten der Flüssigkeiten **), der Ueberschufs an freier Säure u. s. w. von selbst klar. Besonders aber ist nun der Grund leicht einzusehen, warum diese Reduction nur an demselben Metall, welches in der Auflösung enthalten ist, und an keinem andern, so wenig als an Kohle, Graphit u. s. w. erfolgen kann, welches aus galvanischen Grundsätzen durchaus unerklärbar ist. Aus der gegebenen Erklärung ergiebt sich ferner, warum das Zinn nur an der Gränze der geschich-

*) Dafs ich bei dieser Erklärung den Sauerstoff des Oxyds nicht besonders erwähne, wird mir wohl um so weniger zum Vorwurf gereichen, da das in Rede stehende salzsaure Zinn nach Davy's Ansicht die Grundlage im metallischen Zustande enthalten soll. Uebrigens bleibt die Erklärung ganz dieselbe, wenn die Grundlage mit Sauerstoff verbunden ist; denn da das in der Auflösung befindlich gewesene Metall, ohne die Säure zu zersetzen, sich auflöst: so mufs es dem in der Auflösung enthaltenen Oxyd seinen Sauerstoff entziehen.

**) Doch mufs zur Steuer der Wahrheit angezeigt werden, dafs es zwar vollkommen richtig ist, dafs, wenn diese Art Reductionen schön, deutlich und zugleich schnell erfolgen soll, das Uebereinanderschichten von Wasser über die concentrirte Metallauflösung eine nothwendige Bedingung sey; dagegen aber findet auch eine geringe Reduction Statt, wenn in eine Metallauflösung mit etwas freier Säure (ohne alle Schichtung) dasselbe Metall gethan wird. Nur dafs diese geringe Reduction erst nach vielen Stunden oder Tagen erfolgt, und dafs das ausgeschiedene Metall entweder ohne vollkommenen Metallglanz erscheint, oder ihn bald verliert. Wenn daher Ritter, wie oben angeführt wurde, niemals eine Spur vom Zinn reducirt sah, wenn er die Zinnauflösung ohne Schichtung mit Zinn in Berührung brachte: so ist der Grund davon einzig der, dafs entweder das Zinn nicht lange genug mit der Auflösung in Berührung gelassen, oder Ritter die Einwirkung desselben nicht genau beobachtet hat. Unter den von mir untersuchten Metallsalzen ist das salpetersaure Blei vorzüglich zu dieser Erscheinung geschickt, indem sich an einem hineingebrachten Stück Blei nach wenigen Stunden Krystalle von reducirtem Blei anlegten, während dieses Bleistück sich an andern Stellen oxydirte.

teten Flüssigkeiten reducirt wird, wovon nach Ritter's Erörterung kein Grund einzusehen ist; denn eben so wie nach dieser Ansicht der Oxygenpol längs des ganzen Theils des in der concentrirten Auflösung stehenden Zinnstabs durch Oxydation desselben sich darstellt: so sollte auch der Hydrogenpol sich längs desjenigen Theils des Zinnstabs erstrecken, welcher mit der verdünnten Auflösung in Berührung ist, und daher auch das reducirte Zinn an dieser ganzen Linie sich anlegen, und nicht blofs an einem einzelnen Punkte derselben.

Die übrigen Umstände, die bei den untersuchten Metallreductionen vorkommen, bedürfen einer Zurückführung auf die angegebenen Erklärungsgründe nicht, da der Zusammenhang ohnehin klar ist. Nur über das Umkehren der Pole mufs noch einiges gesagt werden. Dieses findet nämlich Statt, wenn an der Stelle der noch freie Säure haltenden Zinnauflösung eine vollkommen neutrale, oder richtiger eine mit Ueberschufs an Grundlage, genommen wird, wobei nämlich die Oxydation in der obern verdünnten und die Reduction in der untern concentrirten Flüssigkeit vorgehen soll. Von dieser Erscheinung liegt der Grund offenbar darin, dafs diese Zinnauflösung besonders durch das darüber stehende Wasser eine immer fortgehende Zersetzung erleidet, wodurch überall in der untern Flüssigkeit salzsaures Zinn mit Ueberschufs vorhanden ist, welches daher längs des ganzen eingesenkten Theils des Zinnstabs reducirt wird *).

Vierter Abschnitt.

Von den Bedingungen, unter welchen Metallreductionen durch Einwirkung einer einfachen galvanischen Kette aus zwei festen und einem flüssigen Leiter erfolgen können.

Wenn unser bisheriges Bemühen dahin ging, die Metallreductionen, welche wir im zweiten und dritten Abschnitt abgehandelt haben, aus dem Gebiete des Galvanismus, wohin man sie verpflanzt, wiederum zurück in das der Chemie zu versetzen, so scheint ein gleiches Unternehmen mit den Reduc-

*) S. die vorhergehende Anmerkung.

tionen, welche durch die einfache galvanische Kette aus zweien festen und einem flüssigen Leiter hervorgebracht werden, kaum denkbar zu seyn. Denn wie sollte es möglich seyn, aus einer chemischen Verwandtschaft die hier vorkommende Erscheinung erklären zu können, zufolge deren jedes Metall, das in Berührung mit einem andern negativ elektrisch wird, bei bewirkter Berührung der beiden Metalle und hergestellter leitender Verbindung mit der Metallauflösung zur vollkommenen Reduction des aufgelösten Metalls geschickt ist; dafs also auf diesem Wege nicht nur dasselbe Metall, sondern, der chemischen Verwandtschaft ganz entgegen, sehr leicht oxydirbare durch schwer zu oxydirende Metalle reducirt werden: so z. B. Silber durch Silber, Platin, Kohle; Kupfer durch Kupfer, Platin u. s. w.; Blei durch Zinn, Kupfer u. s. w. Die Tendenz dieser meiner Untersuchungen über diese Erscheinungen war auch keinesweges dieselbe, wie bei den frühern. Denn ich ging nicht darauf aus, diese Reductionen für die Chemie ausschliefslich zu vindiciren, sondern nur zu erforschen, ob nicht dennoch auch hier irgend ein Zusammenhang mit der chemischen Verwandtschaft statt finde, so dafs zwar die galvanische Action der Hauptgrund der eintretenden Reductionen bleibe, die chemische Verwandtschaft hingegen hinzutreten müsse, wenn ein bedeutendes Produkt erfolgen solle. Ich untersuchte demnach

1stens, in wiefern es gleichgültig ist oder nicht, welches Metall man als das negative anwende; d. h. ob es blofs darauf ankomme, dafs das gebrauchte Metall mit dem positiven galvanische Action hervorzubringen geeignet sey. Dasselbe untersuchte ich

2tens in Ansehung des positiven Metalls, und suchte sodann

3tens auszumitteln, ob sich ein Unterschied zeige, wenn man eine galvanische Kette, die einmal bei irgend einer Metallauflösung eine vorzügliche reducirende Thätigkeit gezeigt hat, auf andere Metallauflösungen einwirken läfst. Endlich war die Untersuchung darauf zu richten

4tens, ob auf die Art und Weise, wie die leitende Verbindung zwischen dem positiven Metall und der Metallauflösung bewirkt wird, etwas ankomme; namentlich, ob es ohne bedeutenden Einfluss für die Reduction bleibe, man möge nun diese durch thierische Blase, wie es gewöhnlich der Fall ist, oder durch Papier u. s. w., oder durch Metalle bewirken. Als Resultat meiner Untersuchungen über diese Punkte kann vorläufig folgendes angegeben werden.

1. Was die zuerst aufgeworfene Frage betrifft: so ist es zwar nicht ganz gleichgültig, ob zu einem positiven Metall *a* das Metall *b* oder *c* oder *d* u. s. w. als das negative Metall angewandt wird. Denn durch die gröfsere elektrische Spannung und andere unbekannte Umstände wird die Reduction bei dem einen früher oder häufiger oder regelmäfsiger u. s. w. erfolgen, als bei dem andern; aber von wesentlichem Einfluſs ist die Wahl des negativen Metalles doch nicht, weil, wenn nur die andern Bedingungen erfüllt sind, die Reduction immer erfolgt *). So z. B. wird das Bleisalz immer reducirt, das positive Metall, z. B. Zink, mag nun mit Blei, Kupfer, Silber oder Platin verbunden werden; nur wird, wie gesagt, die Reduction schneller und stärker erfolgen, wenn Platin, als wenn Blei als negatives Metall angewendet wird.
2. In Beziehung auf die 2te und 3te Frage ergiebt sich dagegen, daſs das positive Metall einen wesentlichen Einfluſs auf das Gelingen der Reduction äufsert, so daſs diese nur dann erfolgt, wenn das positive Glied der Kette aus den Matallen *a* .... *d*, nicht aber wenn es aus denen *e* .... *g* gewählt wird; gleichviel übrigens, welches Metall als negatives wirkt; so daſs (für ein gegebenes Salz) eine bestimmte Kettenverbindung sich wirksam zeigt, während eine andere ohne alle Wirkung bleibt, obgleich bei der erstern weit weniger galvanische Action als bei der zweiten statt findet; z. B. eine Kette, deren positives Metall Zink ist, reducirt Bleisalze, wenn sogar zum negativen Metall Blei gewählt wird, während eine andere, deren positives Glied Blei ist, nicht zu reduciren im Stande ist, wenn selbst Platin das negative Glied bildet; und dennoch ist die erste Kette in anderer Hinsicht weit weniger wirksam, als die zweite. Damit hängt die Bemerkung zusammen,
3. daſs für ein jedes gegebene Salz nur bestimmte Metalle als positive Leiter dienen können, von denen eins oder mehrere zur Reduction eines andern Metallsalzes durchaus untauglich sind. So z. B. sind die Metalle von Zink bis Kupfer und Quecksilber gleich vermögend als

*) Jedoch wird das negative Metall kein solches seyn dürfen, welches das aufgelöste schon auf chemischem Wege zu reduciren im Stande ist, wo sich dies übrigens von selbst versteht.

als positives Glied der galvanischen Kette zu dienen, um Silbersalze vollkommen zu reduciren, während aus ihnen zur Reduction der Bleisalze nur Zink und (kaum) das Eisen geschickt sind; Blei hingegen, Zinn, Kupfer u. s. w. durchaus keine Reduction bewirken, mit welchem negativen Metall sie auch verbunden werden mögen.

4. Bei genauer Prüfung der Fälle, in welchen bestimmte Metalle (als positive Glieder der Kette) Reductionen zu bewirken oder nicht zu bewirken vermögen, ergab sich das nicht unrichtige Gesetz: dafs nur eine solche Kette das aufgelöste Metall zu reduciren im Stande sey, deren positives Metall auch auf chemischem Wege (durch nähere Verwandtschaft) diese Wirkung hervorbringt; wonach für jedes gegebene Metallsalz leicht bestimmt werden kann, welche Ketten wirksam und welche unwirksam seyn werden *).

Die Allgemeinheit dieses Gesetzes habe ich durch alle Versuche, welch in zahlreicher Menge hierüber angestellt habe, vollkommen bestätigt gefunden. Ein Paar derselben mögen gleichsam beispielsweise hier Platz finden. Es findet sich nämlich, dafs 1) essigsaures oder salpetersaures Blei durch Ketten von Zinkgold, Zinksilber, Zinkkupfer und selbst durch Ketten von Zinkblei reducirt wird, während durch Bleikupfer, Bleisilber und Bleiplatin keine Reduction erfolgt (noch weniger, wenn das + Metall Zinn, Kupfer oder Silber ist). Auf ähnliche Weise werden 2) die Kupfersalze reducirt, wenn das positive Metall der einwirkenden Kette Zink, Eisen, Blei, Zinn ist, also auch durch Bleikupfer oder Zinnkupfer; dagegen zeigen sich Ketten aus Kupfersilber und Kupferplatin u. s. w. unwirksam. Endlich 3) wurde salpetersaures Silber durch alle Ketten reducirt, deren positive Glieder von Zink bis zum Kupfer und Quecksilber waren, also auch durch Kupfersilber und Quecksilbersilber; dagegen waren Ketten von Silbergold und Silberplatin unwirksam. In Beziehung auf diese Versuche ist jedoch zu bemerken, dafs man, um solche genaue Resultate zu erhalten, Metallsalze wählen müsse, die von andern Metallsalzen ganz rein und möglichst neutral, d. h. ohne freie Säure sind. Denn im Fall einer Beimischung anderer

*) Man braucht nämlich nur in der elektrischen Reihe der Metalle das positive Glied aus denjenigen zu wahlen, welche von dem aufgelöstsn (exclusive) abwarts bis zum Zink gehen. Das negative Glied kann alsdann von dem Platin bis ebenfalls zu dem aufgelosten (inclusive) gewählt werden.

Mittelsalze, besonders eines weniger oxydirbaren Metalls, kann man leicht getäuscht werden und auf Ausnahmen von dem oben aufgestellten Gesetze zu stofsen glauben *). Ist inzwischen die in dem Metallsalze enthaltene freie Säure von bedeutender Menge: so wird in manchen Fällen auch durch solche Ketten noch eine Reduction bewirkt werden, bei denen dasselbe Metall, welches aufgelöst ist, als positives Metall angewandt wird. Dieses aber dient zur Bestätigung und Bekräftigung des aufgestellten Gesetzes. Denn in einer solchen Metallauflösung mit freier Säure wirkt (oft) dasselbe Metall reducirend, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben. Man kann daher mit Bestimmtheit auf freie Säure der Metallauflösung schliefsen, wenn galvanische Ketten, deren positives Glied aus demselben Metall (welches aufgelöst ist) besteht, noch eine schwache Reduction zu bewirken vermögen. So z. B. wurde das salpetersaure Blei oft noch durch eine Kette von Blei-Gold schwach reducirt, während dieses bei dem essigsauren (vollkommen neutralen) Blei (*Extractum saturni*) niemals geschah. Auf ähnliche Art zeigte bei dem kausteschen schwefelsauren Kupfer, so wie bei dem gewöhnlichen salpetersauren Kupfer, die Kupfersilberkette Reduction, während diese gänzlich wegfiel, wenn diese Salze durch anhaltendes Kochen mit Kupferoxyd möglichst neutralisirt und frisch angewandt worden waren (ehe noch ein Theil des Oxyds daraus niedergefallen war).

Zur Beantwortung der 4ten Frage, über den Einfluss der leitenden Verbindung zwischen der Metallauflösung und dem positiven Metall, sind ebenfalls mehrere Versuche angestellt worden, woraus Folgendes hervorging.

1. Die Reduction geht vorzüglich schnell und stark von Statten, wenn die leitende Verbindung durch thierische Blase in der (gewöhnlichen) Art bewerkstelligt wird, indem man die Metallauflösung in eine Röhre thut, deren untere Oeffnung mit Blase verschlossen ist, und diese Röhre in ein Gefäfs mit Wasser setzt, worin das positive Metall sich befindet, während das mit demselben verbundene negative in der Metallauflösung sich endigt.

*) Ein Beispiel wird dies deutlich machen. Ich liefs vor langer Zeit in einer Officin eine Auflösung von essigsaurem Blei bereiten, um mich derselben zu diesen galvanischen Versuchen zu bedienen. Als ich sie der Wirkung einer Zinkkupferkette aussetzte, sah ich zu meinem Erstaunen, dafs nach einiger Zeit der Kupferstab mit einem weifsen Metall schwach belegt war. Bei näherer Prüfung zeigte es sich jedoch, dafs dieses reducirte Metall nicht Blei, sondern Silber war, das in geringer Menge (als essigsaures Silber?) in dem Bleizucker sich vorgefunden hatte.

2. Schwächer und langsamer ist hingegen die Wirkung, wenn die Blase oder ungeleimtes Papier u. dgl. als Leitungsbogen (zwischen der Metallauflösung und der das + Metall umgebenden Flüssigkeit) angewandt wird.

3. Durchaus keine Wirkung (oder in seltenen Fällen nur eine sehr unbedeutende) erfolgt, wenn die Leitung durch einen Metalldrath bewirkt worden ist.

4. Um den Grund dieser Erscheinung auszumitteln, untersuchte ich zuerst das Verhalten der Blase, mit der die untere Oeffnung der Röhre verschlossen ist, zu der in der Röhre enthaltenen Metallauflösung, und da ergab es sich, dafs die Blase, wenn sie trocken ist, die Röhre vollkommen verschliefst, so dafs von dem Inhalt keine Spur nach aufsen dringt, wohl aber im Gegentheil der Flüssigkeit einen Durchgang gestattet, wenn sie (die Blase) von aufsen mit Wasser umgeben ist, so dafs man sich nach wenigen Minuten, oft auch früher, durch Reagentien überzeugen kann, dafs von der in der Röhre enthaltenen Auflösung in das äufsere Wasser gedrungen ist.

Da nun dasselbe, nur im schwächern Grade, bei der Anwendung der Blase oder des Papiers u. dgl. in der (beim zweiten Versuch) angegebenen Art Statt finden mufs, während ein Uebergang der Metallauflösung zu der das positive Metall umgebenden Flüssigkeit durchaus unmöglich ist, wenn die Leitung durch einen Metalldrath geschieht: so können wir als zweites Gesetz für die Reduction der Metallauflösung durch galvanische Ketten aufstellen,

dafs die Reduction nur dann erfolgt, wenn die Metallauflösung auch mit dem positiven Metall in ununterbrochener und unmittelbarer Verbindung gesetzt wird.

Für die Richtigkeit dieses Gesetzes zeugen folgende Versuche:

1. Eine Auflösung des salpetersauren Silbers in absolutem Alkohol wurde in eine Röhre gethan, deren untere Oeffnung mit Blase verchlossen war, und der Zinkplatinkette ausgesetzt, nachdem das Gefäfs, in welches die Röhre und der Zinkstab eingesenkt werden sollten, zur Herstellung der leitenden Verbindung, mit Alkohol gefüllt worden war. Es erfolgte nach $\frac{1}{4}$ Stunde keine Wirkung. Um inzwischen der Einwendung auszuweichen, als wäre aus dem Grunde keine Reduction

erfolgt, weil der Zink in Alkohol nicht oxydirt werden kann, welches die erste Bedingung einer wirksamen galvanischen Kette sey, wurden nunmehr in den (das Zink umgebenden) Alkohol einige Tropfen concentrirter Schwefelsäure gethan. Dennoch erfolgte keine Spur von Reduction, obgleich der Zink unter Entwickelung vieler Luftblasen oxydirt wurde. Erst nach mehreren Stunden ging die Reduction wirklich vor sich, und ich erfuhr bald, dafs die Wirkung sehr beschleunigt werden konnte, wenn entweder die Blase ein wenig mit Wasser befeuchtet wird, oder wenn man zur Verschliefsung der Röhre, statt der gewöhnlichen Schweinsblase, das sehr dünne Schafhäutchen eines neugebornen Kalbes *) nimmt.

Der Grund der sehr langsamen und verzögerten Reduction lag daher, in dem angegebenen Falle, nicht in dem Mangel der Oxydation des Zinks im Alkohol, oder etwa in der vergleichungsweise mit dem Wasser schlechtern galvanischen Leitung des Alkohols, sondern einzig und allein darin, dafs der Alkohol die Schweinsblase nur nach mehreren Stunden so zu durchdringen vermochte, dafs der enthaltenen Flüssigkeit ein Durchströmen gestattet war, welches hingegen bei dem dünnen Schafhäutchen, oder wenn die Blase mit Wasser befeuchtet war, weit früher erfolgte. Dafs dem wirklich so sey, davon konnte ich mich leicht überzeugen, indem ich

2. zwei Röhren mit salpetersaurer Silberauflösung in Alkohol, deren untere Oeffnung bei der einen mit Schweinsblase und bei der andern mit einem Schafhäutchen verschlossen war, ohne Veranstaltung einer galvanischen Einwirkung in Gläser mit Alkohol setzte. Denn nach kaum $\frac{1}{4}$ Stunde zeigte der Alkohol, der die letzte Röhre umgab, einen Gehalt an salpetersaurem Silber (als Folge der Reaction auf Salzsäure), welches in dem andern Glase nach einer Stunde und manchmal selbst nach $1\frac{1}{2}$ Stunden kaum der Fall war; obgleich nach längerer Zeit in dem einen wie in dem andern Falle der Alkohol salpetersaures Silber enthielt.

3. Einen noch sicherern Beweis für die Richtigkeit dieser Ansicht hatte ich, als ich die Blasen, mit denen die eine Oeffnung der Röhre verschlossen war, entweder mit einer wässerigen Auflösung des Arabi-

*) *Alantois*, welches man seiner Dünne und Leichtigkeit wegen zu Luftbällen und dergleichen anwendet.

schen Gummi's, oder mit einer Auflösung des Harzes in Weingeist bestrich und trocknen liefs; dann füllte ich sie mit salpetersaurem Silber in Alkohol, und setzte die Röhre, deren Blase mit Gummi bestrichen war, in Alkohol, oder die, deren Blase mit Harz gefirnifst war, in Wasser; so erfolgte in der einen wie in der andern keine Spur einer Reduction, wie lange ich sie auch der Zinkplatinkette aussetzen mochte.

4. Eine Bleisalzauflösung wurde in eine Röhre gethan, in deren untere Oeffnung ein Platindrath eingekittet war. Die Röhre wurde alsdann mit dem Platindrath in ein Gefäfs mit Wasser gesetzt, worin ein Zinkstab war, und der mit dem Zink verbundene Platindrath durch die obere Oeffnung in die Metallauflösung geleitet. Es erfolgte durchaus keine Spur einer Reduction.
5. Dasselbe war der Fall, als ich eine Zinn- und eine Kupferauflösung auf diese Art der Zinkplatinkette aussetzte; auch hier erfolgte nicht die geringste Reduction.

Wir sind demnach auf zwei wichtige Bedingungen gestofsen, unter welchen allein die Metallreductionen durch galvanische einfache Ketten bewirkt werden können. Die eine zwar, die letztere nämlich, kann nur mit einer Ausnahme als wahr aufgestellt werden, wovon bald mehr die Rede seyn wird; mit der andern hingegen, der zuerst aufgestellten, hat es durchaus und überall seine Richtigkeit, so dafs wir schlechterdings niemals eine Spur von Reduction erfolgen sehen, wenn das positive Metall nicht ein solches ist, welches das aufgelöste durch chemische Verwandtschaft schon an und für sich zu reduciren vermag (daher für manche der angegebenen Fälle auch noch dasselbe Metall, welches in der Auflösung enthalten war, als das positive Glied der Kette angewandt werden konnte). Ja selbst der Grad der durch die galvanische Kette bewirkten Reduction, so wie ihre Schnelligkeit und Langsamkeit, steht im Verhältnifs mit der Art und Weise, wie das positive Metall das aufgelöste auf chemischem Wege zu reduciren vermag, so dafs z. B. schwefelsaures Kupfer durch eine Kette von Bleikupfer nur schwach reducirt wird, etwas stärker durch eine von Eisen und Kupfer, und am stärksten durch Zinnkupfer. Aber gerade so verhalten sich eben Blei, Eisen und Zinn, wenn man sie auf eine Auflösung des schwefelsauren Kupfers wirken läfst. Die stärkste und schnellste Reduction bewirkt nämlich das Zinn, schwächer und langsamer wirkt

das Eisen, und in noch geringerem Grade ist es beim Blei der Fall. Ferner werden durch Ketten, deren positives Metall Eisen ist, das salzsaure Zinn, essigsaure Blei und salpetersaure Silber theils gar nicht, theils in sehr geringem Grade reducirt; weil diese Salze auch auf gewöhnlich chemischem Wege sich nur schwer oder gar nicht durch Eisen reduciren lassen. Fassen wir nun die beiden aufgefundenen Bedingungen in ein Gesetz zusammen: so werden wir dieses so ausdrücken können:

> die Metallreduction durch galvanische Ketten erfolgt nur allein, wenn das positive Metall, welches durch chemische Verwandtschaft das aufgelöste regulinisch darzustellen vermag, auch in unmittelbare Verbindung mit der, wenn auch sehr verdünnten, Metallauflösung gesetzt ist.

Zufolge dieses Gesetzes ist nun die reducirende Wirkung der galvanischen Ketten, wenn auch nicht eins und dasselbe mit demjenigen Processe, welchen wir in dem zweiten Abschnitt als die Reduction eines weniger oxydirbaren Metalles durch ein anderes leichter oxydirbares Metall kennen gelernt haben, so doch wenigstens ihm sehr nahe verwandt. Der Unterschied liegt nämlich darin, dafs dort unter günstigen Umständen das reducirte Metall nicht unmittelbar an dem reducirenden (oder das aufgelöste an dem in der Säure sich auflösenden), sondern entfernt von ihm in baumähnlichen Verzweigungen an dem reducirten selbst sich anlegt, während hier das regulinisch ausgeschiedene Metall im allgemeinen nicht an dem positiven als dem reducirenden Metall angesetzt wird, sondern anfangs an der Spitze des negativen Metalls (was jedoch zu dem Ende mit dem positiven oder reducirenden Metall in Verbindung stehen mufs), weiterhin aber ebenfalls in baumähnlichen Verzweigungen an den bereits ausgeschiedenen selbst. Was inzwischen die Verwandtschaft der beiden Fälle noch mehr beurkundet, ist dieses, dafs wenn wir auf die günstigen Umstände sehen, welche nach den oben angegebenen Bedingungen der schönen Vegetation des dargestellten Metalls sind, wir sie dem Wesen nach gleichartig finden mit denjenigen, auf welche es bei der Reduction durch galvanische Ketten ankömmt. Denn das Verdünnen der Auflösung mit Wasser, das Eintauchen des reducirenden Metalles mit geringer Masse, so wie auch umgekehrt das Umgeben des reducirenden Metalles mit einer geringen Quantität der Auflösung, deuten im Grunde auf nichts anders, als dafs das reducirende Metall zwar

in einer immerwährenden ununterbrochenen Verbindung mit der Auflösung seyn mufs, dafs es aber nur mit einer kleinen Masse in Berührung kommen darf, welche, sobald das darin enthaltene Metall reducirt ist, von einer neuen geringen Quantität ersetzt wird. Gerade dasselbe findet auch bei der Einwirkung galvanischer Ketten Statt. Auch hier mufs das positive (reducirende) Metall in ununterbrochener Berührung mit der Metallauflösung seyn, und auch hier nur in geringer sich immer ersetzender Quantität. Indem wir nun die Analogie der beiden Fälle weiter verfolgen, erhalten wir einen hinlänglichen Grund, auch bei Einwirkung der galvanischen Ketten das positive (reducirende) Metall als das ursprünglich wirkende anzunehmen, so dafs nämlich von ihm die Reduction ausgeht (Daher man denn auch, wenn man genau darauf achtet, an dem positiven Metall immer etwas von dem aufgelösten reducirt findet, so wie, wenn die galvanische Kette gar nicht angewandt wird, die gänzliche Reduction des aufgelösten Metalles wirklich in der äufsern die Röhre umgebenden Flüssigkeit an dem reducirenden Metall von Statten geht). Weil jedoch die Metallauflösung nur in sehr kleinen Quantitäten zu dem reducirenden Metalle gelangt: so wird auch hier, wie in jenem analogen Fall, das reducirte Metall, wenn ihm eine günstige Stelle dargeboten wird, sich eher hier als an dem reducirenden Metalle selbst krystallinisch anlegen. Eine solche Stelle bietet nun aber das negative Metall wahrscheinlich dadurch dar, dafs sich an demselben der Wasserstoff des zersetzten Wassers, wenn auch in noch so unbedeutender Quantität, darstellt oder darzustellen strebt. Das mit dem positiven Metall in unmittelbarer Berührung gestandene Theilchen der Metallauflösung wird daher durch nähere Verwandtschaft reducirt, legt sich jedoch nicht sogleich regulinisch an, sondern zersetzt vielmehr das angränzende noch aufgelöste, welches dieselbe Wirkung auf das nachbarliche ausübt, und so fort durch die Blase oder das Papier, bis das mit der Spitze des negativen Metalls in unmittelbarer Berührung stehende reducirt wird und sich an dieser Stelle krystallinisch anlegt. Die aufgestellten nothwendigen Erfordernisse zu einer wirksamen Kette sprechen offenbar für die Richtigkeit dieser Ansicht. Doch mögen noch folgende Erfahrungen zur Bestätigung angeführt werden.

Ich setzte (im Juli 1815) essigsaures Blei (unter den angegebenen günstigen Umständen) der Einwirkung einer Eisensilberkette aus. Nach mehreren Stunden sah ich noch keine Spur einer Reduction, und überhaupt nicht

die geringste Veränderung. Dasselbe war der Fall nach 24 Stunden, und selbst nach 2 Tagen. Als ich es aber nach 4 Tagen zufällig wieder betrachtete, nahm ich eine seltsame Erscheinung wahr. Der Silberdrath war nämlich nach wie vor vollkommen rein, ohne eine Spur des reducirten Bleies zu enthalten. Das äufsere Wasser hingegen, welches die Röhre mit der Bleiauflösung umgab, stellte eine trübe rothbraune Auflösung dar, so wie auch die farbenlose Bleiauflösung in der Röhre eine schwache gelbe Farbe angenommen hatte. Ich erkannte bald die äufsere Flüssigkeit als eine Auflösung des essigsauren Eisens *), und war nur erstaunt, kein Blei reducirt zu finden, als ich endlich durch die trübe Auflösung nach dem Eisenstabe sah, und ihn mit den schönsten reducirten Bleiblättern belegt erblickte, deren Durchmesser beinahe $\frac{1}{3}$ Zoll betrug. Diese Erscheinung findet in dem Angegebenen ihre vollkommene Erklärung. Das Eisen nämlich ist im regulinischen Zustande durchaus unfähig, das Bleisalz zu reduciren, so wie mehrere andere Metallsalze, von denen wir in der Folge sprechen wollen), und vermag es nur dann, wenn es in der wässerigen Auflösung desselben sich oxydirt hat; aber ehe dies in dem angeführten Falle geschehen war, ist der gröfste Theil des in der Röhre enthaltenen essigsauren Bleies (durch die Blase) in die äufsere Flüssigkeit übergegangen; das oxydirte Eisen wirkt daher gleichsam auf eine concentrirte Auflösung, und das reducirte Blei legt sich unmittelbar an dasselbe an, weil es theils durch die Concentration, theils durch das sich zugleich bildende und nur mechanisch aufgelöste Eisenoxyd verhindert wird, durch wechselseitige Auflösung und Reduction bis zu dem negativen Metall zu gelangen. Wäre hingegen, wie man gewöhnlich bei der Wirkung einer galvanischen Kette annimmt, die Reduction unmittelbar Wirkung des negativen Metalls (zufolge des daselbst frei gewordenen Wasserstoffs): so wäre der Grund nicht einzusehen, warum bei dem angeführten Versuch nicht eine Spur von Blei durch die wirksame Eisensilberkette reducirt werden konnte? Wollte man aber aus der angeführten Erscheinung bei der Wirkung der galvanischen Kette gerade umgekehrt sich berechtigt glauben, die im zweiten Abschnitt untersuchte Reduction eines Metalles durch ein anderes, der dort angegebenen Gründe ungeachtet, als galvanische Wirkung zu betrachten, um gleiche Wirkung aus einer gleichen

*) Von derselben war auch etwas durch die Blase in die Röhre gedrungen, wie dies bei dergleichen Umständen oft der Fall ist.

gleichen Ursache zu erklären: so wollen wir gern zugestehen, dafs das, was wir oben durch Krystallisationsanziehung allein zu erklären strebten (weil wir die Nothwendigkeit der auf galvanische Wirksamkeit gebauten Erklärungsweise ausschliefsen wollten), noch besser erklärbar ist, wenn man die galvanische Action, welche zwischen dem reducirenden und dem bereits reducirten Metall Statt findet, zu Hülfe nimmt. Und es ist auch in der That eben so wenig zu zweifeln, dafs die galvanische Action das Anlegen des regulinisch ausgeschiedenen Metalles an dem bereits reducirten befördert und unterstützt, als es gewifs ist, dafs durch das reducirende Metall, durch das ausgeschiedene Metall und durch die Flüssigkeit wirklich eine galvanische Kette gebildet wird. Nur kann dort die galvanische Action unmöglich eine so selbstständige Rolle spielen, als bei der gegenwärtig von uns untersuchten Metallreduction durch galvanische Ketten; weil (um zu den oben aufgestellten Gründen noch einiges hinzuzufügen) in vielen Fällen die Metallreductionen, welche durch unmittelbare Einwirkung des reducirenden Metalles entstehen, an einem ganz entgegen gesetzten Ende erfolgen müssen, als wo sie wirklich erfolgen. Betrachten wir z. B. den von v. Grotthufs angegebenen Versuch, wo über salpetersaures Kupfer salpetersaures Silber geschichtet und ein Kupferstab eingesenkt wird. Ist das Kupfersalz von der oben angegebenen Beschaffenheit, so wird sich am dem Silberbäumchen ein Kupferbäumchen anlegen, welches sich in die Kupferauflösung hinein verlängern wird. Wäre nun das Anlegen des ausgeschiedenen Metalls an dem bereits reducirten einzig und allein die Wirkung der galvanischen Kupfersilberkette: so würde zwar der Grund von dem Wachsthum des Silberbäumchens, so wie von der Reduction der ersten Kupfertheilchen, vollkommen erklärbar, aber von dem Fortwachsen des Kupferbäumchens in der Kupferauflösung wäre kein Grund einzusehen. Denn mit der Bildung der ersten Kupfertheilchen ist von neuem eine galvanische Kette, Silberkupfer nämlich, entstanden, welche, der Richtung nach, der ersten Kupfersilberkette entgegen ist, indem bei der zuerst gebildeten Kette der negative Pol nach unten, bei der später gebildeten hingegen nach oben hervortritt. Wenn also noch ferner diese Ketten wirksam sind: so könnte es nur in der Mitte des Silberbäumchens seyn, keinesweges aber an dem neu gebildeten Kupferbäumchen. Noch deutlicher zeigt sich dies, wenn man den Versuch in der Art anstellt, dafs man über einer Bleiauflösung eine von Silber bildet, und in diese ein Bleistäbchen steckt. In diesem Falle wird sich nämlich die Blei-

egetation an die des Silbers ansetzen und in die Bleiauflösung sich verbreiten, obgleich durch die ersten Bleiblättchen eine galvanische Kette sich gebildet hat, deren negativer Pol nach oben gekehrt ist, und die Reduction sich nicht an dem positiven Blei anlegen sollte.

Es wurde vorher von einer Ausnahme gesprochen, welche bei der Untersuchung über die zweite Bedingung sich ergeben hat. Es ist daher nöthig, dafs wir darauf zurück kommen. Es wird nämlich das salpetersaure Silber von einer Zinkplatin- oder Kupferplatinkette selbst dann reducirt, wenn die leitende Verbindung der Auflösung mit der das positive Metall umgebenden Flüssigkeit durch Metall (einen Platindrath) hergestellt ist, obgleich diese Reduction äufserst langsam und in sehr geringem Grade von Statten geht. Wir glauben jedoch dieser einzigen Ausnahme wegen die aufgestellte Bedingung dennoch nicht aufgeben zu müssen, sondern sind geneigt, diese Reduction des Silbers daraus zu erklären, weil die edlern Metalle überhaupt, und das salpetersaure Silber insbesondere, sich so leicht durch Licht und Wärme von selbst reduciren. Daher denn die geringe Quantität Wasserstoff, welche sich am negativen Pol darstellt, vollkommen hinreichend ist, eine geringe Reduction zu bewirken. Wahrscheinlich wird derselbe Erfolg bei dem Gold- und Platinsalze, und vielleicht auch bei den Quecksilbersalzen, aber auch nur bei diesen, Statt finden; hingegen bei den übrigen, nicht ohne eine andere Substanz regulinisch darzustellenden Metallen, wird eben so wenig, wie bei den Blei- Zinn- und Kupfersalzen, irgend eine Reduction erfolgen, wenn die Leitung durch ein Metall geschieht, oder, was dasselbe ist, wenn das reducirende positive Metall nicht in unmittelbare Berührung mit der Metallauflösung gesetzt wird.

Wenn nun die bisherigen Untersuchungen uns zu dem Schlusse berechtigen, dafs auch bei Metallreductionen durch galvanische Ketten (aus zweien Metallen und einer wässerigen Flüssigkeit) in der nähern chemischen Verwandtschaft des reducirenden positiven Metalles der ursprüngliche und wesentliche Grund derselben liege, während allerdings es einer galvanischen Action (dem am negativen Pol frei werdenden Wasserstoff) mit zuzuschreiben ist, dafs das regulinisch dargestellte in krystallinischer Gestalt an dem negativen Metall sich anlegt: so dürfen wir uns schmeicheln, die drei verschiedenen Arten, wie die Reductionen der Metalle nach dem gegenwärtigen und den beiden vorhergehenden Abschnitten

erfolgen, unter einen einfachen Gesichtspunkt, nämlich, unter den der nähern Verwandtschaft, gebracht zu haben, wobei wir jedoch in dem letzten Falle eine wesentliche und in den beiden ersten Fällen eine mehr oder weniger befördernde Mitwirkung des Galvanismus nicht haben absprechen können.

Schluſs.

Zum Beschlusse dieser Abhandlung wird es zweckmäſsig seyn, einige Worte über die Bedeutung des Ausdrucks chemische Verwandtschaft zu sagen. Denn indem wir sie in den bisherigen Untersuchungen zum Erklärungsgrunde der Metallreductionen gemacht haben, haben wir (nach den gewöhnlichen Begriffen) sie in die verhältniſsmäſsig gröſsere Oxydirbarkeit des reducirenden Metalles, als des aufgelösten, und somit in dessen nähere Verwandtschaft zum Sauerstoff gesetzt; und doch haben wir an mehreren Stellen Manches aufgestellt, was einer solchen Verwandtschaft widerspricht. Und gehe man doch überhaupt die Grundsätze einzeln durch, nach welchen jene nähere Verwandtschaft des reducirenden Metalls zum Sauerstoff, woraus man bisher die Reduction der Metalle einzig und allein erklärt hat, genauer zu bestimmen versuchen möchte: immer wird man auf widersprechende Erscheinungen stoſsen. So z. B. wenn wir die nähere Verwandtschaft nach Berthollet in die Quantität Sauerstoff setzen wollen, welche die Metalle verdichten können, ohne in Säuren überzugehen: so müſsten auſser Eisen auch (der Arsenik) der Spieſsglanz und das Zinn den Zink aus den Auflösungen reduciren, nicht aber umgekehrt der Zink die drei letzten Metalle, weil alle diese Metalle sich mit mehr Sauerstoff verbinden können als der Zink; und aus gleichem Grunde müſste das Blei durch das Zinn reducirt werden können. Auf dieselben Widersprüche stöſst man, wenn man die nähere Verwandtschaft nach der Quantität des Sauerstoffs bestimmen will, mit welchem die Metalle sich durch Einwirkung der Salpetersäure verbinden. Aber auch der Grad der Leichtigkeit, mit der die Metalle sich mit Sauerstoff verbinden, kann keinen Maaſsstab für die nähere Verwandtschaft angeben; denn nach Thomson's richtiger Bemerkung verliert der Arsenik in sehr kurzer Zeit seinen Glanz in der freien Luft, und dennoch ist seine Verwandtschaft zum Sauerstoff nicht so groſs als die des Zinnes, welches Jahre lang der Luft

ausgesetzt seyn kann, ohne seinen Glanz zu verlieren *). — Wenn wir aber auch diese Schwierigkeiten unberücksichtigt lassen wollen, so wird man doch zugeben, dafs es für die Einsicht in die Natur der chemischen Verwandtschaft sehr wichtig ist, ob man einen Einfluſs des Auflösungsmittels auf die Reduction annimmt oder nicht. Man war bisher geneigt, diesen Einfluſs zu leugnen, und hat daher angenommen, dafs wenn ein Metall im Stande sey, ein anderes aus seiner Auflösung *a* zu reduciren: so wirke es auch, wenn dieses in der Substanz *b* aufgelöst ist. Die von Klaproth zuerst bekannt gemachten Reductionen einiger Metalle aus ihren alkalischen Auflösungen, welche nach denselben Gesetzen wie bei den Auflösungen in Säuren erfolgen, scheinen vorzüglich diese Ansicht bestätigt zu haben. Da jedoch mehrere Erscheinungen bekannt waren, welche uns deutlich darthun, dafs die nähere Verwandtschaft des reducirenden Metalles nicht immer dieselbe ist, wenn das darzustellende Metall in verschiedenen Auflösungsmitteln enthalten ist: so hat man angenommen, dafs aufser der nähern Verwandtschaft zum Sauerstoff auch noch die Auflöslichkeit des reducirenden Metalles in demselben Menstruum, in dem das darzustellende Metall enthalten ist, als Bedingung zur Reduction festgesetzt werden müsse: eine Regel, die wieder ihre Ausnahmen hat. Endlich könnte man noch eine Erfahrung, welche wir bei den durch (frischen) Eisenvitriol bewirkten Reductionen des Goldes und Silbers gemacht haben, als Erklärungsgrund mancher Anomalien betrachten wollen, und daher geneigt seyn, als allgemeines Gesetz anzunehmen, dafs ein bestimmtes Metall nur in einem gewissen Zustande der Oxydation ein anderes zu reduciren vermöge, während bei einem andern Zustande nicht nur diese Fähigkeit wegfalle, sondern sogar umgekehrt das reducirte Metall dem aufgelösten das Menstruum entziehen und sich von neuem darin auflösen könne (ohne jedoch das aufgelöste eigentlich reducirende zu desoxydiren). Aber alle diese Angaben sind weder einzeln noch auch verbunden im Stande, das Verhalten der Metalle in Hinsicht ihrer Reduction auf nassem Wege vollkommen zu erklären. Wir erinnern in dieser Hinsicht auf die längst (schon seit Bergmann) bekannte Eigenschaft des Eisens, das Silber aus seiner Auflösung in Salpetersäure nicht reduciren zu können. Es ist über diese Erscheinung eine kleine sorgfältige Arbeit von Keir (1790) erschienen **),

*) System der Chemie I. S. 365.

**) Versuche und Beobachtungen über die Auflösung der Metalle in Säuren u. s. w., von James Keir; übersetzt von Lentin. Göttingen 1791.

woraus als Resultat hervorging, dafs sowohl Bergmann's als Kirwan's Ansicht über das Verhalten des Eisens zur Silberauflösung falsch sey, und dafs zwar das regulinische Eisen als solches das Silber nicht reduciren könne, wohl aber, wenn es in schwachem Grade durch die freie Säure der Silberauflösung oxydirt ist *). Ich habe diese Versuche von neuem angestellt, und vollkommen bestätigt gefunden, dafs regulinisches Eisen, so lange es in diesem Zustande bleibt, den Silbersalpeter nicht zu zersetzen im Stande sey, wohl aber, wenn es oxydirt ist. Daher auch in der wässerigen Auflösung eines vollkommen neutralen salpetersauren Silbers nach langer Zeit allerdings Reduction erfolgt, wie Bergmann und Keir gefunden haben würden, wenn sie das Eisen mit der Silberauflösung beim freien Zutritt der atmosphärischen Luft nicht blofs einige Stunden, sondern Tage lang in Berührung gelassen hätten. Demnach kann die Reduction durch die Verdünnung der Silberauflösung mit Wasser sehr befördert werden, so dafs oft schon nach 24 Stunden und noch früher die Reduction des Silbers erfolgt, in so fern nämlich alsdann die Oxydation des Eisens auch früher eintritt. Dafs aber das Verhalten des Eisens wirklich darin seinen Grund hat, dafs es nicht im regulinischen, wohl aber im oxydirten Zustande das salpetersaure Silber zu reduciren vermag, ergiebt sich besonders daraus, dafs es in einer Auflösung dieses Silbersalzes in Alkohol nicht die geringste Veränderung hervorbringt, und durchaus keine Oxydation erleidet. Ich habe vor mir ein Stöpselglas, in dem schon seit mehr als drei Monaten Eisendräthe in einer solchen salpetersauren Silberauflösung in Alkohol aufbewahrt sind, ohne dafs eine Spur von reducirtem Silber oder von Oxydation des Eisens sichtbar wäre. Dagegen stellt sich aus dieser Alkoholauflösung schnell das Silber regulinisch dar, wenn es auf schwach oxydirtes (gerostetes) Eisen gegossen wird. Wie will man aber diese Erscheinung erklären, wenn man bedenkt, dafs eben dieses salpetersaure Silber durch Zink, Blei, Zinn, Kupfer und Quecksilber, und zwar in dem Grade schneller und vollkommener zersetzt und regulinisch dargestellt wird, je reiner dies Metall von aller Oxydation angewandt worden? Man könnte zunächst glauben, den Grund in der Salpetersäure suchen zu müssen, indem diese mit dem Eisen keine beständige und unveränderliche Auflösung zu bilden im Stande sey (obwohl es noch immer nicht einzusehen wäre, wie bei einer Oxydation des Eisens diese Störung gehoben werde, oder wie das Zinn diese Reduction be-

*) Keir sagt dies nur mit andern Worten im Geiste der damaligen phlogistischen Chemie.

wirken könne, da es sich fast gar nicht mit der Salpetersäure verbinden kann). Dieser Ansicht widerspricht aber die leichte Ausscheidung des Kupfers durch das Eisen aus seiner Auflösung in Salpetersäure. Wollte man aber die Ursache in dem Silber suchen, welches aus irgend einer unbekannten Ursache (vielleicht wegen der schweren Legierung mit dem Eisen) in regulinischer Gestalt vom Eisen sich nicht scheiden lasse: so ist gegen diese Annahme die Leichtigkeit, mit welcher das Silber durch regulinisches Eisen aus seiner Verbindung mit der Schwefel- und Salzsäure, selbst mit der Essigsäure, reducirt wird. Ja die Wirkung des Eisens auf (geschmolzenes) salzsaures Silber (Hornsilber) ist so stark, dafs, wie ich bereits vor längerer Zeit dargethan habe *), die Reduction desselben bei der blofsen Berührung des metallischen Eisens mit einem Stück Hornsilber vor sich geht. Man findet nämlich nach einiger Zeit (oft schon nach einigen Minuten), dafs da, wo das Hornsilber das Eisen berührte, das erste Punkte von metallischem Silber, und das zweite Spuren einer sich bildenden Flüssigkeit (salzsaures Eisen) zeigte. Nach längerer Zeit hingegen ist das ganze Hornsilber in Silber verwandelt, ohne die Gestalt verändert zu haben, und das Eisen hat sich in der Salzsäure (im flüssigen Zustande) aufgelöst. Endlich entgeht man auch dadurch den Widersprüchen nicht, wenn man das Verhalten des Eisens zu dem salpetersauren und salzsauren Silber (das zu dem essigsauren und schwefelsauren unbeachtet lassend) daraus zu erklären sucht, dafs man nach Davy's Ansicht in dieser Verbindung das Silber, so wie auch das Eisen, in dem gebildeten salzsauren Eisen, in metallischem Zustande betrachtet, und daher hier die Reduction des Silbers durch die nähere Verwandtschaft des metallischen Eisens zur Säure (*Chlorine*) begreiflich findet, während sie beim salpetersauren Silber aus dem Grunde nicht Statt finden soll, weil bei diesem aufser einer nähern Verwandtschaft zur Säure auch eine zum Sauerstoff vorhanden seyn müsse. Es wäre nämlich bei dieser Erklärungsweise nicht einzusehen, warum das Eisen durchaus unvermögend seyn soll, das salzsaure Zinn zu zersetzen, wovon ich mich durch vielfache Versuche überzeugt habe, indem ich sowohl vollkommen reines als auch schwach oxydirtes Eisen mit den verschiedensten Zinnauflösungen in Berührung brachte; und eben so wenig wäre 2) zu begreifen, warum Zinn und Kupfer ohne alle Wirkung auf trockenes Hornsilber bleiben, da doch das salpetersaure, wie bekannt, so leicht zersetzt wird, und zwar ohne Unterschied, es mag nun das Silbersalz

*) S. Gilbert's Annalen der Physik, Jahrgang 1812. S. 230.

in Wasser oder Alkohol aufgelöst seyn, oder auch als trockenes Salz (Silberkrystalle) mit Zinn und Kupfer in Berührung gebracht werden *). Endlich 3) bleibt es immerhin unbegreiflich, warum das Eisen, so lange es regulinisch ist, auch die Bleisalze (essigsaures und salpetersaures Blei) nicht reducirt. Alles dies, was gegen die bisherigen Erklärungsversuche gesagt worden ist, deutet zwar dahin, dafs der Grund dennoch im Eisens gesucht werden mufs, aber nicht in dem Sinne Bergmann's, in der zufälligen Beimischung fremder Substanzen, welche mit dem Eisen sich verbinden, d-, wie Keir richtig bemerkt, jedes Eisen dieselbe Erscheinung hervorbringt, sondern in der Natur, in der chemischen Verwandschaft des Eisen selbst. Und dieses mag genug seyn, um dann die Bemerkung anzuschliefsen, dafs es manche Erscheinungen giebt, die nach den bisherigen bekannten Gesetzen der chemischen Verwandtschaft nicht erklärt werden können, aber noch viel weniger als galvanische Wirkungen betrachtet werden dürfen: eine Bemerkung, zu der man auch sonst noch bei den Metallreductionen auf nassem Wege Gelegenheit genug findet. Wir müssen es daher nur eingestehen, dafs wir über diesen Zweig des chemisches Processes, trotz der mannigfaltigen Bearbeitung, besonders in technischer Hinsicht, noch keinesweges im Klaren sind, und dafs es sich wohl verlohnen möchte, diesen Gegenstand einer sorgfältigen Prüfung zu unterwerfen, da die Resultate derselben von eben so grofsem Einfluss für die gesammte Chemie als für die Lehre zom Galvanismus seyn würden.

Auch in einer andern Hinsicht sind noch Untersuchungen übrig, die den vorliegenden Gegenstand betreffen. Denn was die Wirkung der galvanischen Säule in Rücksicht der Metallreductionen anbetrifft; so habe ich meine kaum angefangenen Versuche bis jetzt noch nicht fortsetzen können, und doch läfst sich erwarten, dafs wir durch Versuche mit der galvanischen Säule über Manches von dem Aufgestellten nähern Aufschlufs erhalten werden. So viel glaube ich jedoch nach den dargestellten Versuchen annehmen zu dürfen, dafs im Allgemeinen durch jede galvanische Säule, in wie fern sie die Zersetzung des Wassers bewirkt, auch die Metallreduction am negativen Pol erfolgen wird, weil die Metalle unmittelbar durch den sich entwickelnden Wasserstoff regulinisch ausgeschieden werden, und dafs daher auch dieser Erfolg im genauen Verhältnifs mit der Wasserzersetzung stehen

*) In dem letztern Zustande wird es auch (eben so wie im aufgelösten) durch Zink und weniger durch Blei reducirt.

wird. Aufserdem aber wird der Grad der Reduction von dem Verhalten des aufgelösten Metalles zu den brennbaren Stoffen und namentlich zu dem Wasserstoff abhängen. Daher denn auch durch manche galvanische Säule ein Metallsalz weniger und langsamer reducirt wird, als durch eine (für diesen Fall) wirksame Kette, während dieselbe Säule ein anderes mit grofser Schnelligkeit regulinisch darstellt, wie es keine einfache Kette zu bewirken vermag. Ich hoffe bei günstiger Mufse über diese Gegenstände meine Untersuchungen weiter führen zu können, und werde es mir zur gröfsten Ehre anrechnen, wenn es mir erlaubt seyn sollte, die zu erhaltenden Resultate ebenfalls Einer Erlauchten Akademie vorlegen zu dürfen.

Ueber-

Uebersichtliche Darstellung

der

verschiedenen natürlichen Abtheilungen der Krystallisationssysteme.

Von Herrn C. S. Weiss *).

Wenn die natürlichen Abtheilungen der verschiedenen Krystallisationssysteme in einer Verschiedenheit in den elementarsten Grundlagen und Keimen der Gestalt zu suchen und wirklich in einer solchen aufzufinden sind, wenn Gleichheit oder Ungleichheit den gröfstmöglichen Unterschied innerhalb eines Abzutheilenden überhaupt gewährt: so wird zuförderst, das reguläre System den nicht-regulären entgegenzustellen, der schicklichste Ausgangspunkt für die Entwickelung der natürlichen Abtheilungen der Krystallisationssysteme seyn.

A. Reguläres (sphäroëdrisches) System.

Der gewöhnliche Name regulär für die Körper dieses ersten Systemes ist freilich nicht ganz passend; denn auch die ihm entgegenzusetzenden sind nichts weniger, als ohne Regel und strenges Gesetz; der wahre Unterschied Beider, aufs tiefste verfolgt, beruht vielmehr auf einem Verschiedenwerden, auf einer Differenzirung gewisser Glieder, Stellen und Richtungen

*) Vorgelesen den 14. December 1815.

in den nicht-regulär genannten Systemen, welche in dem sogenannten regulären gleich unter sich, oder indifferent sind. Es eröffnet sich daher (da die Abweichungen ins Unendliche gehen können) eine vorläufig unabsehliche Mannichfaltigkeit von Besonderheiten und Eigenthümlichkeiten für die vom regulären abweichenden Systeme, während das reguläre eine in sich geschlossene unveränderliche Einheit bildet.

Der Name tessular, welchen man dem regulären Systeme auch giebt, ist besser; jedoch zeichnet er das Würfliche als charakteristisch für das System stärker aus, als er sollte; etymologisch gar nur das Viereckige, und dann allzuwenig bezeichnend. Noch besser würde der Name kugliches oder Kugelsystem, griechisch sphäronomisches oder sphäroëdrisches System gebraucht werden können. Denn die Gleichheit nach drei Hauptdimensionen, so wie nach allen Richtungen, welche gegen diese drei gleiches Verhältnifs haben, giebt jedem Körper dieses Systemes, von welchen geradlinigen Flächen er auch begränzt seyn mag, eine entschiedene Aehnlichkeit mit der Kugel; seine gleichnamigen, unter sich gleichen Stellen liegen nach drei Dimensionen vom Mittelpunkt aus gleichmäfsig, und fallen allemal in eine und dieselbe Kugelfläche; so die Ecken des Octaëders, die Ecken des Würfels, des Tetraëders u. s. f. Die in der weiteren Ausbildung des Systemes sich einfindenden Abänderungen machen sichtliche Annäherungen der einfachern Hauptkörper des Systemes zur Kugel; die Kugel selbst erscheint als Gränze, welcher die krystallinischen Bildungen des Systemes, obgleich es das Gesetz des Geradlinigen und Geradflächigen ist, welches der krystallinischen Gestalt zum Grunde liegt, sich doch ins Unendliche annähern können, während in seinen einfacheren Hauptkörpern, bei Gleichheit dreier unter sich rechtwinklicher Dimensionen, eben jenes Gesetz der krystallinischen Gestalt die gröfstmögliche Abweichung von der Kugel einsetzte.

Man könnte noch hinzufügen, dafs in gleichem Sinne, wie die Kugel die (unerreichbare) Gränze für die Bildungen des regulären Systemes ist, eben so jedes andere System einen bestimmten, von der Kugel abweichenden Körper, d. i., das Wort in seiner allgemeinsten Bedeutung genommen, ein bestimmtes Sphäroïd zu seiner Gränze hat.

In Uebereinstimmung mit den Namen, welcher wir uns bei den übrigen Abtheilungen, als der natürlichsten Benennungen für sie, bedienen werden, könnte auch der Name gleichgliedriges System zur Bezeichnung

des regulären empfohlen werden. Vielleicht möchte man um des Wohllautes willen den Namen gleichaxig (und ihm gegenüber ungleichaxig) dem: gleichgliedrig, vorzuziehen geneigt seyn; schicklich ist er in alle Wege, da er sich auf die Gleichheit dreier unter sich senkrechter Axen bezieht, aus welcher die Gleichheit der übrigen Glieder folgt, so wie, wenn die Axen verschieden sind, auch die übrigen Glieder ungleich werden, welche im ersten Falle gleich sind. Ich werde in dieser Abhandlung die so eben vorgeschlagenen Namen gleichgeltend gebrauchen, auch vorläufig mich eben so der früher üblichen, welche verdrängen zu wollen meine Absicht nicht ist, eines wie des andern bedienen.

Das gleichgliedrige, sphäroëdrische System also ist um so schicklicher von vorn herein den ungleichgliedrigen, ungleichaxigen entgegenzustellen, als es der gemeinsame Vergleichungspunkt für diese alle bleibt, und als die Eigenthümlichkeiten eines jeden der letzteren im directen Gegensatz gegen die Eigenschaften von jenem sich entwickeln lassen.

Sein eigentlicher Grundcharakter ist, wie oben schon angedeutet wurde, dieser: drei Dimensionen gleich und rechtwinklich unter sich; oder, mehr physikalisch ausgesprochen: Gleichheit des Gestaltungsactes in diesen drei Dimensionen. Seine Hauptkörper sind: der erste, das reguläre (oder gleichaxige, gleichgliedrige) Octaëder *); der zweite, das Gegenstück von jenem, der Würfel; der dritte, eine gewisse (nicht mechanische, sondern dynamische) Mitte zwischen beiden, das Granatoëder **).

*) Man darf dies auch vorzugsweise, wenigstens wo kein Mifsverständnifs zu fürchten ist, das Octaëder schlechtweg nennen. Der deutsche Name Achtflachner scheint mir sehr gut und vollkommen zu billigen.

**) Der gewöhnlichste mineralogische Name ist: Granat-Dodekaëder, sehr glücklich von der vorherrschenden Krystallform des Granates, und den zwölf (unter sich gleichen) Flächen, welche den Körper begränzen, hergenommen. Beim öfters wiederkehrenden Gebrauch ist es gut, ihn in Granatoëder zusammenzuziehen; ein Name, der in allen Sprachen verständlich, und daher für den wissenschaftlichen Gebrauch überall geeignet ist. Der deutsche, dem obigen ähnlich gebildete, Name würde, zuerst ausführlich, seyn: Granat-Zwölfflächner, kurz: Granatflächner; statt dessen, eben so gut: Granatkörper.

Der mehr geometrische Name: Rhomben-Dodekaëder (richtiger als Rhomboïdal-Dodekaëder), ist entbehrlich; zwar ist er allerdings brauchbar und bezeichnend, jedoch dieses nicht vollständig; denn alle von zwölf Rhomben begranzte Körper könnten auf ihn Anspruch machen, und nicht blofs dieser, welcher die besondere Eigenschaft und Bedingung hat: dafs alle seine zwölf Rhomben unter sich gleich und ähnlich sind. Und

Die übrigen Körper sind abgeleitetere. Wir können von diesen natürlichen Körpern, welche insgesammt von lauter gleichen und ähnlichen Flächen begränzt werden, hier nur eine allgemeine Uebersicht geben.

Der erste unter ihnen ist der Leucitkörper *) oder das Leucitoëder, welchen man auch als den vierten Hauptkörper des Systemes betrachten könnte. Seine Flächen sind die geraden Abstumpfungen der Kanten des Granatoëders, und liegen zugleich zwischen den Würfelflächen und Octaëderflächen; es sind 24 gleiche und ähnliche symmetrische Trapezoïde **), mit ihren stumpfen ebnen Winkeln zu je drei in die acht stumpfen Ecken des Körpers, welche den Würfelecken, mit ihren scharfen ebnen Winkeln zu je vier in die sechs scharfen Ecken des Körpers, welche den Octaëderecken correspondiren und mit ihren mittleren ebnen Winkeln auch zu je vier in die zwölf mittleren Ecken des Körpers vereinigt, welche den Mitten der Flächen des Granatoëders entsprechen. Die Längendiagonale des Trapezoïds wird von der Queerdiagonale im dritten Theil ihrer Länge durchschnitten, oder von ihr in zwei Stücke getheilt, welche sich verhalten

solcher Körper giebt es allerdings nur diesen Einen: nämlich den, wo das Verhältnifs der Diagonalen des Rhomben ist, wie 1 zu $\sqrt{2}$.

*) Ich bezeichne diesen Körper am liebsten mit dem obigen Namen, welcher von dem des Fossils entlehnt ist, welches vorzugsweise diese Krystallform zeigt, und welches den Namen Leucit trägt. Es ist der Körper, welchem Hr. Haüy den Namen Trapezoïdalkörper, *solide trapézoïdal*, gegeben hat, weil seine Flächen 24 gleiche und ähnliche symmetrische Trapezoïde sind; welches alles dieser Name freilich nur unvollkommen bezeichnet.

Der Name Ikositetraëder (Vierundzwanzigflächner), welchen man auch für ihn vorgeschlagen hat, kann nicht für ihn als Spezialname dienen, da er jedem von 24 (und, wenn man will, gleichen und ähnlichen) Flächen begränzten Körper in gleichem Grade gebührt; anderer Inconvenienzen, welche dieser Name hat, hier nicht zu gedenken.

**) Ein symmetrisches Trapezoïd ist jedes, welches durch eine seiner Diagonalen in zwei gleiche und ähnliche ungleichseitige Dreiecke, und durch die andere in zwei gleichschenkliche Dreiecke von gleichen Grundlinien und verschiedenen Höhen getheilt wird. Jene nenne ich die Längendiagonale, diese die Queerdiagonale. Beide schneiden sich jederzeit rechtwinklich; die Längendiagonale theilt die Queerdiagonale jederzeit in gleiche, die letztere die erstere dagegen in ungleiche Theile. Die an der Längendiagonale anliegenden Winkel des Trapezoïds sind jederzeit verschieden; den stumpferen von ihnen nenne ich im allgemeinen den stumpfen, den schärferen den scharfen eines solchen Trapezoïds; die an der Queerdiagonale anliegenden Winkel sind jederzeit gleich; ich nenne sie die mittleren des Trapezoïds, ihr Gröfsenverhältnifs gegen die an der Längendiagonale anliegenden mag seyn, welches es will. Die Seiten eines symmetrischen Trapezoïds sind immer je zwei und zwei sich gleich, aber zwei benachbarte, nicht zwei gegenüberliegende, wie beim Parallelogramm.

wie 1 zu 2 (während die Queerdiagonale, wie in jedem symmetrischen Trapezoïd, von der Längendiagonale in gleiche Theile getheilt oder halbirt wird). Das Verhältnifs der Längendiagonale zur Queerdiagonale ist am Leucitkörper, wie $3\sqrt{3} : 2\sqrt{8} = \sqrt{27} : \sqrt{32}$.

Ich nenne Leucitoïde alle ebenfalls von 24 unter sich gleichen und ähnlichen symmetrischen, aber andern Trapezoïden, als die vorigen, eben so geordnet, begränzte, also dem Leucitkörper oder Leucitoëder ähnelnde, aber von ihm abweichende natürliche Körper dieses Systemes *); ich nenne sie stumpfe Leucitoïde, wenn ihre 6 den Octaëderecken entsprechenden Ecken stumpfer sind, als die am Leucitoëder selbst; ich nenne sie scharfe Leucitoïde, wenn eben diese Ecken schärfer sind, als am Leucitoëder. Die Flächen der stumpferen Leucitoïde liegen alle zwischen den Würfelflächen und denen des Leucitoëders, die Flächen der scharfen Leucitoïde alle zwischen den Octaëderflächen und den Flächen des Leucitoëders.

Pyramiden-Würfel nenne ich die durch Zuschärfung der Würfelkanten entstehenden Körper, oder Würfel, welche auf ihren Flächen mehr oder minder niedrige, von gleichen Flächen gebildete vierseitige Pyramiden tragen; ihre Flächen, an der Zahl wiederum 24, der Art nach gleichschenkliche (und unter sich gleiche und ähnliche) Dreiecke, liegen zwischen den Würfelflächen und denen des Granatoëders **).

Pyramiden-Octaëder nenne ich die durch Zuschärfung der Octaëderkanten entstehenden natürlichen Körper, d. i. Octaëder, welche auf ihren Flächen mehr oder minder stumpfe, von gleichen Flächen gebildete dreiseitige Pyramiden tragen; ihre Flächen, der Zahl nach abermals 24, der Art nach wiederum gleichschenkliche, gleiche und ähnliche Dreiecke, liegen zwischen den Octaëderflächen und den Flächen des Granatoëders ***).

Pyramiden-Granatoëder nenne ich eben so die durch Zuschärfung der Kanten des Granatoëders entstehenden natürlichen Körper; es sind

*) Die Leucitoïde haben, wie man sieht, gleichen Anspruch auf den von Hrn. Haüy dem Leucitoëder gegebenen Namen Trapezoïdalkörper; eben deshalb kann diese Benennung unserm Leucitkörper nicht füglich als Specialname beigelegt werden.

**) Der Endspitzenwinkel des gleichschenklichen Dreiecks ist jederzeit gröfser, als beim Granatoëder, wo er 76° 31′ 43,″6 beträgt, und kleiner, als 90°.

***) Der Endspitzenwinkel des gleichschenklichen Dreiecks am Pyramiden-Octaëder ist jederzeit gröfser, als der entsprechende Winkel am Granatoëder, welcher 109° 28′ 16,″4 beträgt, und kleiner, als 120°.

Granatoëder, welche auf ihren (rhombischen) Flächen mehr oder minder niedrige, von gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Dreiecken gebildete vierseitige Pyramiden tragen *); die Zahl der Flächen ist 48; sie liegen zwischen den Granatoëderflächen und denen des Leucitoëders.

Alle anderen Körper, welche in dem sphäroëdrischen Systeme möglich sind, und von lauter gleichen und ähnlichen Flächen begränzt werden, sind — vorausgesetzt, dafs die Flächen einerlei Art, so viele ihrer in dem Systeme möglich, auch alle gleichen Antheil an der Bildung des Körpers nehmen — ohne Ausnahme Acht-und-vierzig-Flächner. Die Zahl 48 ist im allgemeinen die, welche im gleichgliedrigem Systeme die Zahl möglicher Flächen gleichen Werthes ausdrückt; und sie reducirt sich, durch ein Gesetz des Zusammenfallens Mehrerer in Eine, in den Fällen, wo ein Körper von geringerer Anzahl der Flächen in diesem Systeme gebildet wird, auf die geringeren Zahlen 24, 12, 8, 6, 4. Der Grund dieses allgemeinen Gesetzes zeigt sich leicht darin: dafs gegen drei gegebene, unter sich gleiche und rechtwinkliche Dimensionen die Lage einer Ebne von gegebenem Verhältnifs gegen sie, um der Gleichheit der Dimensionen willen, im allgemeinen 48 (d. i. $6 \cdot 2^3$) mal abgeändert werden kann; und es umfafst daher auch die allgemeine Theorie dieser Körper die der einfacheren des regulären Systemes mit in sich.

Die 48 Flächen eines solchen Körpers sind jederzeit ungleichseitige Dreiecke **), je 8 um eine Octaëderecke, je 6 um eine Würfelecke, je 4 um eine dritte Ecke vereinigt, welche zwischen je 2 Octaëderecken sowohl, als zwischen je zwei Würfelecken fällt, und welche den mittleren Ecken des Leucitkörpers, oder auch der Endspitze der vierseitigen Pyramide am Pyramiden-Granatoëder correspondirt; denn das Pyramiden-Granatoëder selbst ist einer dieser Achtundvierzigflächner. Die Ecken eines solchen Körpers sind also insgesammt nur der angegebenen dreierlei Art, entsprechend den dreierlei Ecken des Leucitkörpers und der Leucitoïde; eine jede Ecke

*) Der Endspitzenwinkel der vierseitigen Pyramide, welche auf der Fläche des Granatoëders getragen wird, ist jederzeit der gröfseste im ungleichseitigen Dreieck, welches die Fläche bildet; er ist jederzeit gröfser, als der mittlere ebne Winkel im symmetrischen Trapezoïd des Leucitkörpers, welcher 82° 15′ 2,″ 28 beträgt, und kleiner, als 90°.

**) Dies ist eine Folge davon, dafs nach dem Gesetz der krystallinischen Structur jede wirkliche Krystallisationsebne in rationalem Verhältnifs gegen die ihr zum Grunde liegenden Dimensionen steht.

von lauter gleichen ebnen Winkeln gebildet. Eben so sind die Kanten des Körpers dreierlei Art, entsprechend den dreierlei Seiten des ungleichseitigen Dreiecks; zwei dieser Kanten entsprechen wiederum den zweierlei Kanten am Leucitkörper (der längeren, schärferen, und der kürzeren, stumpferen), die dritte der Kante des Granatoëders; und so können sie nach diesen dreien benannt und unterschieden werden: scharfe Leucitkante, stumpfe Leucitkante, Granatoëderkante. Die gerade Abstumpfung der ersteren giebt jederzeit einen Pyramidenwürfel, die der zweiten ein Pyramiden-Octaëder, die der dritten ein Leucitoïd (den Leucitkörper selbst mit inbegriffen; welches der Fall des Pyramiden-Granatoëders ist). Und so können die Achtundvierzigflächner bald als gebrochene Pyramiden-Octaëder, bald als gebrochene Pyramiden-Würfel, bald als gebrochene Leucitoïde *) (und Leucitoëder selbst) erscheinen, je nachdem die Octaëderecken, oder die Würfelecken, oder die mittleren Leucitecken in dem Umriss des Körpers stärker hervortreten.

Die drei eben genannten Namen könnte man ganz schicklich für die Unterabtheilungen solcher Körper beibehalten; wollte man aber unter ihnen Einen zur Bezeichnung des Körpers in seiner gröfsten Allgemeinheit wählen — und es wird immer gut seyn, solche unmittelbar Figur bezeichnende, nicht blofs auf Zahl hinweisende — generische Namen für unsere Gattungen von geometrischen Körpern festzusetzen —; so ist der Name gebrochnes Leucitoïd für alle Fälle der der sinnlichen Anschauung angemessenste, d. i. am meisten versinnlichend. Was aber den von der Zahl der Flächen hergenommenen Namen betrifft, so würde ich hier den Namen Sechsmalachtflächner dem vorhin gebrauchten, Achtundvierzigflächner, vorziehen (und eben so den Griechischen Hexakisoctaëder lieber gebrauchen, als Tesserakontaoctaëder); der Name Sechsmalachtflächner deutet die Charaktere von Symmetrie, Ordnung und Ursprung der Flächen schicklich an, welche in dem Namen Achtundvierzigflächner sich verwischen.

Wir haben hier blofs die Uebersicht derjenigen Körper des sphäroëdrischen Systems gegeben, welche jederzeit von Flächen einerlei Art gebildet werden; die Verbindungen der Flächen von verschiednerlei Körpern zu zusammengesetzten, und die dadurch sich bildenden Uebergänge der einen in die andern übergehen wir. Allein noch ist einer Hauptverschiedenheit in

*) Gebrochen bezeichnet hier kurz: die Flächen symmetrisch, d. i. nach den Längendiagonalen in zwei getheilt.

der Bildung der Körper dieses Systemes zu gedenken, welche um so wichtiger ist, als ihr eine gleiche Verschiedenheit in der Bildung aller übrigen Systeme entspricht.

Bei allen den vorhin genannten Körpern nämlich sind die Flächen gleicher Art vollzählich vorhanden, so viel ihrer möglich sind; und eine wie die andre nimmt gleichen Antheil an der Begränzung des zu construirenden Körpers. Ihnen steht gegenüber eine andere Abtheilung von Körpern desselben Systems, unvollzählich in den zur Begränzung des Körpers concurrirenden gleichartigen Flächen, und zwar mit dem Gesetz: dafs nur die Hälfte der zusammengehörigen gleichartigen Flächen wirklich Begränzungsflächen des Körpers werden, die andre Hälfte aus der Begränzung gänzlich verschwindet und verdrängt wird; der Wechsel dieses Hervortretens der einen und Zurücktretens der andern ist einem eben so bestimmten, sich gleichbleibenden, durchgreifenden Gesetz unterworfen.

In dem Verhältnifs eines vollzählich gebildeten Körpers zu einem von den nämlichen Flächenebnen, aber auf die Hälfte reducirt, gebildeten steht zuförderst das reguläre Octaëder zum Tetraëder. Es sind die nämlichen Flächen, welche dieses begränzen, als beim Octaëder, aber nur die Hälfte; sie haben sich in der Begränzung des Körpers über die andre Hälfte ausgedehnt, und diese ist aus der Begränzung verschwunden. Es sind am Octaëder von je zwei benachbarten Flächen immer eine verschwunden, eine zur herrschenden geworden; gleichnamiges Verhalten trifft je zwei jenseit einer Octaëderecke einander gegenüberliegende Flächen; ungleichnamiges, wie die benachbarten, so auch die entgegengesetzten, einander parallelen. Auf welchen innern Unterschied der hier in der äufseren Erscheinung gegebene zwischen den verdrängenden und den verdrängten Flächen zurückführt, davon werde ich ein andermal ausführlicher handeln.

Ein zweites Beispiel giebt das Pentagon- oder Schwefelkies-Dodekaëder. Seine Flächen sind die Hälfte der Flächen eines Pyramidenwürfels. Von den vollzählich gedachten Flächen des letztern Körpers fallen wiederum unter zwei benachbarten Flächen eine weg, die andre wird herrschend; zwei jenseit einer Endspitze der vierseitigen Pyramide sich gegenüberliegende verhalten sich gleichnamig; beide werden entweder herrschend, oder beide verschwinden aus der Begränzung. Wie die zweierlei Paare der herrschendgewordenen und der verschwindenden Flächen an den verschiedenen Pyramiden, welche den verschiedenen Würfelflächen correspondiren,

diren, sich gegen einander verhalten, das folgt aus dem unter dem oben ausgesprochnen Gesetz schon mitbegriffenen Umstand: dafs auch von je zwei in der Würfelkante an einander gränzenden (also benachbarten), eben sowohl wie von zwei in einer Endkante der Pyramide an einander gränzenden (d. i. von zwei benachbarten überhaupt) ungleichnamiges Verhalten gilt, oder die eine verschwindet, wenn die andre hervortritt, und umgekehrt. Dafs die entgegengesetzten oder parallelen Flächen des Pyramidenwürfels hier gleichnamig sich verhalten, also auch am Schwefelkies-Dodekaëder je zwei parallele Flächen in der Begränzung bleiben, je zwei parallele aus ihr verschwinden, ist hier wiederum eine Folge jenes Gesetzes für den alternativen Wechsel des Hervortretens und Verschwindens, wie er in dem obigen schon ausgesprochen war.

Das Granatoëder ist eben so wenig, wie der Würfel, fähig, auf gleiche Weise, d. i. nach einem in allen drei Dimensionen gleich wirksamen, und überall eine Differenz zwischen je zwei benachbarte Flächen einsetzenden Gesetze durch Verdrängung der einen Hälfte seiner Flächen und Alleinherrschen der anderen in der Begränzung einen neuen — Hälftflächner des regulären Systems zu erzeugen *), wie das Octaëder das Tetraëder, oder der Pyramidenwürfel das Pentagon-Dodekaëder erzeugt.

Der Leucitkörper und die Leucitoïde dagegen geben nach einem ähnlichen Gesetz der Reduction ihrer Flächen auf die Hälfte allerdings neue Hälftflächner des regulären Systems, und zwar die Pyramidentetraëder, d. i. Tetraëder, welche auf ihren Flächen niedrige dreiseitige Pyramiden tragen, deren Grundflächen mit den Seitenflächen des Tetraëders coïncidiren, oder Körper, welche durch Zuschärfung der Kanten des Tetraëders entstehen. Einem jedem Leucitoïd, wie dem Leucitoëder selbst, entspricht ein bestimmtes Pyramidentetraëder, d. i. von bestimmtem Verhältnifs der Höhe seiner Pyramide gegen die Basis. Die Art und Weise ihrer Entstehung aus den Leucitoïden ist die, dafs je drei um eine stumpfe Ecke des Leucitoïds vereinigte Flächen bleiben, während die drei um jede der benachbarten

*) Dafs aus dem Granatoëder durch Verschwinden von 6 benachbarten Flächen an ihm, welche zusammen die Seitenflachen einer 6seitigen Saule bilden, und durch das Uebrigbleiben der 6 anderen Flächen ein Rhomboëder entstehen kann, ist ein ganz andrer, hieher nicht gehöriger Fall, und das Gesetz für ihn, sofern er als gesetzlich eintretend gedacht werden soll, nach den drei gleichen Dimensionen des sphäroëdrischen Systems ungleich wirkend, und deshalb das Gebiet der dem sphäroëdrischen System zugehörigen Körper überschreitend.

stumpfen Ecken vereinigten verschwinden u. s. f.; der Gegensatz trifft je drei Flächen gegen je drei, wie sie zusammen am Leucitoïd Einer Octaëderfläche entsprechen; und dann ist das Verhalten von der Octaëderfläche gegen die benachbarte hier das nämliche, wie bei der Verwandlung des Octaëders in das Tetraëder.

So wie die Leucitoïde die Pyramidentetraëder, die Pyramidenwürfel die Pentagon-Dodekaëder erzeugen durch jenes Gesetz eines alternativen Verschwindens und Hervortretens der einen Flächenhälfte gegen die andere, so entspringen auch aus den Pyramidenoctaëdern neue Hälftflächner; — Trapezoïd-Dodekaëder wird ihr bequemster, Trapezoïd-Pyramiden-Tetraëder (oder trapezoïdische Pyramidentetraëder) der allerdings längere, aber freilich noch mehr bezeichnende Name für sie seyn. Die Flächen sind 12 gleiche und ähnliche symmetrische Trapezoïde, je drei mit ihren stumpfen Winkeln (vgl. oben S. 292; 2te Note) in eine stumpfe, mit ihren gegenüberliegenden scharfen ebnen Winkeln auch je drei in eine scharfe, und je vier mit ihren unter sich gleichen mittleren ebnen Winkeln in eine mittlere Ecke des Körpers vereinigt. Der stumpfen Ecken, wie der scharfen, sind 4; die einen entsprechen den Flächen des Tetraëders, die anderen den Ecken desselben; der mittleren Ecken sind 6; sie entsprechen, obwohl sie nicht gleichkantig sind, sondern abwechselnd stumpfere und schärfere Kanten haben (kürzer ausgedrückt: zwei- und zwei-kantig sind), der Lage nach den scharfen Leucit- oder den Octaëderecken. Es treten also die Ecken des Tetraëders in dem Umrifs des neuen Körpers am stärksten hervor; zugleich aber erhält derselbe durch das Heraustreten der mittleren Ecken, und durch die symmetrisch-trapezoïdische Form seiner Flächen eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Leucitkörper; daher wohl auch der Name Leucit-Tetraëder zu seiner Bezeichnung gewählt werden könnte. Wo er in der Natur vorkommt, wird er sich gewifs in der nächsten Verbindung mit dem Tetraëder zeigen, welchem sich auch die aus den Leucitoïden entspringenden Pyramiden-Tetraëder anschliefsen.

Von den gebrochnen Leucitoïden oder den Sechsmalachtflächnern könnte man sich mehrerlei Arten von Hälftflächnern durch das Wegfallen der einen Hälfte der Flächen aus der Begränzung und durch die Ausdehnung der übrigen über die verschwindenden hinweg entstehend denken, immer so, dafs nach den drei unter einander senkrechten Grund-

dimensionen die Erscheinungen gleich, und somit der Körper ein dem sphäroëdrischen System zugehöriger bliebe. Es könnten nämlich

1) je sechs und sechs über einer und derselben Octaëderfläche sich zur Pyramide erhebende abwechselnd hervortreten und verschwinden, nach gleicher Ordnung, wie die Octaëderflächen selbst, wenn sie sich auf das Tetraëder reduciren. Dies wäre der tetraëdrische Hälftflächner eines gebrochenen Leucitoïds, oder das gebrochene Pyramiden-Tetraëder. Seine 24 Flächen sind ungleichseitige Dreiecke, seine Ecken dreierlei Art: 4 scharfe, welche den Tetraëderecken entsprechen, und von je 6 der spitzesten ebnen Winkel gebildet werden; die 6 Kanten dieser Ecken abwechselnd stumpfer und schärfer; ferner 4 stumpfe, von je 6 minder spitzen ebnen Winkeln gebildet, den Mitten der Tetraëderflächen correspondirend; die 6 Kanten, welche sie bilden, im allgemeinen *) wieder abwechselnd stumpfer und schärfer; endlich 6 mittlere, von je 4 der stumpfsten ebnen Winkel gebildet, und den Octaëderecken entsprechend; die 4 Kanten einer solchen Ecke wiederum abwechselnd stumpfer und schärfer. Alle Ecken dieses Körpers entsprechen daher den Ecken des Leucit-Tetraëders oder trapezoïdischen Pyramiden-Tetraëders; und die dreiflächigen Ecken dieses letzteren Körpers sind nur durch Brechung der Flächen (Halbirung nach der Längendiagonale) in 6flächige mit abwechselnd stumpferen und schärferen Kanten, d. i. in 5- und 5kantige Ecken verwandelt.

2) Es können weiter von den sechs über einer jeden Octaëderfläche sich erhebenden Flächen je drei abwechselnde herrschend werden, und sich über die drei andern hinweg verlängern, so dafs diese aus der Begränzung verschwinden. Dann können

a) entweder von den 6 Pyramidenflächen der einen Octaëderfläche und den 6 einer angränzenden die benachbarten, also in einer schärferen Leucitkante unsers Sechsmalachtflächners zusammenstofsenden Flächen zweier benachbarten Pyramiden gleichnamig, oder

b) diese benachbarten Flächen können ungleichnamig oder umgekehrt sich verhalten, so dafs, wenn die eine sich verlängert, die andre verschwindet, und umgekehrt.

Im ersten Falle *a*) bleiben von den 24 gleichen scharfen Leucitkanten des gebrochnen Leucitoïds zwölf, und verlängern sich. Von je 4, wie

*) Der Fall ist auch möglich, wo die 6 Kanten sich gleich, oder der Unterschied je dreier und dreier = o wird. Im allgemeinen aber ist das Verhältnifs der Drei und Drei unter einander variabel, und deshalb die Gleichheit Ein möglicher Fall unter allen zufolge der Variabilität jenes Verhältnisses möglichen.

sie am gebrochnen Leucitoïd nebst 4 Granatoëderkanten in die 8flächig (4- und 4kantig) gewordene Octaëderecke zusammenstiefsen, bleiben zwei einander gegenüber liegende, während die zwei zwischen ihnen liegenden (nebst den Granatoëderkanten) verschwinden; und über den zwei verschwundenen erhebt sich ein neues Kantenpaar durch die Verlängerung der bleibenden Flächen. So wird die Ecke, welche der Octaëderecke entspricht, wieder zu einer 4flächigen, zwei- und zweikantigen. Die Würfelecken werden wieder 3flächig; aber die Flächen, welche sie bilden, die bleibenden Flächen der sich verwandelnden 6seitigen Pyramide, bekommen eine schräge, gleichsam gedrehte Stellung gegen die Hauptkörper des Systems und die von ihnen abhängenden Hauptlinien, wie sie sie allerdings, einzeln genommen, schon im gebrochenen Leucitoïd selbst hatten. Aufser den 8 Würfelecken und den 6 Octaëderecken bilden sich zwölf neue, jede wieder durch 4 Flächen, mit dreierlei Kanten (einer verlängerten scharfen Leucitkante, ihr gegenüber einer zweiten, welche über der verschwindenden Leucitkante sich erhebt, und zwischen diesen beiden noch zwei gleichen nach der Würfelecke zulaufenden) *). Diese zwölf neuen Ecken entsprechen denjenigen zwölf Ecken des Pentagon- oder Schwefelkies-Dodekaëders, welche nicht den Würfelecken correspondiren, d. i. denen, welche an den Hauptkanten des Pentagon-Dodekaëders anliegen, jenen gröfseren, stumpferen Kanten des gewöhnlichen Schwefelkies-Dodekaëders, welche zugleich die Grundlinien der symmetrischen Fünfecke sind. Die verlängerten scharfen Leucitkanten unsers neuen Körpers entsprechen den Längendiagonalen dieser symmetrischen Fünfecke am Pentagon-Dodekaëder (d. i. derjenigen Linie, welche das symmetrische Fünfeck in 2 gleiche und ähnliche Trapezoïde theilt, oder welche aus dem der Grundlinie entgegenstehenden ebnen Winkel des Fünfecks nach der Mitte der Grundlinie selbst gezogen wird). Und jetzt springt es mit hinlänglicher Klarheit hervor, dafs unser neuer Körper nichts andres ist, als ein gebrochenes Pentagon-Dodekaëder, das symmetrische Fünfeck des letzteren in 2 gleiche und ähnliche Trapezoïde getheilt; versteht sich, mit derjenigen Verän-

*) Eine solche 4flächige Ecke nennt man in der Geometrie der Krystalle am besten: ein-, ein- und zwei-kantig, im Gegensatz der vorhin erwähnten zwei- und zweikantigen, oder auch derer, welche von zweierlei Flächen, aber gleichen Kanten gebildet werden, und welche ich zwei- und zweiflächig nenne, oder endlich derer, wo Kanten sowohl als Flächen alle gleich sind, d. i. der viergliedrigen. Die Anwendbarkeit dieser und ähnlicher Ausdrücke, wie sie für die folgenden Abtheilungen der Krystallisationssysteme besonders nothwendig sind, auch auf die einzelnen Eigenschaften der Körper des regulären Systems, ist hier klar.

derung ihrer Figur, welche aus der in dem Wort gebrochen ausgedrückten, gröfseren oder geringeren Neigung der getheilten Flächen gegeneinander hervorgeht, und welche zugleich bewirkt, dafs über der Mitte einer Hauptkante des Dodekaëders sich eine vierflächige Ecke zwei-und-zweikantig erhebt, welche, wie bekannt, die der Octaëderecke entsprechende Ecke des neuen Körpers ist.

So haben wir also an ihm den mit dem Schwefelkies-Dodekaëder in der nächsten Beziehung stehenden, oder pentagon-dodekaëdrischen Hälftflächner, aus dem gebrochnen Leucitoïd entsprungen, wie vorher den tetraëdrischen. Seine Flächen sind Trapezoïde, und in ihnen das eine Paar an einander liegender Seiten gleich, die übrigen Seiten ungleich (1-, 1- und 2-seitige Trapezoïde), die Ecken die vorhin beschriebenen 6, 8 und 12, die Kanten die dreierlei, wie sie den dreierlei Seiten des Trapezoïdes entsprechen. Entgegengesetzte Flächen werden an ihm wieder parallel (— nicht so bei dem tetraëdrischen Hälftflächner —). Der Körper selbst, dem pentagon-dodekaëdrischen System im engeren Sinn angehörig, findet sich an dem Schwefelkies selbst in der Natur.

Endlich hätten wir den obigen Fall *b*) noch zu beleuchten, den, wo nicht allein unter den 6 Flächen einer über der Octaëderfläche sich erhebenden Pyramide des Sechsmalachtflächners je zwei benachbarte im Gegensatz des Verdrängens und Verdrängtwerdens sich befinden, sondern auch die Flächen einer Pyramide mit den angränzenden Flächen einer benachbarten, so dafs also dieser Gegensatz auch jenseits einer scharfen Leucitkante eintritt, wo er im vorigen Fall nicht Statt fand, wo im Gegentheil im vorigen Fall gleiches Verhalten nach beiden Seiten hin, oder Gleichnamigkeit statt des Gegensatzes obwaltete. Die Folge ist, dafs nun auch diese schärferen Leucitkanten an dem neuen Körper verschwinden, welche an dem vorigen noch blieben; dafs also alle Kanten des gebrochnen Leucitoïds in der Begränzung des neuen Hälftflächners verschwinden. Ueber den 24 verschwindenden Flächen bilden sich neue Ecken durch die Verlängerung der 24 herrschend werdenden; je 3 bilden über der verdrängten die neue Ecke. Die Würfelecken und die Octaëderecken des Sechsmalachtflächners bleiben; die ersteren werden zu 3flächigen, eben so wie in dem Falle *a*), d. i. des gebrochnen Pentagon-Dodekaëders; die Octaëderecken werden aus 8flächigen auch zu 4flächigen, und zwar durch das Verschwinden der abwechselnden in die Octaëderecke zusammenstofsenden 8 Flächen des Sechsmalachtflächners, da-

her gleichkantig, so wie gleichflächig, d. i. gleichgliedrig, aber die Flächen eben so schräg gegen die Hauptrichtungen des Körpers gedreht, wie schon vorhin die Flächen des Körpers *a*), von der Würfelecke aus betrachtet; welches Verhältnifs, wie bemerkt, auch in unsern jetzt zu construirenden Hälftflächner mit übergeht. Die mittlere Leucitecke des Sechsmalachtflächners zieht sich in eine Kante aus, welche je zwei der neuen 24 Ecken mit einander verbindet. Die Lage dieser 12 neuen Kanten gegen einander wird an dem sich bildenden Körper so, dafs sie, sowohl von einer Octaëderecke, als von einer Würfelecke aus gesehen, dort je 4 der Octaëderecke, hier je 3 der Würfelecke zunächst liegende, in gleicher Richtung gedreht erscheinen. Die 24 Flächen des neuen Körpers selbst werden Fünfecke, und zwar mit einer einzelnen, und zwei Paaren von Seiten; die gleichen Seiten der Paare an einander anliegend, die einzelne Seite an zwei zu den verschiedenen Paaren gehörige angränzend. Die einzelnen Seiten sind jene schon erwähnten 12 neuen Kanten, welche an die Stelle der 12 mittleren Leucitecken des Sechsmalachtflächners treten, und je zweien der 24 Flächen die gemeinsamen Grundlinien werden; sie verdienen daher den Namen Grundkanten. Ihnen gegenüber liegt ein Winkel, in welchem das Ende einer anderen Grundkante die Fläche berührt. Das kleinere Seitenpaar geht von dem Ende zweier benachbarter Grundkanten, von der der Fläche selbst, und der in dem gegenüberliegenden Winkel sie berührenden, nach der Würfelecke; das gröfsere Seitenpaar von den nämlichen Endpunkten zweier benachbarter Grundkanten nach der Octaëderecke hin. Die ebnen Winkel des Fünfecks sind alle verschieden, die Winkel der einzelnen Paare unter sich, der Winkel, welchen die Seite des einen Paares mit einer des andern bildet, d. i. der der Grundkante gegenüberliegende Winkel; endlich die zweierlei Winkel, welche an der Grundkante selbst anliegen, und welchen sie mit einer Seite des längeren und einer des kürzeren Paares bildet *). Die Ecken des Körpers sind, wie schon bemerkt, dreierlei Art, 6, 8 und 24. Die Kanten auch dreierlei, entsprechend den dreierlei Seiten des Fünfecks.

Man kann sich die Bildung des neuen Körpers auch so versinnlichen, dafs er entsteht, wenn man sich die Flächen irgend eines Leucitoïds, je drei und drei, wie sie um eine Würfelecke herum liegen, unter Beibehaltung ihrer Neigung gegeneinander, in der Ebne der Octaëderfläche um ein Gewisses

*) Ein solches Fünfeck ist also zwei-, zwei- und ein-seitig und fünfwinklich, d. i. von 5 verschiedenen Winkeln.

gedreht denkt, zur Rechten oder zur Linken, und je drei benachbarte wieder in gleicher Richtung, ebenfalls rechts oder ebenfalls links, um dieselbe Gröfse. Es ist dadurch leicht einzusehen, wie eine jede der vorhin trapezoïdischen Flächen an einer der mittleren Ecken, und zwar an derjenigen, gegen welche hin die Drehung Statt findet, mit der jenseit dieser Ecke ihr gegenüberliegenden Fläche sich nunmehr in einer Kante schneiden mufs; und das ist die einzelne, die Grundkante des neuen 2-, 2- und 1-seitigen Fünfecks. Die übrigen Kanten des neuen Körpers bleiben die analogen von dem des Leucitoïds, und paarweise gleich, wie dort, so wie sie auch durch das gegenseitige Sichschneiden der nämlichen Flächen gebildet werden, wie am Leucitoïd selbst. Daher scheint der beste Name für unsern neuen Körper der eines gedrehten Leucitoïds zu seyn.

Der nämliche Körper ist aber von zweierlei Art möglich; und es unterscheiden sich die rechtsgedrehten und die linksgedrehten Leucitoïde von selbst, und sind eben so wenig der Verwechselung fähig, als wo sonst dieses Verhälltnifs von umgekehrt-ähnlichen-und-gleichen Körpern unter den natürlichen Bildungen vorkommt *). Rechtsgedreht werden wir die nennen, wo die Grundkante des Fünfecks (den der Octaëderecke entsprechenden, von dem längeren Seitenpaare unter sich gebildeten Winkel nach oben gekehrt) zur Rechten, — linksgedreht diejenigen, wo, bei der nämlichen Stellung des Fünfecks, die Grundlinie desselben zur Linken liegend erscheint.

Das früher erörterte gebrochne Pentagon-Dodekaëder kann man sich, wie schon oben erwähnt wurde, allerdings auch durch eine ähnliche Drehung je dreier Flächen eines Leucitoïds entstehend denken. Allein wenn die einen drei dann in einer gegebenen Richtung gedreht sind, so sind je drei benachbarte nicht in der nämlichen, sondern in der umgekehrten Richtung gedrehet. Deshalb verlängern sich von dem längeren Seitenpaare des Trapezoïds (als der Fläche des Leucitoïds) diejenigen Seiten, wo die Flächen der benachbarten Drei und Drei gegen einander gedreht, oder durch die Drehung einander genähert werden; es verkürzen sich dagegen diejenigen, an welchen je zwei Flächen durch die Drehung von einander entfernt, oder von einander weggedrehet werden. Diejenigen Flächen aber, welche in der mittleren Leucitecke einander gegenüberliegen, kommen nicht

*) Vgl. meine Abhandlung über die gewöhnlichste Zwillingskrystallisation des Feldspathes in Schweigger's Journ. f. Ch. u. Ph. B. XI.

zum Sichschneiden in einer neuen Kante, sondern bleiben blofs in Berührung mit einander in der Ecke selbst, wie im Leucitoïd. Die Ecke rückt nur nach der Richtung fort, wohin die Drehung der beiden Drei sie gemeinschaftlich führt. Deshalb wird die Figur der Fläche an dem neuen Körper nicht ein Fünfeck, sondern wieder ein Trapezoïd, und zwar ein solches, in welchem von den zwei Paaren der Seiten in dem symmetrischen des Leucitoïdes das eine Paar, das kürzere, gepaart bleibt, das längere dagegen aufhört unter sich gleich zu seyn, indem die eine Seite sich verlängert, die andre sich verkürzt. So wird das symmetrische, oder 2- und 2-seitige Trapezoïd des Leucitoïdes durch diese Art von Drehung zu einem 2-, 1- und 1-seitigen; das Leucitoïd selbst aber zum gebrochnen Pentagon-Dodekaëder.

Dieser Körper hat nun nicht mehr die Zwiefachheit eines rechten und linken, weil an ihm beide Drehungen im Gleichgewicht sind und sich gegenseitig aufheben. Man könnte ihn zwar unter der Benennung der gedrehten Leucitoïde mitbegreifen; und er würde dann zum Unterschied von den vorigen gegensinnig-gedreht zu nennen seyn, während diese gleichgedreht heifsen würden. Allein da er die oben bemerkte nahe Verwandtschaft mit dem Pentagon-Dodekaëder besitzt, so wird es besser seyn, wie wir gethan haben, ihn blofs mit dem Namen gebrochnes Pentagon-Dodekaëder zu bezeichnen, und den Namen gedrehte Leucitoïde ausschliefslich für die gleichsinnig-gedrehten zu gebrauchen, die dann jederzeit entweder rechtsgedrehte oder linksgedrehte sind.

Wenn gleich diese Körper in der Wirklichkeit noch nicht bekannt sind, so ist es doch gewifs nicht unnütz, auf sie und ihre Verhältnisse zu den vorigen aufmerksam gemacht zu haben; ja, das genauere Studium der feineren Unterschiede, welche die so zahlreichen, immer dem regulären oder sphäroëdrischen Systeme angehörigen Gestaltungsweisen so vieler verschiedener Fossilien doch wohl noch öfters wesentlich unterscheiden mögen, fordert eine vorgängige möglichst vollständige Untersuchung alles dessen, was in diesem System möglich, oder wozu die Anlage in ihm gegeben ist.

So viel geht aus dem bisherigen deutlich hervor: dafs das sphäroëdrische System in zwei grofse Abtheilungen sich trennt, von denen die erste die Hauptabtheilung ist: das vollgliedrig- (oder vollflächig-) sphäroëdrische System; alle Flächen, welche gleicher Art seyn können, sind in den ihm angehörigen Körpern vollzählich vorhanden, und im Gleichgewicht; die zweite bildet eine Nebenabtheilung: das hälftflächig-

sphä-

sphäroëdrische System *); und dieses zerfällt wieder in zwei Unterabtheilungen: das tetraëdrische und das pentagon-dodekaëdrische System.

Dafs unsre gedrehten Leucitoïde keiner von diesen beiden Unterabtheilungen angehören würden, macht ein gegründetes Bedenken, sie schon jetzt vorgreifend in die Zahl der wirklichen natürlichen Körper mit aufnehmen zu wollen. Vielmehr würden sie, wenn sie sich als solche bewährten, das Daseyn einer neuen, dritten Unterabtheilung der hälftflächig-sphäroëdrischen Systeme beurkunden.

B. Vom regulären oder sphäroëdrischen abweichende Systeme.

Die von dem eben beschriebenen sphäroëdrischen oder gleichaxigen abweichenden Krystallisationssysteme haben zur Grundlage, entweder wie das reguläre, auch drei unter sich rechtwinkliche Dimensionen, aber dann nicht alle drei unter sich gleich; oder ihre Grundlage bilden überhaupt nicht drei unter sich rechtwinkliche Dimensionen.

Die erstern zerfallen: *a*) in die, bei welchen von den drei unter einander rechtwinklichen Dimensionen zwei unter sich gleich, aber von der dritten verschieden sind — dies sind die viergliedrigen Krystallisationssysteme; — und

b) die, wo alle drei unter einander rechtwinkliche Dimensionen ungleich sind. Diese Abtheilung enthält die zwei-und-zwei-gliedrigen Krystallisationssysteme, nebst den zwei-und-ein-gliedrigen, und den ein-und-ein-gliedrigen; die letzteren drei bilden blofse Unterabtheilungen in Einer Hauptabtheilung, denen ähnlich, welche selbst in dem Gebiete des regulären Statt finden.

Die zweiten geben die besonders ausgezeichneten und beinahe vorzugsweise merkwürdigen Bildungen der sechsgliedrigen und der drei-und-drei-gliedrigen Krystallisationssysteme, beides auch nur Unterabtheilungen Einer Hauptabtheilung, wie die vorigen. Sie beruhen beide auf dem Verhältnifs Einer Hauptdimension gegen drei

*) Man kann auch das erste das homosphäroëdrische, und dieses zweite das hemisphäroëdrische System nennen.

andre unter sich gleiche und auf der ersten senkrechte. Aber auch sie allein scheinen nur Ausnahme von der sonst allgemeinen Gründung der krystallinischen Gestalt auf das Verhältnifs zwischen drei unter einander senkrechten Dimensionen zu machen. Es läfst sich als allgemeine Thatsache ansehen, dafs, wo die Grundregel der krystallinischen Gestaltung nicht in drei unter sich rechtwinklichen Dimensionen liegt, kein andrer Fall eintritt, als der hier ausgesprochene: nämlich der von vier Dimensionen, von welchen Eine senkrecht auf den drei übrigen, diese aber gleich unter sich sind (daher alle drei in Einer Ebne und unter 60° sich schneidend).

a. Viergliedriges System.

Die Analogie zwischen dem regulären Systeme und dem viergliedrigen sowohl, als den zwei-und-zwei-gliedrigen, ist schon für sich einleuchtend, und beruht darauf, dafs die drei unter sich senkrechten Dimensionen Grundlagen der Gestaltung bleiben, und nur ihr Gröfsenverhältnifs unter einander variirt. Es ist auch offenbar, dafs das reguläre System nur Ein bestimmtes Glied ausmacht unter den möglicherweise unendlich Vielen, in welchen die Gröfsen-Verhältnisse der drei Dimensionen unter einander als variirend gedacht werden können.

Sind die Dimensionen ungleich, so sind sie es in einem bestimmten Verhältnifs. Es sind daher auch so vielerlei viergliedrige sowohl, als zwei-und-zwei-gliedrige Krystallisationssysteme möglich, als bestimmte Verhältnisse der Ungleichheit unter den drei rechtwinklichen Dimensionen Statt finden können. Mit variirenden Winkeln und Proportionen behalten die Gestalten aller dieser Systeme ihre Analogieen sowohl unter sich, als mit den Körpern des regulären Systemes.

So entspricht jedem viergliedrigen System als Hauptkörper zuförderst ein bestimmtes Octaëder, welches wir der Analogie nach ein viergliedriges nennen wollen, wie am Zirkon, am Zinnstein, Honigstein u. s. f. Eine ächte doppelt vierseitige Pyramide, die Axe derselben gegeben als eine von allen übrigen Linien in der Figur sich unterscheidende Dimension, die einzelne nämlich der obigen drei, den beiden andern unter sich gleichen als ungleich entgegengesetzte; die je vier Flächen der Pyramide von gleichem Werth unter sich, gleich gegen die Axe geneigt, gleiche und ähnliche gleichschenkliche Dreiecke; die Endkanten alle gleichen Werthes, und unterschieden von den Seitenkanten oder den Kanten an der gemeinschaftlichen Grundfläche der

Pyramiden; diese auch wieder gleich und gleichen Werthes unter sich, so dafs die gemeinschaftliche Grundfläche der Pyramiden, d. i. der auf der Axe senkrechte und das Octaëder halbirende Queerschnitt, ein Quadrat wird; daher auch der Name Quadrat-Octaëder (*octaèdre à bases carrées*), welchen man ihm hin und wieder gegeben hat.

Diesem Octaëder gegenüber steht in dem viergliedrigen Systeme die rechtwinkliche vierseitige Säule mit gleichem Werthe der Seitenflächen und gerad angesetzter Endfläche, d. i. das rechtwinkliche Hexaëder oder Parallelepiped des viergliedrigen Systemes; und zwar für ein jedes solches System mit bestimmtem Verhältnifs zwischen Höhe und Breite; vom Würfel, dessen Analogon hier die Säule ist, unterschieden durch den bestimmten Unterschied zwischen Endfläche und Seitenflächen; die letzteren gleich unter sich, rechtwinklich nicht nur unter sich, sondern auch gegen die Endfläche.

Endstellen und Seiten- oder Lateralstellen sind also schon unterschieden im viergliedrigen Systeme, in Folge des Unterschiedes der Grunddimensionen, statt dafs kein Unterschied dieser Art Statt fand im regulären. Am viergliedrigen Octaëder trifft er die Kanten, die Ecken, die ebnen Winkel und die Neigungswinkel, nicht die Flächen; am viergliedrigen Hexaëder oder rechtwinklichen Parallelepiped trifft er insbesondre die Flächen, nicht die Ecken, aber auch die Kanten, und dem gemäfs, strenge genommen, auch die ebnen Winkel und die Neigungswinkel.

Auch das Analogon für den dritten Körper des gleichgliedrigen Systems, das Granatoëder, liefse sich gar wohl im viergliedrigen System ebenfalls aufzeigen. Allein es ist zu bemerken, dafs der Körper, welcher das Analogon darstellen würde, schon nicht mehr, wie beim regulären Systeme, aus Flächen Einer Art zusammengesetzt wäre, sondern nach dem früher schon in den End- und Lateral-Stellen des Systems liegenden Unterschiede aus zweierlei im Werth unter sich verschiedenen Flächen, davon die einen Seitenflächen einer rechtwinklich vierseitigen Säule, die andern die Flächen eines viergliedrigen Octaëders sind *). Es bedarf übrigens der Aus-

*) Dieselbe Bemerkung läfst sich allerdings auch in Bezug auf das rechtwinkliche Parallelepiped dieses Systemes machen. Der wesentliche Unterschied zwischen Seitenflächen und Endflächen hat zur Folge, dafs auch sie schon getrennt, oft in der Ausbildung des ganzen Systems die einen gar nicht, die andern allein, und immer wenigstens jedes in anderem Maafse und auf seine Weise, unabhängig von dem andern, vorkommt. Beurtheilt

zeichnung dieses Körpers, als eines sichtlich nicht mehr einfachen, oder wahrhaft elementaren, vorläufig nicht. Wo wir veranlafst wären, ihn mehr herauszuheben, würde ich ihn am besten ein Granatoïd des viergliedrigen Systemes zu nennen glauben.

Die Mannichfaltigkeit der Bildungen im viergliedrigen System ist nicht eben grofs. Die gegen die Axe geneigten Flächen gehören entweder, und das im gewöhnlichsten Fall, wiederum einem viergliedrigen Octaëder an; oder einer doppelt-achtseitigen Pyramide mit abwechselnd stumpferen und schärferen Endkanten, weshalb ich sie kürzer eine vier-und-vierkantige Doppelpyramide, oder ein vier-und-vierkantiges Dioctaëder nenne. Die gemeinschaftliche Grundfläche der Pyramiden ist ein Achteck mit abwechselnd stumpferen und schärferen Winkeln, oder, wie man es deshalb auch nennen kann, vier-und-vierwinklich.

Es ist kein Beispiel bekannt, dafs dieser von 16 gleichen und ähnlichen Flächen begränzte Körper irgendwo rein ausgebildet vorkäme; sehr selten, dafs auch nur die Flächen desselben die herrschenden in der Gestalt wären; beinah immer sind sie der von den übrigen Flächen hervorgebrachten herrschenden Gestalt blofs untergeordnet. Uebrigens ist allerdings die Zahl 16 für dieses System die des Maximums von Flächen, welche von gleicher Art möglich sind. Es ist diese Zahl hier das nämliche, was im sphäroëdrischen Systeme die Zahl von 48 gleichen und ähnlichen Flächen ist. Und es leuchtet ein, dafs die Verdreifachung der Zahl 16 zu 48 im sphäroëdrischen Systeme Folge der Verdreifachung der Axen ist, welche gleichen Werth unter sich haben.

So wie im sphäroëdrischen Systeme die Reduction der allgemeinen (gleichartigen) Flächenzahl 48 auf 24, 12, 8, 6, 4 Statt findet; so findet im viergliedrigen Systeme die Zahl 16 ihre Reduction auf 8, 4, und 2.

Was die der Axe parallelen Flächen in diesem Systeme betrifft, so sind es im allgemeinen Flächen von achtseitigen, abermals 4-und-4-kantigen Säulen, d. i. mit abwechselnd stumpferen und schärferen Seitenkanten; und diese sind wiederum der Reduction auf rechtwinklich-vierseitige Säulen durch Zusammenfallen je zweier Flächen in Eine fähig.

Die auf der Axe senkrechte Fläche endlich ist eine einzig-mögliche,

man also die Einfachheit eines Körpers nach der Gleichartigkeit seiner Flächen, so kann das viergliedrige Octaëder allein auf den Namen des einfachsten Körpers im viergliedrigen Systeme Anspruch machen.

die gerad angesetzte Endfläche der Säule, und in ihr das Maximum des Zusammenfallens von 16 Flächen gleicher Art in 2 verwirklicht.

Von der Erscheinung, welche im sphäroëdrischen System mannichfach sich darbot, dafs eine bestimmte Hälfte gleichartiger Flächen durch das Ueberwiegendwerden der andern Hälfte verschwand, oder, wie wir es allgemein nennen können, dafs das System aus einem homoëdrischen in ein hemiëdrisches sich verwandelte, von dieser Erscheinung haben wir im viergliedrigen System nur eine einzige sichere Spur, und zwar beim Kreuzstein *). Und, was merkwürdig ist, es ist nicht dasjenige Verhalten, welches das System tetraëdrisch machen würde, wozu doch das viergliedrige Octaëder, seinen geometrischen Eigenschaften nach, eben sowohl geeignet wäre, als das reguläre; im Gegentheil also kennt man bis jetzt von einem Tetraëdrischwerden des viergliedrigen Systems noch kein Beispiel. Beim Kreuzstein verschwinden vielmehr von den Flächen eines Octaëders, mit zwei einander in der Endspitze gegenüber liegenden zugleich die ihnen parallelen, und umgekehrt mit den einander auch gegenüber liegenden Herrschendwerdenden werden es zugleich die ihnen parallelen; in so fern gleicht die Veränderung mehr derjenigen, welche in dem sphäroëdrischen System das pentagon-dodekaëdrische entwickelt; das Ansehen des viergliedrigen Systems aber bekommt durch jenes Wegfallen je zweier einander gegenüberliegender Flächen von vier, eine entschiedene Aehnlichkeit mit dem zwei-und-zwei-gliedrigen, ohne jedoch meines Erachtens einen wahrhaften Uebergang in dieses zu bilden, da die inneren Grundlagen des Systems in Beiden wesentlich verschieden bleiben.

b. Zwei-und-zwei-gliedriges System.

Die Grundlage eines zwei-und-zwei-gliedrigen Systemes bilden, wie oben bereits angegeben wurde, drei unter sich rechtwinkliche Dimensionen, alle drei von verschiednem Werthe, oder ungleich unter einander.

*) Als ein zweites Beispiel könnte der Wolfram angesehen werden, und würde, wenn er anders als solches anzusehen ware, die namliche Erscheinung bei einem gleichen Gange der Entwickelung auf einer höheren Stufe zeigen. Er ist indefs ein zweideutiges Beispiel, und scheint, seiner aufseren Gestaltung nach, ganz dem 2-und-2-gliedrigen Systeme anzugehören. Mehr über ihn zu sagen, gehört nicht hieher, sondern der speciellen Schilderung dieses Fossils selbst.

Derjenige Körper, welcher für ein solches System eben das ist, was das reguläre Octaëder für das sphäroëdrische System ist, ist ein Octaëder, dessen drei Axen, durch je zwei entgegengesetzte seiner Ecken gelegt, mit jenen drei unter einander rechtwinklichen Grunddimensionen zusammenfallen. Ein solches Octaëder hat also dreierlei Axen und dreierlei Ecken, in welchen diese sich endigen; auch dreierlei Kanten, und diese je vier sich gleich; aber einerlei Flächen. Die Flächen sind unter sich gleiche und ähnliche ungleichseitige Dreiecke, alle gleich gegen die nämlichen Axen geneigt, verschieden gegen die verschiedenen, und an den verschiednerlei Kanten auch verschieden geneigt unter sich. Je vier gleiche Kanten bilden einen Rhombus, dessen Diagonalen mit zwei von den drei ungleichen Axen zusammenfallen, und auf welchem die dritte Axe senkrecht steht. Die sämmtlichen Kantenaufrisse *) des Octaëders sind daher drei verschiedene Rhomben, von denen ein jeder in Bezug auf eine der drei Axen des Körpers als Grundfläche einer doppelt vierseitigen Pyramide angesehen werden kann, als welche das Octaëder sich auch betrachten läfst. Beim regulären Octaëder waren alle diese Kantenaufrisse Quadrate, beim viergliedrigen Octaëder aber der eine ein Quadrat, die beiden andern zwei, und zwar unter sich gleiche und ähnliche, Rhomben, die jedoch beide nicht schicklich als Grundflächen einer doppelt vierseitigen Pyramide genommen werden konnten, weil die Eine Hauptaxe des Systemes auch für die Lage der Axe der Pyramiden entschied. Hier, wo jede der drei Axen mit gleichem Rechte als Axe der Pyramiden genommen werden kann, und bei jeder der drei Axen ein Rhombus die gemeinschaftliche Grundfläche der Pyramiden bildet, bot sich der gewöhnliche Name Rhomben-Octaëder (*octaèdre à bases rhombes*) für diesen Körper gut und bezeichnend dar. Ich nenne ihn aufserdem ein zwei-und-zwei-kantiges Octaëder, welcher Name den Zusammenhang des Körpers mit dem zwei-und-zwei-gliedrigen System ausspricht, und anzeigt, wie je zwei und zwei Kanten — nebst den ihnen parallelen **) — immer gleichen Werthes, die übrigen aber andern Werthes sind.

Das Gegenstück zu dem zwei-und-zwei-kantigen Octaëder — in glei-

*) So nenne ich kurz die durch gegenüberliegende Kanten eines Körpers und zugleich durch seinen Mittelpunkt gehenden Durchschnitte.

**) Bei allen diesen Benennungen: 2-und 2-, 4-, 6-gliedrig u. s. f. zähle ich parallele Flächen oder Kanten nur für Eine. Nur Glieder mit verschiedenen Richtungen werden als verschiedene gezählt.

chem Sinn, wie der Würfel es ist gegen das gleichgliedrige Octaëder — bildet das rechtwinkliche Parallelepiped von dreierlei Werth seiner verschiedenen Flächen. Jede kann als Endfläche, jede als Seitenfläche gelten, und beide Seitenflächen bleiben immer verschieden, sowohl unter sich, als gegen die Endfläche. Der Name der rechtwinklichen vierseitigen Säule gebührt daher diesem Parallelepipede minder, und wird besser vorzugsweise für den analogen Körper des viergliedrigen Systems aufgehoben. Wo es eines kurzen Namens für jenes Parallelepiped bedarf, da wird der Name Oblong-Hexaëder oder Oblong-Prisma vorläufig am bequemsten gebraucht werden können, so wie Quadrat-Prisma für den entsprechenden Körper des viergliedrigen Systems *).

Ein Granatoïd (d. i. ein dem Granatoëder ähnelnder Körper) des zwei-und-zwei-gliedrigen Systemes liefse sich ganz schicklich auch unterscheiden; und es würde dieser Körper gegen das zwei-und-zwei-kantige Octaëder und das ihm zugehörige Oblong-Prisma genau eben so sich verhalten, wie das Granat-Dodekaëder zum regulären Octaëder und zum Würfel, oder überhaupt in dem gleichaxigen Systeme sich verhält.

Allein es würde diesem Granatoïd wesentlich seyn: dafs die zwölf Rhomben, von denen es begränzt ist, von dreierlei Art seyn mussen, den dreierlei Kanten des Rhomben-Octaëders entsprechend, deren Abstumpfungsflächen die Flächen des Granatoïdes sind.

Eben aber weil diese Flächen von dreierlei verschiednem Werthe und Wesen sind, so kommen auch die einen der Regel nach nicht gleichmäfsig mit den andern in der Natur gebildet, sondern ein jedes der dreierlei Paare **) mehr für sich, und mit den andern in der Ausbildung nicht gleichen Schritt haltend vor. Ja unter der ungemein grofsen Anzahl eben solcher Krystallisationssysteme möchte nicht in einem einzigen ein recht vollständiger Repräsentant dieses Körpers unter den natürlichen Bildungen anzutreffen seyn; vielmehr scheint es durchgängige Regel und Charakterzug der zwei-und-zwei-gliedrigen Krystallisationssysteme zu seyn, dafs die dreierlei zusam-

*) Was oben S. 307 in der Note in Bezug auf den Unterschied der Seiten- und Endflächen bei der achten rechtwinklich-vierseitigen Saule (des 4-gliedr. Systems) gesagt wurde, gilt jetzt von dem dreifachen Unterschiede der dreierlei Flachen des rechtwinklichen Parallelepipeds (Orthoëders), von welchem hier die Rede ist.

**) Paare von Flachen nenne ich hier 4 unter sich gleiche, von denen zwei und zwei einander parallel sind, also nicht einzeln, sondern die parallelen für Eine gezahlt werden; vergl. Note **) der vorigen Seite.

mengehörigen Paare von Flächen, welche einem und demselben zwei-und-zwei-gliedrigen Granatoïd angehören, immer verschieden in der Weise der Entwicklung der Gestalt sich verhalten, das eine auf Kosten des andern vorherrscht, ein andres zurücksteht, mehr und mehr jenem weicht, oder sich ganz verbirgt, oder auch in seiner Mitwirkung zur Gestaltung des Ganzen sich völlig anders verhält, als das erste. Es bleibt daher unser zwei-und-zwei-gliedriges Granatoïd mehr ein geometrisches Bild, und als solches von Werth für das Studium dieser Abtheilung der Krystallisationssysteme.

Statt des Granatoïds, als des gleichmäfsigen Zusammentretens aller drei Paare, werden vielmehr Combinationen von blofs zweien unter einander (— immer nebst den ihnen parallelen —) eine gewöhnliche Erscheinung; eine jede solche Combination im gegenseitigen Gleichgewicht der Flächen giebt wiederum ein Octaëder *) von eigenthümlicher Art, ein zwei-und-zweiflächiges nämlich; und es ist sogleich einleuchtend, dafs die verschiednen Combinationen eines und desselben Granatoïds zu dreierlei solchen Octaëdern den Grund legen; deshalb man auch solche drei Octaëder wird zusammengehörige nennen können. Wieder aber werden sie nur in dem geometrischen Bilde gleichen Rang haben eines wie das andre; in der Natur dagegen werden die einen, und nicht die andern Combinationen vorkommen, und so den wesentlichen Unterschied weiter bekräftigen, mit welchem die Natur jene dreierlei Glieder des Systems in der Bildung behandelt.

Ein Octaëder der hier betrachteten Art kann zum geometrischen Namen am besten den des Oblong-Octaëders führen, in Harmonie mit den Namen Rhomben- und Quadrat-Octaëder; wenigstens halte ich diesen Namen für vorzüglicher als den von Rectangular-Octaëder, welcher ihm von andern Schriftstellern gegeben zu werden pflegt. Das Octaëder erscheint ganz natürlich als eine doppelt vierseitige Pyramide, deren Axe

*) Nicht jeden von 8 Flächen begränzten Körper darf man, dem Sprachgebrauch zufolge, Octaëder nennen; diesem würde es gänzlich zuwider seyn, wenn man z. B. eine 6seitige Säule mit ihren beiden Endflachen auch ein Octaëder nennen wollte. Nur der von 8 dreieckigen Flächen, von welchen je zwei und zwei einander parallel sind, begränzte Korper (welcher also nur 6 Ecken hat, jede von 4 ebnen Winkeln gebildet), nur dieser darf in der Krystallographie Octaëder genannt werden. Mehr aber die Bedeutung dieses Namens beschränken zu wollen, würde auf der andern Seite auch gar nicht vortheilhaft, und keineswegs zu billigen seyn.

Axe gegeben ist (für jedes der drei zusammengehörigen eine andre von den drei dem ganzen System zum Grunde liegenden, unter sich rechtwinklichen, aber ungleichen Axen); die Flächen sind je zwei und zwei (nämlich die gegenüberliegenden an einer und derselben Endspitze) gleich gegen die Axe geneigt, die beiden andern zwischenliegenden aber unter einem andern Winkel, jedoch ebenfalls gleich unter sich; die Flächen selbst sind zweierlei, beides aber gleichschenkliche, Dreiecke; unter den Endkanten unter sich ist kein Unterschied (wie es bei dem Rhomben-Octaëder der Fall war), sondern blofs zwischen ihnen und den Lateral- oder Seitenkanten, d. i. den Kanten der gemeinschaftlichen Grundfläche der Pyramiden; eben so ist unter den Ecken kein Unterschied, als der der Endspitzen und Lateralecken; die gemeinschaftliche Grundfläche der Pyramiden selbst ist ein Oblongum oder längliches Rechteck. Die beiden durch die Endkanten gelegten Aufrisse des Körpers sind zwei, unter sich gleiche, gleichseitige Parallelogramme, also der Regel nach Rhomben. Von jenem Oblongum erhält das Octaëder seinen geometrischen Special-Namen.

Ich bediene mich aufserdem für das Oblong-Octaëder des Namens eines zwei-und-zwei-flächigen, als eines Namens, welcher sich eng an die ganze Reihe unsrer Betrachtungen anschliefst. Dem zwei-und-zweikantigen Octaëder gegenüber bezeichnet er, beide im zwei-und-zweigliedrigen System eingeschlossen, die Gleichheit im Werth von je zwei *) Flächen (nebst den ihnen parallelen), und ihr Geschlossenseyn in sich, ihre Abweichung von jeden andern, wie dort die Gleichheit von je zwei Kanten, wo dagegen die Flächen alle gleichen Werthes waren. Vorhin nannten wir ein Octaëder viergliedrig, und werden uns des Endwortes gliedrig in gleichem Sinn künftig für die Bezeichnungen andrer Körper bedienen, wo beides, Flächen sowohl als Kanten, der angegebenen Zahl nach als von gleichem Werthe unter sich, angezeigt werden sollten **); hier haben wir die zwei Fälle, gleiche Flächen bei ungleichen Kanten, und gleiche Kanten bei ungleichen Flächen, in jenem Fall ein zwei-und-zwei-kantiges, in diesem ein zwei-und-zwei-flächiges Octaëder.

*) Es werden hier immerfort nur verschieden laufende Flächen oder Kanten besonders genannt, die ihnen parallelen sind immer stillschweigend mit verstanden; vgl. Note **) S. 310.

**) Es sind immer gegen die Axe geneigte Glieder, welche in der Zahl gleich gefunden werden, von welcher das System den Namen trägt. Für die der Axe parallelen oder auf ihr senkrechten Glieder ähnlicher Art finden Reductionen dieser Zahlen Statt, durch Zusammenfallen mehrerer Glieder in eines, wie wir dessen oben schon gedacht haben.

Nehmen wir weiter Rücksicht auf die Erscheinung solcher aus zwei Paaren begränzender Flächen gebildeter Körper in der wirklichen Krystallbildung, so ist, eben wieder zufolge der durchaus wesentlichen Verschiedenheit beider Paare, und der Eigenthümlichkeit eines jeden, der gewöhnlichste Fall, dafs sie nicht in gleichem Grade sich gegenseitig beschränken, und den Körper nicht zu dem Octaëder selbst zusammendrängen, sondern dafs das eine Paar vorherrscht, das andre zurücktritt; das vorherrschende Paar dehnt sich aus zu Seitenflächen einer Säule, das andere wird zu Endigungsflächen derselben, und das zwei-und-zweiflächige Octaëder verwandelt sich in eine geschobene vierseitige Säule (die Seitenflächen gleichen Werthes unter sich), an den Enden zugeschärft, die Zuschärfungsflächen auf zwei gegenüberstehende Seitenkanten der Säule, und zwar gerad, aufgesetzt, beide Zuschärfungsflächen gleich, die Zuschärfung also symmetrisch. — Wiederum würde es geometrisch gleichgültig seyn, welches von beiden Paaren das vorherrschende wird und die Seitenflächen der Säule bildet, und welches dagegen zu den Zuschärfungsflächen des Endes zurücktritt. Offenbar liegt die Anlage zu zweierlei solchen Umgestaltungen in jedem solchen Octaëder. Nicht gleichgültig ist es aber in dem wirklichen Krystallisationssystem der bestimmten Gattung. Da kann wohl beides vorkommen, so wie mehrere der dreierlei möglichen Combinationen unsrer Paare selbst, und mit diesen eine gröfsere Annäherung oder weitere Entfernung von dem Granatoïde, welches durch eine ganze Reihe von zwei-und-zweiflächigen Bildungen hindurch gleichsam als geometrisches Normalbild vorschwebt; allein ob die drei Paare alle vorkommen, ob sie sich dem Gleichgewicht unter sich mehr und mehr nähern, oder eins mehr und mehr das andre ausschliefst, ob, wo zwei vorhanden sind, diese beiden sich das Gleichgewicht halten, und ob, wo Ueberwiegen Statt findet, bald das eine, bald das andre das überwiegende ist, oder ob das eine stets als das Untergeordnete, das Nachstehende sich zeigt, das alles werden charakteristische Züge und Eigenheiten, nicht allein eines einzelnen Vorkommens, sondern des ganzen Ganges der Gestaltung in jedem gegebnen wirklichen Krystallisationssystem dieser Abtheilung.

Zu den dreierlei Säulen, zu welchen im allgemeinen die dreierlei Flächen-Paare eines und desselben Granatoïds die Seitenflächen geben, liefern die dreierlei Flächen unsers Oblong-Prisma's oder des rechtwinklichen Parallelepipedes dieses Systems, jede einzeln — nebst der ihr parallelen —, die gerad angesetzten Endflächen. Man überblickt leicht im allgemeinen die

grofse Mannichfaltigkeit von Erscheinungen, in welche sich der *Habitus* oder das allgemeine Ansehen eines solchen Systemes verzweigen kann. Die Säulen verändern sich durch symmetrische Zuschärfungen oder gerade Abstumpfungen ihrer zweierlei Seitenkanten. Die rechtwinklich vierseitige Säule, welche jederzeit durch gerade Abstumpfung beider Kanten entstehen kann, unterscheidet sich von der des viergliedrigen Systems durch den ungleichen Werth der Seitenflächen. Die Endigungen der Säule sind aufser der gerad angesetzten Endfläche symmetrische Zuschärfungen, zwei-und-zweiflächige Zuspitzungen (aus zwei Zuschärfungen, die sich rechtwinklich kreuzen, zusammengesetzt), oder endlich zwei-und-zweikantige Zuspitzungen, nebst den verschiedenen Verbindungen dieser aller unter einander. Durch alle Arten und Weisen der Erscheinung leuchtet der deutlich ausgeprägte Charakter des zwei-und-zwei-gliedrigen Systems unverkennbar hindurch. Die Zahl des Maximums von Flächen gleicher Art, welche beim sphäroëdrischen Systeme 48, beim viergliedrigen 16 war — die parallelen Flächen hier jede für sich gezählt — ist im zwei-und-zwei-gliedrigen System 8; und ihre Reductionen blofs die auf 4 und 2.

c. Zwei-und-eingliedriges System.

Das zwei-und-eingliedrige System zeigt auf eine auffallende Weise jene Erscheinung, deren Vorkommen wir schon im sphäroëdrischen System genugsam nachgewiesen haben: dafs nämlich von gewissen ursprünglich (der Lage, dem geometrischen Verhältnisse nach etc.) gleichen Gliedern die einen verschwinden, während die andern die vorwaltenden oder alleinigen werden. Im allgemeinen stehen die zwei-und-eingliedrigen Systeme zu den zwei-und-zweigliedrigen in einem ähnlichen Verhältnifs, wie oben die hemisphäroëdrischen zu den homosphäroëdrischen, oder überhaupt wie hälftflächige zu vollflächigen. Zwar fanden sich auch im zwei-und-zweigliedrigen System Spuren eines gewissen Zurücktretens, nämlich unter den dreierlei zusammengehörigen Paaren von Flächen; ja es charakterisirte dies sogar den Gang der Bildung im zwei-und-zwei-gliedrigen System, dafs von diesen dreierlei Paaren immer die einen oder die andern die vorherrschenden wurden. Auch kann man diese drei Paare Glieder gleicher Stufe nennen; aber sie waren doch nicht gleich, sondern ungleich; und eben nach Maafsgabe ihrer Ungleichheit treten die einen vor, die andern zurück in der Bildung. Hier im zwei-und-ein-gliedrigen Systeme dagegen tritt das Ver-

hältnifs von Vorherrschen des einen und Zurücktreten des andern Gliedes zunächst ein zwischen den zweierlei Flächen eines und desselben Paares.

Nachdem nämlich das eine der drei zusammengehörigen Paare aus der Begränzung gänzlich verschwunden und gleichsam schon vergessen ist, und von den zwei übrig gebliebenen das eine sich vorherrschend zur Säule aufgeworfen hat, entsteht nun ein neues Verdrängungsverhältnifs zwischen den zwei übrig gebliebenen Zuschärfungsflächen des Endes untereinander. Eine wird unter diesen die vorwaltende, die andre wird zurückgedrängt und verschwindet. So wird aus der Säule mit der Zuschärfung die geschobne vierseitige Säule mit schief angesetzter Endfläche, und dies ist als der einfachste charakteristische Körper dieser neuen Abtheilung anzusehen. Die Seitenflächen haben noch, wie vorher, gleichen Werth unter sich; die Endfläche ist noch, wie sie es vorher als Zuschärfungsfläche war, auf eine der Seitenkanten der Säule gerad aufgesetzt *) (welches niemand, der die Wernersche Sprache kennt, mit dem Schief-Angesetzten, welches ihr zugleich zukommt, verwechseln wird); beides sind wesentliche und unerlafsliche Bedingungen für das, was wir unter unserm Hauptkörper des zwei-und-eingliedrigen Systems, der geschobnen vierseitigen Säule mit schief angesetzter Endfläche verstehen. Man könnte diesen Körper das symmetrische Parallelepiped, oder das symmetrische Hexaëder, und vorzugsweise, nennen; denn das ist er; durch eine Ebne getheilt, welche durch diejenigen beiden sich entgegengesetzten Seitenkanten gelegt wird, auf welche die Endflächen aufgesetzt sind, zerfällt er symmetrisch in zwei gleiche, aber sich umgekehrt ähnliche Hälften. Allerdings zerfällt aber auch das Rhomboëder und der Würfel von einer, durch je zwei entgegengesetzte Endkanten (beim Würfel: Kanten überhaupt) gelegten Ebne getheilt, in gleiche Hälften, und zwar der Würfel in congruente, nicht einander umgekehrt ähnliche; deshalb würde die Einschränkung des Namens: symmetrisches Hexaëder u. s. f. auf den Hauptkörper des zwei-und-eingliedrigen Systems nur conventionell geschehen können; indefs wäre sie wohl zulässig, besonders um der einen ausgezeichneten Richtung der Theilung willen, welche ihm das Recht auf diesen Namen verschafft. Da indefs ein noch bezeichnenderer Name für ihn gar wohl zu wünschen, und im Zusammenhange mit unsern obigen Bezeichnungen nicht schwer zu finden ist, so würde ich am liebsten

*) D. i. gegen die beiden die Kante einschliefsenden Seitenflächen gleich geneigt.

den des zwei-und-einflächigen Parallelepipeds (oder Hexaëders), kürzer den Namen Zwei-und-Einflächner, griechisch, und in der wissenschaftlichen Sprache am bequemsten, Hen-dyoëder (die Stellung der Zahlen im Griechischen des Wohlklangs wegen umgekehrt wie im Deutschen) vorschlagen. Immer würde der Name bezeichnen, wie von den Flächen, die den Körper begränzen, zwei — nebst den ihnen parallelen — von gleichem Werthe, gleichen Eigenschaften, und eine dritte — nebst der ihr parallelen — eine einzelne, von jenen im Werthe und den Eigenschaften verschiedene ist *).

In den weiteren Fortbildungen eines solchen Systems zeichnet sich eine Bildung besonders aus, nämlich: wo an die Stelle der schief angesetzten Endfläche ein Paar von Flächen mit schief laufender Endkante tritt **), dieses Paar wieder unter sich von gleichem Werthe, und abweichend von den übrigen, die schief laufende Endkante aber in der Richtung der vorher schief laufenden Endfläche selbst, so dafs diese wieder zur Abstumpfungsfläche der schief laufenden Endkante wird. Ein solches System, in welchem dieser Charakter vorherrscht, augitartig zu nennen, würde der Analogie gemäfs seyn, da der Augit eins der ausgezeichnetesten Beispiele dieser Art unter den nicht eben seltenen Fällen des Vorkommens solcher Krystallisationssysteme giebt.

Der Charakter des Systems bleibt in allen Verzweigungen seiner Gestalten leicht kenntlich, nämlich: Symmetrie in der Säule, und Unterschied der vorderen und hinteren Seite jedes Endes; die rechte und linke Seite des Endes sind sich gleich, und umgekehrt-ähnlich. Der Unter-

*) Der Name Rhombus, welchen man solchen Körpern wohl noch in den Wernerschen Krystall-Beschreibungen beigelegt findet, kann auf keinen Fall beibehalten werden. Denn abgesehen davon, dafs dieser Name, wie bekannt, eine Fläche, und keinen Körper bezeichnet, so entsteht durch ihn auch die Verwechselung von dreierlei ganz wesentlich verschiednen Körpern unter einander, welchen allen dieser Name beigelegt worden ist, nämlich 1) unsers Rhomboëders, d. i. desjenigen schiefwinklichen Parallelepipeds, dessen Flächen alle von gleichem Werthe und gleichen Eigenschaften sind; 2) desjenigen schiefwinklichen Parallelepipeds, von welchem wir hier sprechen, und dessen Flächen von zweierlei Art sind, zwei, nebst ihren parallelen, von gleichem Werthe unter einander, aber verschieden von der dritten; endlich 3) desjenigen, dessen Flächen von dreierlei verschiednem Werthe sind. Eine fernere Verwechselung dieser wesentlich verschiedenen Krystallformen würde künftig der Wissenschaft nur nachtheilig seyn.

**) Wenn die schief laufenden Zuscharfungen des einen Endes mit den ihnen parallelen des andern in der Seitenkante der Saule unter sich in Berührung kommen, so entsteht abermals ein Octaëder eigner Art, welches ich ein hendyoëdrisches nennen möchte.

schied der vorderen und hinteren Seite des Endes aber zeigt sich sowohl bei den einzelnen schief laufenden Endflächen, als auch bei den verschiednen Zuschärfungen mit schief laufenden Endkanten, und bei deren Combinationen unter sich und mit jenen.

Es findet sich ein deutlicher Uebergang von der vorigen Abtheilung der zwei-und-zweigliedrigen Systeme, in diese hier, durch eine Reihe von Fossiliengattungen hindurch. In den einen kommen, wie im 2-und2-gliedrigen System, beide zusammengehörige schief laufende Endflächen, die vordere sowohl als die hintere, als Zuschärfungsflächen des Endes wirklich vor, in einigen sogar vom wirklichen Gleichgewichte an bis zum entschiedenen und regelmäfsigen Uebergewicht der einen über die andere; in den andern kommt die zweite (hintere) Fläche kaum je, in manchen gar nicht mehr zum Vorschein. Die physischen Eigenschaften, in Glanz, Ansehen, Streifung der Flächen, in dem ihr correspondirenden blättrigen Bruch u. s. f., steigen bei den ersten bis zur gänzlichen Gleichheit zwischen den sich einander entgegenstehenden Flächen, bei den letzteren sinken sie, selbst wo die hintere Fläche noch zugegen ist, man möchte sagen, bis zur Unvergleichbarkeit der herrschenden mit denen ihres Gegenstückes, ja bis zum wirklichen Verschwinden der letzteren herab; ohne die Stufenreihe beobachtet zu haben, würde man vielleicht kaum auf die Vermuthung kommen, dafs da, wo sie nicht mehr sichtbar ist, noch von einer verborgenen Existenz von ihr die Rede seyn könne; so aber bleibt sie, als die verdrängtwordene in der Erscheinung, dem Gedanken noch ganz unzweifelhaft gegenwärtig.

Ich werde den Ausdruck: zwei-und-eingliedriges System, nur von solchen Krystallisationssystemen gebrauchen, in welchen ich das Vorhandenseyn eines zweiten dem herrschenden ebenbürtigen Gegengliedes in der Endigung behaupte und fordere, auch da, wo es in der Erscheinung völlig unterliegen und unsichtbar geworden seyn sollte. Oefters ist eine solche Annahme auch den bisherigen Haüy'schen Bestimmungen der geometrischen Eigenschaften solcher Systeme gemäfs; zuweilen aber nöthigt sie, von Haüy's Bestimmungen abzugehen. Gesetzt, es fänden sich in der Wirklichkeit Fälle, wo diese Annahme mit den beobachteten Erscheinungen an solchen Systemen sich nicht in Einklang bringen liefse, so würde dann die Absonderung und die Wahl eines neuen Namens für sie nöthig werden; sie würden mit unserm zwei-und-eingliedrigen Systeme das Wesentliche gemein haben, dafs ihre Hauptform als eine geschobne vierseitige Säule von

gleichem Werthe der Seitenflächen, und mit schief angesetzter, auf eine der Seitenkanten der Säule gerad aufgesetzten Endfläche angesehen werden könnte, der Unterschied aber würde darin bestehen, dafs das Zugehörige einer versteckten Gegenfläche, gegen die vorhandene schief angesetzte Endfläche, gleicher aber umgekehrter geometrischer Lage gegen diese, geradezu geläugnet würde, oder dafs aus der ersten Supposition die Art und Weise der weiteren Entwickelung des Systemes unerklärbar bliebe. Allein, ich glaube nicht, dafs es einen solchen Fall in der Wirklichkeit giebt. Welche unter den bekannten hier der Gegenstand besondrer Probleme seyn möchten, davon kann erst anderwärts die Rede seyn.

Eine merkwürdige allgemeine Eigenschaft, welche aus der Natur unsrer zwei-und-ein-gliedrigen Systeme hervorgeht, ist die Anlage, die in ihnen liegt: den ganzen Bau der Endkrystallisation auf gegebner identisch bleibender Säule doppelt oder zweimal zu entwickeln, je nachdem nämlich von den beiden ursprünglich einander gleichgeltenden, oder, wie ich es oben nannte, ebenbürtigen, schief laufenden Endflächen (wenn sie im Gleichgewicht stehen: Zuschärfungsflächen) entweder die eine oder die andre die Function der verdrängenden oder der verdrängtwerdenden Fläche bekommt, und dieser Rolle gemäfs in der weiteren Gestaltung fortwirkt. Gemäfs dem Gegensatz der vorderen und hinteren Seite desselben Endes, darf man sich nur die vorherrschend gewordene schief angesetzte Endfläche das einemal als der vorderen, das andremal als der hinteren Seite eines und desselben Endes angehörig denken, um diese zwei sich völlig gleichenden Hälften, in welche die Gestaltung des Systemes zu zerfallen die Anlage in sich trägt, sich sogleich anschaulich zu machen, und bei der Erscheinung der einen die gleiche Möglichkeit und ursprüngliche Begründung der andern in Gedanken ihr gegenüber zu stellen.

d. Ein-und-zweigliedriges System.

Unsere bisherige Darstellung der zwei-und-eingliedrigen Systeme entspricht der Voraussetzung, dafs von den zwei Paaren *) von Flächen, welche zur Begränzung des Hauptkörpers concurrirten, dasjenige das in der Ausdeh-

*) Man denke zurück an die drei zusammengehörigen Paare des zwei-und-zweigliedrigen Systemes, und wie bei dem zwei-und-eingliedrigen das eine derselben ganzlich verschwunden, von den zwei übrigen aber das eine vollstandig vorhanden, das andre halbvortretend geworden war; s. oben S. 316.

nung vorwaltende zu seyn pflegt, in dessen Glieder jenes gegenseitige Verdrängungsverhältnifs nicht eintritt, sondern wo diese, eins wie das andre, sich zeigen, und beide beim Vorherrschen in der Gestalt die Seitenflächen der insgemein in die Länge sich dehnenden Säule geben. Indefs, der entgegengesetzte Fall findet sich auch, obwohl seltner. Mit der schief angesetzten Endfläche werden andre der einzelnen, abgeleiteteren, auch schief angesetzten Endflächen (immer einer Zuschärfung angehörig, von welcher die eine Fläche wegfällt, während die andre sich ausdehnt), oder auch mehrere solcher einzeln gewordener abgeleiteter unter einander, die vorherrschenden an der ganzen Gestalt; sie dehnen sich gemeinschaftlich zu dem Ansehen einer neuen Säule aus, zu deren Seitenflächen sie werden; man möchte diese Säule in Bezug auf die erste, und wegen des verschiedenen Werthes ihrer Seitenflächen, allenfalls die Pseudo-Säule oder die unsymmetrische nennen. Blofs parallele Flächen sind in einer solchen Säule unter sich gleich; Seitenflächen von verschiedener Richtung, — so viele ihrer sich immer bilden mögen, — alle verschiedenen Werthes. Bleiben die vorigen Seitenflächen, so werden sie an dieser neuen Säule zu Zuschärfungsflächen des Endes, aber auf die Seitenkanten der neuen Säule auf eine eigenthümliche Weise schief aufgesetzt *), dennoch beide auf gleiche Weise und ihre Kante unter sich horizontal, wenn die neuen Seitenkanten der Säule vertikal gestellt werden; also von den augitartigen gänzlich abweichend im Ansehen. Gerad aufgesetzt erscheinen diese Zuschärfungsflächen auf eine gewisse bestimmte Abstumpfungsfläche jener neuen Seitenkante, welche nicht selten auch vorhanden ist; diese Abstumpfungsfläche ist dann aber in bestimmtem Grade verschieden geneigt gegen die zwei Seitenflächen, deren Kante unter sich sie abstumpft.

Das ausgezeichneteste Beispiel der Art liefert in der Wirklichkeit der Pistacit (Haüy's Epidot); nächst ihm der (zum Titanit gerechnete) Sphen; noch ein andres, jedoch zweifelhaftes, und mit mehrerem Rechte vielleicht zur folgenden Abtheilung zu rechnendes, allenfalls der noch nicht hinlänglich gekannte Cyanit **). Wir können dem pistacit- oder sphenähnlichen System füglich

*) D. i. gegen die Seitenflächen, welche die erwähnte Kante einschliefsen, verschieden geneigt.

**) Der Säule nach kann er ganz schicklich hier noch als Beispiel dienen; sie hat ebenfalls den Charakter des Unsymmetrischen, und die Gestalten des Fossils selbst einen ganz entschiedenen Saulencharakter; die Endigung der Säule scheint jedoch statt der gepaar-

füglich den Namen eines gewendeten zwei-und-eingliedrigen Krystallisationssystemes geben; denn durch Wendung geht, was im zwei-und-eingliedrigen schief angesetzte Endfläche war, in das Ansehen der Seitenfläche der neuen Säule über, wie sie sich der Betrachtung am natürlichsten darbietet; und durch die gleiche Wendung wird die erste Seitenfläche zur Zuschärfungsfläche an der veränderten Gestalt; umgekehrt aber auch durch Wendung kehrt die neue Erscheinung ganz in die Analogie der ersten wieder zurück.

Wir nennen indefs lieber noch dieses System kürzer ein ein-und-zweigliedriges, und man kann leicht conventionell festsetzen, dafs von den zwei ganz ähnlich gebildeten Namen der des zwei-und-eingliedrigen für das Vorherrschen der gepaarten, und der des ein-und-zweigliedrigen für das Vorherrschen der (durch Verdrängung) zu einzelnen gewordenen Flächen gebraucht würde.

Beide aber machen sichtlich blofs auf einer niederen Stufe des Unterschiedes stehende Abtheilungen, und man kann das ein-und-zweigliedrige System als einen blofsen Nebenausläufer des zwei-und-eingliedrigen betrachten.

c. Ein-und-eingliedriges System.

Es giebt einige seltenere Beispiele von Krystallisationssystemen — Axinit und Kupfervitriol sind die ausgezeichnetesten —, welche, für sich betrachtet, so wenig Symmetrie in ihrer Bildung verrathen, dafs auch die Regeln von Zusammengehören einer Mehrheit von Gliedern, welche wir bisher beobachten und verfolgen konnten, an ihnen zu verschwinden scheinen, und die von ihnen gebildeten Formen durch Flächen bestimmt werden, welche — abgesehen von dem Gesetz, dafs je zwei Flächen unter sich parallel und gleichen Werthes bleiben, — ohne das Gepräge einer gemeinsamen Begründung derer von verschiedenen Richtungen, jede nur einzeln, gleichsam nach der Laune der Natur, einzutreten scheinen, wie etwa der Mathematiker ganz beliebig Ebnen durch einander legt, um sich einen Körper zu begränzen.

Indefs, vertrauter geworden mit jenem allmählichen Verschwinden gewisser Glieder aus einer gröfseren harmonisch zusammengeordneten Mehr-

ten Endigungen des Pistacits etc. wiederum von vereinzelten Flächen gebildet zu werden, und darum das System dem ein-und-eingliedrigen anzugehören.

heit, leitet uns die Spur, welche wir in Auffassung und Deutung der Gestalten der vorigen Abtheilung verfolgten, deutlich genug in eine neue hinein, in welcher ein zweites Verdrängungsverhältnifs auch zwischen die Glieder desjenigen Paares von Flächen sich einsetzt, welches in dem zwei-und-eingliedrigen Systeme, im Ebenmaafs nur Gleichgewicht, vollständig vorhanden war. Jetzt denken wir uns gleichen Zwiespalt, gleiches Zurücksetzen und Verdrängen zwischen ihnen, wie vorhin und zwischen dem, was uns im zwei-und-eingliedrigen System schief angesetzte Endflächen, im zwei-und-zweigliedrigen ursprünglich Zuschärfungsflächen, oder Flächen des zweiten Paares bedeutete; denken wir uns statt der verdrängten Glieder, wie oben, neue abgeleitetere, von den verdrängten, wie von den bleibenden, verschiedene im Werth, und in der ganzen Stellung im System; denken wir uns in allem, was weiter abgeleitet werden mag, durchaus dem Einzeln-sich-vorgedrängt-haben der ersten Glieder gemäfs, lauter einzelnstehende neue Glieder, deren Entgegengeordnete nur über die unmittelbare Anschauung hinaus durch den Gedanken allein ihnen entgegen zu halten sind; so befinden wir uns vor einem Gebiete von Formen, welchen wir im Zusammenhang mit dem vorigen keinen bezeichnenderen Namen beilegen können, als den: ein-und-eingliedrige; andeutend, wie jedes Glied — nebst seinem parallelen — einzeln stehend in seiner Erscheinung, doch wohl ein aus seiner ursprünglichen Zweiheit herausgerissenes seyn könne, wie früher es eine bewährte Erfahrung für uns geworden ist, dafs von ursprünglich einander entgegengeordneten Gliedern eins oder das andre in der Erscheinung zurückweicht.

Die für den natürlichen Hauptkörper eines solchen Systemes zu nehmende Gestalt wird ein irreguläres Parallelepiped seyn; jede der dreierlei Flächen (— eine jede nebst der ihr parallelen als Eine genommen —) verschieden im Werthe von jeder der andern; verschieden in physikalischen wie in geometrischen Eigenschaften. Möchte man diese Gestalt das irreguläre, oder unsymmetrische, oder auch blofs verschobene Hexaëder oder Parallelepiped nennen. Uns wird der Name Ein-und-Einflächner für dasselbe gestattet seyn *).

Nimmt man Rücksicht auf die zur Begränzung des Parallelepipeds, und eines Körpers überhaupt, erforderlichen mindestens drei Ebnen (ver-

*) Man vergleiche hiemit die Note *) S. 317.

schiednerlei Richtung), welche hier alle einzeln und verschieden unter sich sind, so möchte man geneigt seyn können, den Körper, wie das System überhaupt, ein-, ein-und-eingliedrig zu nennen; allein dem Schleppenden einer solchen Benennung wird durch den hinlänglich bezeichnenden Namen ein-und-eingliedrig ausgewichen, ja die Consequenz in der hier aufgestellten allgemeineren Namengebung fordert sogar und rechtfertiget die letztere Benennung.

So selten die ein-und-eingliedrigen Systeme überhaupt schon sind, so glaublich ist es, dafs wir, ohne der Natur Gewalt anzuthun, sie alle als fortgesetzte Glieder jener Reihe betrachten können, welche, bei ursprünglich gegebenem Verhältnifs von dreierlei verschiedenen unter einander sämmtlich rechtwinklichen Axen oder Grunddimensionen, von den zwei-und-zweigliedrigen Systemen an, durch die zwei-und-eingliedrigen fort, bis in sie hinein sich erstreckt, und sie selbst mit umfafst; oder dafs wir nicht ohne Grund ihre einzeln erscheinenden Flächen als vereinzelte betrachten, welche ihre Gegensätze, als ursprünglich ihnen zugehörig, und zu ihrer eignen Existenz als gegenseitig bedingend mitgegeben, fordern, und nur durch mehr und mehr eingetretenen Unterschied zwischen den sich entgegengeordneten Gliedern, durch stärker und stärker gewordene Differenzirung in den Elementen des Gestaltungsactes, aus der Erscheinung an der Selbstbegränzung oder der selbstbestimmten Oberfläche des Körpers sie verdrängt haben.

So wären dann diese ein-und-eingliedrigen Systeme mit den zwei-und-ein-, und den zwei-und-zweigliedrigen, als auf der Verschiedenheit dreier unter sich senkrechter Axen als ihrer ersten gemeinsamen Grundlage beruhend, in Einer Hauptabtheilung vereinigt, und in dieser gemeinschaftlich den viergliedrigen Systemen, so wie dem Ausgleichungsgliede aller dieser Unterschiede, dem sphäronomischen Systeme entgegengesetzt. Eine gröfsere Regellosigkeit oder Abweichung von der Einfachheit der Structurgesetze an den einen oder den andern unserer ein-und-eingliedrigen Systeme würden wir nur dann anerkennen, wenn uns die Beobachtung dazu nöthigte.

f. Sechsgliedriges System.

Noch haben wir von den sechsgliedrigen und den drei-und-drei-gliedrigen Systemen zu sprechen, welche einen nicht minder harmonischen Bau zeigen, als alle die bisher betrachteten.

Die ihnen beiden gemeinschaftliche Grundlage ist, wie oben schon angegeben wurde, diese: gegen Eine Hauptdimension stehen drei andre, unter sich gleiche, und von der ersten verschiedene, rechtwinklich; jene kann die Haupt- oder Längendimension, diese die Queerdimensionen heifsen. Die letzteren drei liegen nothwendig in Einer Ebne, welches die auf der Hauptdimension senkrecht stehende ist; die Queerdimensionen schneiden sich, weil sie gleich sind, unter 60° in ihr. Das Verhältnifs des sechsgliedrigen und des drei-und-dreigliedrigen Systems gegen einander ist das der oben im allgemeinen so genannten homoëdrischen und hemiëdrischen Systeme.

Das sechsgliedrige ist unter ihnen dasjenige, welches mit vollzähligen Gliedern erscheint, so viel ihrer der Anlage nach gleichartige in den gegebenen Dimensionen gegründet sind; im Gegentheil zeigt das drei-und-dreigliedrige in seinen eigenthümlichen Formen von jener Gesammtheit der Glieder nur die Hälfte; die zweite Hälfte ist bald bis zum völligen Verschwinden hinweggedrängt, bald nur in einem Zustand des Ueberwogenseyns noch vorhanden, und so aller Mittelglieder bis zum völligen Gleichgewicht mit jenen, und zur Herstellung des Sechsgliedrigen fähig; so verknüpft die Erscheinung beide Extreme unter sich in einer ununterbrochenen Reihe.

Das sechsgliedrige System hat zum Hauptkörper jene sechsgliedrige Doppelpyramide, oder jenes sechsgliedrige Dodekaëder, deren bekanntestes Beispiel die doppelt sechsseitige Pyramide des Quarzes abgiebt. Möchte man sie daher den Quarzkörper nennen *), um einen kurzen, bündigen Namen zu erhalten; nur dafs man dann darüber übereinkommen müfste, diesen Namen, welcher für sich nur den bestimmten, speciellen Fall, so wie er der Quarzgattung zukommt (mit einem bestimmten Verhältnifs zwischen den Längen- und den Queerdimensionen), richtig bezeichnet, des Bedürfnisses halber auf die ganze Gattung solcher Körper — für jedes beliebige Verhältnifs der Längendimension zu den Queerdimensionen — auszudehnen. Wollten wir, bei dem beständig wiederkehrenden Bedürfnifs eines kurzen allgemeinen Ausdrucks, auch den reiner geometrischen Namen Dihexaëder

*) Wenn es erlaubt ist, besonders um des allgemeineren Gebrauches des Namens in anderen Sprachen willen, ihm die Endigung Quarzoïd oder Quarzoëder zu geben, so wird am schicklichsten jener zum generischen Namen des Körpers, dieser zu dem specifischen für den Fall des Quarzes selbst gewählt werden können.

(Doppelhexaëder) in Vorschlag bringen, so könnte doch der Beisatz: sechsgliedriges, kaum vermieden werden, da es noch andre Körper giebt, welche auf den Namen Dihexaëder oder Zweimal-Sechsflächner gleiche Ansprüche haben würden, wozu wir übrigens das Granat-Dodekaëder, und das des Schwefelkieses, gar nicht einmal rechnen möchten.

Die allgemeinen Eigenschaften unsers Quarzoïdes sind klar. Eine Haupt- oder Längen-Axe; drei gleiche Queeraxen; die Endigungen sämmtlicher Axen sind die Ecken des neuen Körpers; zwei Endspitzen; sechs in Einer Ebne liegende und gleiche Lateralecken; die Flächen sind durch je zwei benachbarte Enden zweier Queeraxen und ein Ende der Längenaxe gelegt, eben so, wie die Flächen des regulären Octaëders durch je drei Enden der drei gleichen rechtwinklichen Axen des sphäroëdrischen Systems. Die Flächen des Quarzoïdes sind daher lauter gleiche und ähnliche gleichschenkliche Dreiecke, alle gleich gegen die Hauptaxe geneigt, gleiche Endkanten unter sich bildend; die Lateral- oder Seitenkanten, wieder gleich unter sich, in Einer Ebne liegend, und die gemeinschaftliche Grundfläche beider Pyramiden, als ein reguläres Sechseck, umschreibend. Alles dies geht aus dem Gegebenseyn der drei unter sich gleichen Queerdimensionen gegen eine auf ihnen allen senkrecht stehende Längendimension, und aus der Construction des Hauptkörpers, analog der des regulären Octaëders, deutlich hervor.

Suchen wir gegen das Quarzoïd seinen Gegenkörper, in dem Sinn, wie es der Würfel ist gegen das Octaëder u. s. f., so erhalten wir die reguläre sechsseitige Säule, deren Seitenflächen, gleichen Werthes unter sich, auf den Queerdimensionen unsers Systems senkrecht stehen, wie die Endfläche auf der Längendimension. Ist der Abstand der Seitenfläche vom Mittelpunkt gegen den Abstand der Endfläche von demselben in dem nämlichen Verhältnifs, wie die Queerdimensionen zur Längendimension sind, so ist damit eine bestimmte reguläre sechsseitige Säule, von bestimmtem Verhältnifs von Höhe zur Breite, festgesetzt, welche als einem individuellen sechsgliedrigen System insbesondre angehörig betrachtet werden kann. Während die Endspitzen des ihm correspondirenden Quarzoïdes in die Mitten der Endflächen dieser Säule fallen, so liegen zugleich die Seiten- oder Lateralecken des ersteren in den Mitten der Seitenflächen der Säule.

Uebrigens ist der Unterschied der Endfläche von den Seitenflächen als ein wesentlicher einleuchtend, mithin die Säule selbst schon nicht in dem Sinn ein einfacher Körper, dafs ihre Flächen alle von gleichem Werthe wären; in welchem Sinn das Quarzoïd noch ein solcher ist; vergl. S. 307.

Es würde jetzt überflüssig seyn, den Körper näher bezeichnen zu wollen, welcher für das sechsgliedrige System das seyn würde, was das Granatoëder für das sphäroëdrische ist. Wir bedürfen seiner näheren Beleuchtung vorläufig nicht.

Alle abgeleitetere Flächen, welche in dem 6gliedrigen Systeme möglich sind, gehören wiederum anderen Quarzoïden, oder auch einer Gattung von doppelt-zwölfseitigen Pyramiden mit abwechselnd stumpferen und schärferen Endkanten (kürzer also: 6-und-6-kantige Doppelpyramiden oder Di-Dodekaëder zu nennen), oder endlich den Seitenflächen einer andern regulär-6seitigen, und denen einer zwölfseitigen Säule an, wiederum mit abwechselnd stumpferen und schärferen Seitenkanten, d. i. einer 6-und-6-kantigen Säule. Das Maximum von Flächen gleicher Art ist in diesem Systeme 24; Reductionen dieser Zahl finden Statt auf 12, auf 6, und auf 2.

g. Drei-und-dreigliedriges System.

Das drei-und-dreigliedrige System tritt mit einem neuen Hauptkörper, dem Rhomboëder *), auf. Er ist zwar nur eine Umgestaltung

*) Ich gab diesen Namen dem Körper, von welchem hier die Rede ist, früher schon in der von Karsten unternommenen, und mir späterhin mehr und mehr übertragenen Uebersetzung des Haüy'schen Lehrbuches, statt des offenbar bei uns wenigstens nicht zulassigen Namens Rhomboïd, welchen ihm der verdiente Urheber jenes Werkes beigelegt hatte. Der Name hat auch Beifall gefunden, und ich freue mich seiner allgemeineren Verbreitung. Um so weniger aber kann ich es billigen, dafs er neuerlich wieder auf eine ganz falsche Weise gebraucht worden ist, nämlich für jede Art geschobner Parallelepipede, welches nicht allein Mifsverständnisse, sondern wieder völlige Verwirrungen der Begriffe bewirken mufs; und ich warne vor diesem Mifsbrauche, da jede neue Verwirrung von Begriffen, die längst aufgeklärt waren, ein Rückschritt in der Wissenschaft ist. Rhomboëder ist nur ein solches geschobnes Hexaëder, dessen Flachen alle von gleichem Werth unter sich, und eben deshalb auch lauter unter sich gleiche und ähnliche Rhomben sind; es ruht auf den oben auseinandergesetzten Grundbedingungen, und ist dem drei-und-dreigliedrigen System ausschliefslich eigen; dieser Gattung von Körpern aber einen eignen Namen zu geben, und diesen Namen auf sie allein einzuschränken, ist unzweifelhaft nothwendig. Man vergl. hiemit die Anmerk. 1. S. 317.

des Quarzkörpers, so wie etwa das Tetraëder es vom Octaëder ist; man könnte ihn den Hälftflächner des Quarzoïdes nennen; allein der Zusammenhang mit diesem ist doch äufserlich so versteckt, dafs man, unvorbereitet, ihn nicht schneller gewahr wird, als den zwischen Tetraëder und Octaëder.

Wirklich ist es die Hälfte der Flächen des Quarzkörpers — jede streng in ihrer Lage bleibend — und zwar die abwechselnd an diesem herumliegenden —, welche für sich allein übrig bleibend, und die zweite, mit ihnen abwechselnde Hälfte verdrängend, sich so weit ausdehnen, bis sie wieder einen Raum von allen Seiten begränzen, und so den ganzen äufsern Umrifs des neuen Rhomboëders bilden. Von jeder bleibenden Fläche aus verschwinden die anliegenden desselben Endes, eben so die jenseit der Endspitze gegenüberliegende; die abwechselnden bleiben und vergröfsern sich gemeinschaftlich über die verschwindenden hinaus; am entgegengesetzten Ende bleiben und verschwinden mit den parallelen die parallelen. Es entsteht ein Parallelepiped, dessen Flächen, wie schon aus dieser Genesis einleuchtet, unter einander gleichen Werthes sind, daher auch von gleicher Form, unter gleichen Winkeln unter sich geneigt, gleichseitige Parallelogramme, im allgemeinen Rhomben. Die Längenaxe des Quarzkörpers bleibt die nämliche für das aus ihm entstandene Rhomboëder; die an ihren Enden anliegenden Ecken unterscheiden sich als Endspitzen von den sechs neugebildeten unter sich gleichen Seiten- oder Lateralecken. Diese liegen nicht in Einer Ebne; je drei dem einen Ende nähere liegen in einer auf der Axe senkrechten Ebne, die drei dem andern Ende näheren in einer zweiten. Alle sechs liegen im Zickzack um eine eingebildete gemeinschaftliche Grundfläche zweier dreiseitiger Pyramiden herum, aus welchen man sich den Körper nicht unpassend zusammengesetzt denken kann *).

*) Es ist in der bisherigen Wernerschen Sprache die Ansicht des Rhomboëders als doppelt dreiseitiger Pyramide die Seitenflachen der einen auf die Seitenkanten der andern aufgesetzt, die gemeinschaftliche Grundflache im Zickzack liegend), ohnstreitig die beste, obwohl auch damit noch nicht ausgedruckt wird, dafs die Flachen der Pyramide gegen die Axe gleich geneigt, überhaupt von gleichem Werthe und gleichen Eigenschaften sind; es kann also selbst diese sehr sprechende Darstellung, — die Weitlauftigkeit des Ausdrucks, wenn er oft wiederkehren soll, nicht in Betracht gezogen, — eines noch bezeichnenderen und zugleich kürzeren Namens für die Sache, wie Rhomboëder, nicht füglich entbehren.

Alle auf der Axe rechtwinklichen Queerschnitte, welche zwischen die Endspitzen und Lateralecken fallen, sind, wie der durch je drei obere oder je drei untere Lateralecken gelegte Queerschnitt selbst, gleichseitige Dreiecke; alle zwischen die Lateralecken fallende, ebenfalls auf der Axe rechtwinklichen Queerschnitte sind gleichwinkliche Sechsecke, je nach ihrem verschiedenen Abstand von den beiden Endspitzen die einen oder die andern drei Seiten die gröfseren; der mitten zwischen beiderlei Lateralecken (den oberen und den unteren) hindurch, folglich durch die Mitten der Lateralkanten (und zugleich durch den Mittelpunkt des Körpers oder die Mitte der Axe) gehende Queerschnitt ist das reguläre, d. i. gleichseitige und gleichwinkliche Sechseck.

Jetzt ist es nicht mehr schwierig, die eigenthümlichen Stellen im äufseren Umrifs des Quarzkörpers in dem des Rhomboëders wieder aufzufinden, und zuförderst die Endpunkte der Queerdimensionen, wie wir sie im Quarzkörper hatten. Der durch den Mittelpunkt des Rhomboëders nämlich gehende Queerschnitt ist identisch mit dem ihm entsprechenden im Quarzoïd, welcher dort die gemeinschaftliche Grundfläche der beiden sechsseitigen Pyramiden hiefs. Die Lateralecken des Quarzoïdes liegen also in den Mitten der Lateralkanten des Rhomboëders; und die nämlichen Queerdimensionen, welche wir im Quarzoïd von einer Lateralecke nach der entgegengesetzten hin haben, liegen folglich in seinem Hälftflächner, dem Rhomboëder, in der Linie von der Mitte einer Lateralkante nach der Mitte der ihr entgegengesetzten *).

Es wird der Erinnerung nicht bedürftig seyn, dafs einem gegebenen Quarzoïd von bestimmtem Verhältnifs der Längen- zu den Queerdimensionen auch ein bestimmtes Rhomboëder entspricht; die Neigung der Flächen gegen die Axe ist unverändert dieselbe, und durch sie das ganze Rhomboëder bestimmt. Mit der Veränderung dieses Neigungswinkels aber, so wie mit dem veränderten Verhältnifs von Längen- zu Queerdimensionen, ändert sich die ganze Gestalt des Rhomboëders vom scharfwinklichsten bis zum stumpf-

*) Zu mehrerer Erläuterung kann im Haüy'schen Lehrbuch d. Min. die Taf. XL. Fig. 1. u. 2. dienen, in welcher letzteren der Quarzkörper in das ihm zugehörige Rhomboëder eingezeichnet ist.

stumpfwinklichsten *). Ein rechtwinkliches ist der Wendungspunkt zwischen den beiden Hälften der Scharf- und der Stumpfwinklichen; dieser Wendungspunkt ist der Würfel, und es läfst sich dieser Körper vollkommen folgerecht unter den Rhomboëdern mit begreifen, um so mehr, als er unter allen möglichen Verhältnissen, welche zwischen der einen Längen- und den drei Queerdimensionen im Rhomboëder existiren können, eines ausdrückt, und somit ein bestimmtes Glied in der Reihe der Rhomboëder besetzt **). Nur dafs er, als solches betrachtet, eine Beziehuug aller seiner Theile auf Eine Hauptlinie oder Hauptaxe bekommt, welche ihm aufserdem fremd ist, da seine vier durch je zwei entgegengesetzte seiner Ecken gelegten Axen ganz und gar dasselbe, gleichen Werthes und ununterschieden, sind.

Aber der Quarzkörper führt offenbar nicht auf ein, sondern auf zwei solche Rhomboëder, eins dem andern vollkommen gleich und ähnlich; und zu beiden auf gleichem Wege. Denn welche Hälfte abwechselnder Flächen am Quarzoïd vorwaltend, und allein übrigbleibend werde, und welche verschwinde, gilt ganz gleich; die eine, wie die andre, führt auf ein Rhomboëder ganz von den nämlichen Winkeln und Eigenschaften. So kann man sich vorstellen, als ob im Quarzkörper zwei gleiche und ähnliche Rhomboëder mit gemeinsamer Axe, aber die Flächen des einen zwischen die Flächen des andern fallend, sich gleichsam durchdrängen (— der Quarzkörper wäre dann der beiden Rhomboëdern gemeinschaftliche Raum —); einer solchen Ansicht gemäfs habe ich auch früher ***) den Quarzkörper Doppel-Rhomboëder, *dodecaëdron di-rhomboëdricum*, genannt. Allein ich möchte keineswegs die rhomboëdrische Bildung für eine physikalisch-einfachere halten, und die quarzähnliche oder sechsgliedrige für eine zusammengesetzte aus zweien von jenen, als einfacheren Elementen, erklären; eben so wenig als ich es für naturgemäfs halte, wenn man das Octaëder als zusammengesetzt aus zwei Tetraëdern physikalisch ableiten, und das Tetraëder zum physikalisch-einfacheren machen wollte. Vielmehr, bei einem gegebenen Grundverhältnifs gewisser Dimensionen (oder ursprünglicher Wirksamkeit nach

*) Der ebne Endspitzenwinkel durchläuft in der Reihe vom scharfwinklichsten bis zum stumpfwinklichsten Rhomboëder die Werthe von 0° bis 120°; der Neigungswinkel je zweier Flachen in der Endkante die Werthe von 60° bis 180°. Im Würfel werden beide = 90°.

**) Im Würfel ist jenes Verhältnifs das von $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

***) *De indagando formarum crystallinarum charactere geometrico principali diss. Lipsiae*, 1809. 4.

denselben), in denjenigen Stellen, Richtungen u. s. f. gleiche Wirkung zu finden, und gleiche Erscheinungen hervorgehen zu sehen, welche räumlich oder geometrisch ohne Unterschied sind, scheint mir der Physiker als das einfachere anerkennen zu müssen. Unterschied aber in der Wirkung und den aus ihr hervorgehenden Erscheinungen da zu sehen, wo räumlich oder geometrisch gleiche Verhältnisse obwalten, scheint mir ein besonders eintretendes Wirkende, ein Mehreres, ein Mannichfaltigeres noch voraussetzende oder einschliefsende, ein Verwickelteres oder Zusammengesetzteres in dem Acte der Bildung, zu beurkunden. Und so stehe ich nicht im geringsten an, das sechsgliedrige System und den Quarzkörper, wo die geometrisch ununterschiedenen Seitenrichtungen der Queerdimensionen sich gegen beide geometrisch als gleich zu achtende Endpole der Längendimension gleich und unterschiedslos im Acte der Gestaltung betragen, für ein Einfacheres zu erklären, als das Rhomboëder und als das Drei-und-drei-gliedrig-werden des Sechsgliedrigen überhaupt, eben weil im Drei-und-drei-gliedrigen ein Gegensatz, ein verschiedenartiges Verhalten physikalisch da eintritt, wo doch geometrisch kein Unterschied abzusehen war *).

Dies ist meiner Einsicht nach das wahre physikalische Verhältnifs zwischen Quarzkörper und Rhomboëder, sechs-gliedrigem und drei-und-dreigliedrigem System überhaupt, und ihm ganz gleich meine Ansicht vom ursprünglichen Verhältnifs zwischen Octaëder und Tetraëder, wie zwischen allen den Zweigen der Bildungen, von denen die einen vollzählich mit ihren geometrisch gleich begründeten Gliedern auftreten, die andern nur zur Hälfte; die homoëdrischen Systeme sind überall die physikalisch-einfacheren, die hemiëdrischen sind aus jenen abgeleitet.

Unter den abgeleiteteren Bildungen dieses Systems finden sich die beiden regulären sechsseitigen nebst den 12seitigen (6-und-6-kantigen) Säulen dem 3-und-3-gliedrigen Systeme mit dem 6-gliedrigen gemein. Eigenthümlich sind ihm die sehr mannichfaltigen Rhomboëder selbst, deren eine

*) In einer späteren Abhandlung habe ich nachgewiesen, wie dieses verschiedenartige und entgegengesetzte Verhalten an Stellen, welche geometrisch gleich zu seyn scheinen, auf ein polarisches Verhalten in den Seiten der Dimensionen zurückführt, das Wort Seiten, *latera*, hier in demselben Sinn genommen, wie es von den verschiedenen Seiten des Lichtstrahles gilt.

grofse Anzahl verschiedener sich in einem und demselben Systeme zu entwickeln pflegt, und eine dritte Gattung von Körpern von nicht geringerer Mannichfaltigkeit, die drei-und-drei-kantigen Dodekaëder oder Dihexaëder (Drei-und-drei-kantner), d. i. die doppelt 6seitigen Pyramiden mit abwechselnd stumpferen und schärferen Endkanten *) und im Zickzack liegenden Kanten der gemeinschaftlichen Grundfläche, nach dem gewöhnlichen, nur zu umständlichen Ausdrucke, wie die Beispiele vom Kalkspath her besonders bekannt sind. Für das drei-und-drei-gliedrige System ist diese Gattung von Körpern eigentlich diejenige, welche in mathematischem Sinne für den allgemeinen Körper dieses Systems, und die übrigen, die Rhomboëder sowohl, als die 6- und 12seitigen Säulen mit in sich schliefsend angesehen werden kann, wie für das 6-gliedrige System es das 6-und-6-kantige Di-Dodekaëder, für das 4-gliedrige das 4-und-4-kantige Di-Octaëder, für das 2-und-2-gliedrige aber das 2-und-2-kantige Octaëder, und für das gleichgliedrige System der Achtundvierzigflächner ist. Rhomboëder und Seitenflächen der regulären 6-seitigen Säule lassen sich als durch das Zusammenfallen von je zwei, die Endflächen durch das Zusammenfallen von je sechs Flächen des drei-und-drei-kantigen Dihexaëders entstehend betrachten; die 6-und-6-kantigen Säulen aber sind nichts anders als unendlich spitze 3-und-3-kantige Dihexaëder, von variablem Verhältnifs der Flächen zu den Queerdimensionen.

Der Unterschied der zweierlei Endkanten an den 3-und-3-kantigen Dihexaëdern variirt auch. Der Fall ist nicht ausgeschlossen, wo derselbe aufhört, wo also die Endkanten gleichen Werth erhalten, und das Dihexaëder ein 6gliedriges wird, wie das des Quarzes. Und so findet ein doppelter Uebergang aus dem 3-und-3-gliedrigen Systeme in das 6-gliedrige Statt, von den Rhomboëdern aus durch das Hinzutreten der verschwundenen Flächen des 6gliedrigen Dihexaëders, und von dem 3-und-3-kantigen Dihexaëder aus durch das Verschwinden des Unterschiedes zwischen den abwechselnden Drei und Drei. Nicht zu gedenken, dafs die Seiten- und Endflächen der Säulen eine dritte Gemeinschaft unter ihnen begründen.

*) Endkanten müssen die in die Endspitze auslaufenden Kanten einer Pyramide genannt werden, nicht Seitenkanten, wie sie die Wernersche Sprache nennt. Mit letzterem Namen, welcher auch dem Namen Lateralkanten gleich zu setzen ist, können wohl die Kanten an der gemeinschaftlichen Grundfläche der Pyramiden, nicht aber jene, unsere Endkanten, schicklich belegt werden.

Wie aber hängen innerlich diese beiderlei Systeme mit dem regulären oder sphäronomischen zusammen? und durch dieses mit den übrigen? — Der Uebergang ist schnell und überraschend. Ein jeder Körper des sphäroëdrischen Systems tritt durch veränderte Stellung in die Reihe der Körper des drei-und-drei-gliedrigen Systemes ein; nicht blofs der Würfel, den wir vorhin schon in der Reihe der Rhomboëder selbst antrafen; auch nicht blofs das Tetraëder aufser ihm, welches insgemein als reguläre dreiseitige Pyramide angesehen wird, und welchem statt der Grundfläche blofs die parallelen Flächen von den die Pyramide bildenden fehlen, um ein Rhomboëder im strengsten Sinne zu seyn. Von jedem andern Körper jenes Normalsystemes, des sphäronomischen, gilt ein Gleiches. Denn anstatt der natürlichen drei, unter einander senkrechten und gleichen Axen, deren Auszeichnung alle diese Körper in ihre natürliche Hauptstellung und Hauptansicht bringt, wähle man nur von den aus jenen zunächst hervorgehenden vier *) unter sich gleichen und wieder in sich geschlossenen **) Richtungen oder Dimensionen im anderen Sinne des Wortes, eine als Hauptrichtung zur Axe des Ganzen, so sind mit einemmale alle diese Körper in die Analogie des rhomboëdrischen oder drei-und-drei-gliedrigen Systemes gebracht ***).

So wie nämlich jene vier aus den drei senkrechten zunächst abgeleiteten Richtungen des regulären Systems am Würfel den vier durch je zwei entgegengesetzte seiner Ecken gelegten Axen correspondiren, so im Octaëder denen, welche durch die Mitten seiner entgegengesetzten Flächen gehen. Bringt man eine davon in die senkrechte Lage, d. i. legt man das Octaëder auf eine seiner Flächen horizontal auf, so wird diese und die ihr entgegengesetzte obere zu Endflächen (einer Säule oder Pyramide), und die übrigen sechs treten unter sich in das Verhältnifs der Flächen eines Rhomboëders, und

*) Eine jede dieser vier ist die mittlere Richtung zwischen je drei unter sich senkrechten Linien oder Hauptaxen.

**) In sich geschlossenen, d. h. so, dafs es keine fünfte, sechste u. s. f. ihnen gleiche giebt.

***) Die drei unter sich gleichen Queerdimensionen, welche, gemeinschaftlich senkrecht auf der eben angenommenen Einen Hauptdimension, dem Charakter des rhomboëdrischen, wie des 6gliedrigen Systemes wesentlich sind, werden jetzt für das reguläre System (nicht etwa die drei übrigen der oben genannten vier, sondern vielmehr) drei von denen sechs, welche nächst jenen Vier aus den ursprünglichen unter einander senkrechten Drei hervorgehen, und die mittleren Richtungen zwischen je zwei der letzteren sind, d. i. von denen, welche auf den Kanten des Octaëders, so wie des Würfels, oder auf den Flächen des Granatoëders senkrecht stehen.

und zwar des nämlichen, welches die dreiseitige Pyramide des Tetraëders andeutet, und in welche jene sich verlängern würden, während die beiden Endflächen verschwänden, d. i. des Rhomboëders mit dem ebnen Endspitzenwinkel von 60°, welches man auch das Rhomboëder des Tetraëders nennen könnte. Die Verlängerungen der sechs genannten Octaëderflächen umgränzen zwei reguläre Tetraëder, welche oben und unten auf die zwei zu Endflächen gewordenen Octaëderflächen aufgesetzt erscheinen, so dafs ein Rhomboëder dieser Art (mit dem ebnen Endspitzenwinkel von 60°) getheilt werden kann in (oder sich ansehen läfst als zusammengesetzt aus) einem regulären Octaëder und zweien auf zwei entgegengesetzte Flächen desselben aufgesetzten regulären Tetraëdern (von gleicher Gröfse ihrer Flächen mit denen des Octaëders). Dafs es gleichgültig ist, welches Paar entgegengesetzter Octaëderflächen man die Rolle der Endflächen spielen läfst, ist einleuchtend.

Ein jedes gegebene Rhomboëder tritt daher auch durch Abstumpfung seiner Endspitzen (die Abstumpfung so weit fortgesetzt, bis die Abstumpfungsflächen die Lateralecken des Rhomboëders berühren), in eine gewisse Analogie mit dem Octaëder. Allein der so entstehende, dem Octaëder ähnelnde, sonst auch häufig mit ihm verwechselte Körper verdient den Namen Octaëder nicht, und wird besser das Pseudo-Octaëder des rhomboëdrischen Systems, oder, wenn man will, ein Drei-und-Einflächner (statt Sechs-und-Zweiflächner nach der bisherigen Analogie unserer Ausdrücke) genannt werden.

Wenn wir das Granatoëder in die Lage bringen, wo es dem rhomboëdrischen System entspricht, oder drei-und-drei-gliedrig erscheint, so mufs, da seine acht stumpferen Ecken den Würfelecken correspondiren, eine der vier Axen, welche durch je zwei entgegengesetzte solche Ecken gelegt werden können, zur Hauptrichtung, oder Längenaxe gewählt, d. i. senkrecht gestellt werden; hiedurch erhält es das Ansehen einer regulären sechsseitigen Säule, wie sie dem rhomboëdrischen System völlig gemäfs ist, an den Enden mit drei Flächen, wahrhaft rhomboëdrisch, zugespitzt, diese Zuspitzungsflächen auf die abwechselnden Seitenkanten der Säule, zugleich oben und unten abwechselnd, aufgesetzt, wie aus der Wernerschen Beschreibungsweise dieser Form *) allgemein bekannt ist. Die oberen und unteren Zuspitzungsflächen

*) Diese Beschreibung stellt also den Körper nicht in seine natürlichste, mit der gewöhnlichen des Octaëders und des Würfels übereinkommende Lage, sondern in jene willkührlichere, gewendete. In der ersten Lage ist vielmehr das Granat-Dodekaëder, in der Wernerischen Sprache, rechtwinkliche vierseitige Säule, mit vier Flächen zugespitzt u. s. w. Eine wie die andre Beschreibung kann übrigens den Namen Granat-Dodekaëder nicht ersetzen;

für sich geben wieder ein wahrhaftes, und zwar stumpfes, Rhomboëder (der Endneigungswinkel der Flächen eben so, wie an der regulären sechsseitigen Säule, von 120°). Man kann dieses das Rhomboëder des Granatoëders nennen.

Und so findet sich sehr leicht und völlig befriedigend für alle auch abgeleitetere Formen des regulären Systems die Uebereinstimmung mit dem rhomboëdrischen auf, sobald wir sie, ganz dem vorigen gemäfs, in die angemessene Stellung bringen. Der Leucitkörper wird alsdann zu einer regulären 6seitigen Säule, an den Enden erst mit 6 Flächen, drei-und-drei-kantig, und dann nochmals mit drei Flächen, rhomboëdrisch zugespitzt; und so die übrigen.

Dafs das sechsgliedrige System dem regulären nicht so nahe steht als das drei-und-drei-gliedrige, und äufserlich erst durch dieses mit demselben vermittelt zu werden scheint, geht aus den eben angestellten Betrachtungen hervor. Während es sich in dieser Rücksicht am weitesten von dem Normalsysteme entfernt, erscheint es unläugbar als eine andere Art von Gipfel, und in einer eigenen Vollendung der krystallinischen Gestaltung. Nur durch das Drei-und-Dreigliedrige scheint es mit allen übrigen zusammenzuhängen. Zwar ist die Möglichkeit eines direkten Ueberganges von ihm in das zwei-und-zwei-gliedrige System und umgekehrt geometrisch unläugbar *), jedoch physikalisch betrachtet, möchte ein solcher Uebergang blofs als unächt und verwerflich anzusehen seyn.

Es könnte für das tiefere Studium des innern Herganges der krystallinischen Gestaltung noch eine neue Aufgabe werden: ob, wenn alle Krystallisationssysteme aufser dem sechs- und den drei-und-drei-gliedrigen sich auf drei unter einander rechtwinkliche Dimensionen gründeten, die anscheinend auf ganz andern Elementen der Gestaltung beruhenden eben genannten doch nicht vielleicht eine blofs scheinbare Ausnahme machen, oder mit andern Worten: ob jene drei die letzteren beiden Systeme auszeichnenden, unter sich gleichen und 60-gradigen Queerdimensionen nicht

denn sie pafst auf eine unbestimmte Menge ähnelnder Körper aus dem viergliedrigen oder aus dem drei-und-drei-gliedrigen Systeme, welche dem regulären Systeme fremd sind; letzteres fordert dagegen für seine Glieder eine bestimmte Art der Zuspitzung, einen bestimmten Winkel für die aufgesetzten Zuspitzungsflächen u. s. f.

*) Die Möglichkeit ist da, sobald zwei der auf einander senkrechten Dimensionen des 2-und-2-gliedrigen Systems in das Verhältnifs von $1 : \sqrt{3}$ treten, d. i. sobald eine geschobene Säule von 120° in einem 2-und-2-gliedrigen Systeme begründet wird.

vielleicht aus zwei unter einander, wie auf der ersten Hauptrichtung rechtwinklichen Dimensionen entsprossen seyn möchten? Getreu aber dem Verfahren, welches überall und auch in der Krystallisationslehre durchweg angenommen werden mufs: als gleich zu betrachten und zu behandeln, was in den Erscheinungen gleich, und als ungleich, was ungleich in seiner Erscheinung und in seinen Eigenschaften sich bewährt, spreche ich die Sache nur aus, wenn ich den Unterschied in den Grundlagen der Gestaltung in den einen und den andern Systemen so aufstelle, wie geschehen ist, und behalte, als reine Sache weiterer Reflexion, dem sichern Stehenbleiben der ausgesprochenen Verschiedenheit unbeschadet, die berührte Frage ihrer eigenen Zergliederung und weiteren Aufklärung ihres Ortes vor.

Wenn wir nun zur nochmaligen Uebersicht das Schema für die bisher erörterten natürlichen Abtheilungen der verschiedenen Krystallisationssysteme zusammenstellen wollen, so wird es sich, dem Gesagten gemäfs, von selbst folgendergestalt ordnen:

A. Reguläres oder sphäroëdrisches System; beruhend auf drei unter sich rechtwinklichen und gleichen Grunddimensionen. Es zerfällt in zwei Unterabtheilungen:

a) das gewöhnlichere, mit vollzählichen Gliedern gleicher Art (homosphäroëdrisches System). Gemeinste Beispiele: Flufsspath, Bleiglanz, Granat, Diamant u. s. f.

b) andere mit unvollzählichen, oder nur zur Hälfte erscheinenden gleichartigen Gliedern (hemisphäroëdrische Systeme). Davon sind bekannt:

α) die tetraëdrischen, wie Kupferkies, Fahlerz, Blende, Boracit.

β) die pentagon-dodekaëdrischen, Schwefelkies, Glanzkobalt.

B. Vom sphäroëdrischen abweichende Systeme;

I. Solche, welche auf drei unter einander rechtwinklichen, aber nicht sämmtlich unter sich gleichen Grunddimensionen beruhen.

1. Viergliedrige; zwei Dimensionen gleich unter sich, aber ungleich der dritten. Beispiele: Zirkon, Vesuvian, Zinnstein, Honigstein u. m. a.

2. Solche, wo alle drei unter sich rechtwinkliche Grunddimensionen unter einander ungleich sind.

a) Zwei-und-zwei-gliedrige. Vollzählich in der Erscheinung gleichartiger Glieder. Beispiele die allerhäufigsten: Topas, Chrysolith, Schwerspath, Weifsbleierz, Bleivitriol u. s. f.

b) Zwei-und-ein-gliedrige; unvollzählich in der Erscheinung gleichartiger Glieder; Einzelnwerden gewisser sonst gepaarter bei Vollzahlichkeit gewisser anderer. Beispiele: Hornblende, Augit, Feldspath, Gips u. m. a.

Als blofse Neben-Verzweigung von ihnen die ein-und-zwei-gliedrigen, wie Pistacit.

c) Ein-und-ein-gliedrige. Unvollzählichwerden der Erscheinung gleichartiger Glieder in allen Richtungen und Dimensionen. Beisp. Axinit, Kupfervitriol.

II. Solche, welche auf einer Hauptdimension, und drei andern unter

sich gleichen, von der ersten verschiedenen, und auf ihr gemeinschaftlich rechtwinklichen Queerdimensionen beruhen.

1. Sechsgliedrige, vollzählich in der Erscheinung ihrer gleichartigen Hauptglieder. Beisp. Quarz, Beryll, Apatit, Buntbleierz; Glimmer u. m.

2. Drei-und-drei-gliedrige oder rhomboëdrische. Unvollzählichwerden in der Erscheinung der Hauptglieder durch Wegfallen einer abwechselnden Hälfte. Beispiele: Kalkspath, Rothgültigerz, Eisenvitriol, Eisenglanz, Corund u. m.

Man kann aber auch eben so schicklich zum obersten Eintheilungsgrunde den wählen: je nachdem die Systeme auf drei unter einander rechtwinklichen, oder auf drei unter sich gleichen, und gegen eine vierte rechtwinklichen Dimensionen beruhen, und hienach ein anderes Schema entwerfen; in einem solchen würden die sechsgliedrigen Systeme nebst den drei- und-drei-gliedrigen, allen übrigen zusammen entgegenstehen, und das reguläre würde nur eine Abtheilung von diesen machen. Ich lege ein solches Schema zum Schlusse bei.

Es mag übrigens gleichgültig seyn, wie die verschiedenen Abtheilungen nach einander zu stellen sind. Da das reguläre System eine Art Mittelpunkt, oder einen gemeinschaftlichen Vergleichungspunkt sowohl für die sechsgliedrigen und rhomboëdrischen Systeme abgiebt, als für die übrigen: so möchte unter den Stellungen in eine Reihe auch folgende ganz bequem seyn:

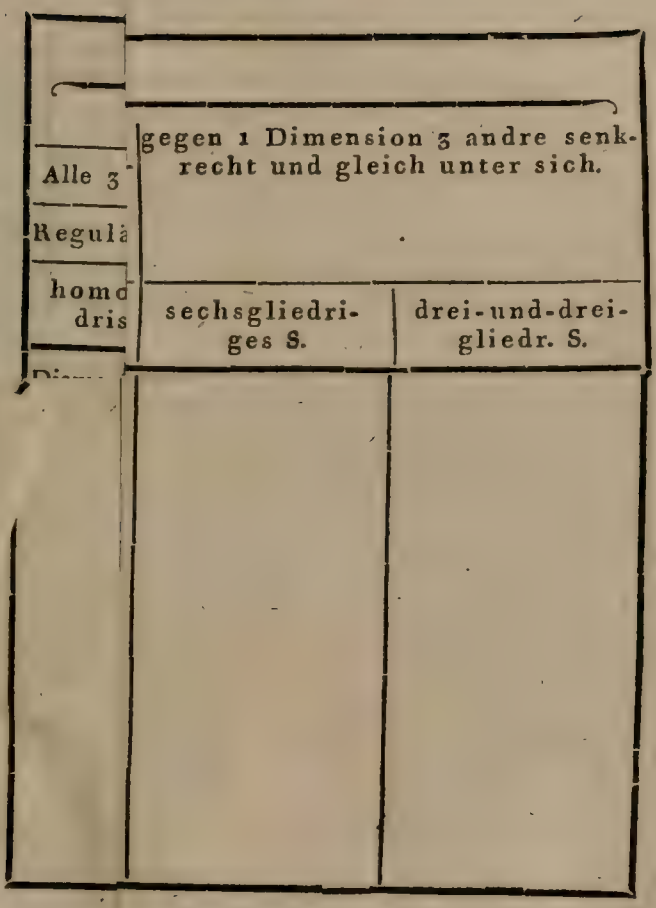
1. Sechsgliedrige.
2. Drei-und-drei-gliedrige, rhomboëdrische.
3. Kugelartiges, sphäroëdrisches.
4. Viergliedrige.
5. Zwei-und-zwei-
6. Zwei-und-ein- } gliedrige.
7. Ein-und-ein-

Es liegt am Tage, dafs, logisch genommen, nur vier Abtheilungen in gleicher Schärfe sich entgegengeordnet werden können, nämlich *a*) das reguläre *b*) den sechs- und den drei-und-drei-gliedrigen zusammen, ferner *c*) den viergliedrigen, endlich *d*) den zwei-und-zwei-, zwei-und-ein-, ein-und-ein-gliedrigen zusammengenommen. Allein wie die hier vereinigten um des Charakteristischen willen, was in jedem liegt, zur klareren Uebersicht der gröfseren Mannichfaltigkeit wieder zu trennen doch vortheilhafter und schicklich ist, so wird man für eine natürliche und bequeme Partition jene sieben Abtheilungen gut beibehalten, das sphäroëdrische System aber hiebei in seinen Unterabtheilungen einstweilen ungetrennt beisammen lassen können.

Zum Beschlufs füge ich noch eine Tabelle bei, welche die verschiedenen Mineraliengattungen, soweit ihre krystallinische Structur hinlänglich bekannt seyn möchte (worüber nur bei wenigen der bis jetzt blofs undeutlich vorgekommenen einiger Zweifel übrig bleiben dürfte), unter die natürlichen Abtheilungen, die wir aufgefunden haben, rubricirt darstellt.

---

nssysteme.


gegen 1 Dimension 3 andre senkrecht und gleich unter sich.
Alle 3
Regulä
homo
dris
sechsgliedriges S.
drei-und-dreigliedr. S.

Tabelle

über

die natürlichen Abtheilungen der verschiedenen Krystallisationssysteme.

Die Grundlage des Systemes bilden:

3 Dimensionen senkrecht auf einander

Alle 3 Dimensionen gleich unter sich.		2 Dimens. gleich unter sich, und verschieden von der dritten.	Alle 3 Dimensionen verschieden unter sich.			gegen 1 Dimension 3 andre senkrecht und gleich unter sich.	
Reguläres od. sphäroëdrisches Syst.							
homospharoedrisches S.	hemispharoedrische S.	viergliedr. Syst.	zwei-und-zweigliedr. S.	zwei-und-eingliedr. S.	ein-und-eingliedr. S.	sechsgliedriges S.	drei-und-dreigliedr. S.
Diamant	*a.* tetraëdrisches S.	Zirkon	Topas	Feldspath	Axinit	Quarz	Kalkspath
Spinell		Vesuvian	Euclas	Hornblende	Cyanit?	Beryll	Spatheisenstein
Granat	Fahlerz	Skapolith	Chrysoberill	Augit	Kupfervitriol	Dichroit	Galmei
Lasurstein	Kupferkies	Mejonit	Chrysolith	Gadolinit		Pinit	Manganspath?
Leucit	Blende	Ichthyophthalm	Lievrit	Gips		Nephelin	Eisenvitriol
Analcim	(Helvin)	Natrolith	Staurolith	Anhydrit		Witherit	Kupferschmaragd
Melilit	Boracit	Bittersalz	Andalusit	Glauberit		Apatit	Cuboicit
Flufsspath		Glaubersalz	Lazulit	Borax		Buntbleierz	Corund
Alaun	*b.* pentagon-dodekaëdr. S.	Zinkvitriol	Prehnit	Sphen		Kupferglanz	Eisenglanz
Steinsalz		Schwerstein	Stilbit	Kupferlasur		Glimmer	Zinnober
Salmiak	Schwefelkies	Gelbbleierz	Lomonit	Rothbleierz		Talk	Rothgiltigerz
Hornerz	Glanzkobalt	Uranglimmer	Datholith	Rothrauschgelb		Graphit	⋮
Würfelerz		Rutil	Kryolith	⋮		Wasserblei	⋮
Rothkupfererz		Anatas	Schwerspath	⋮		Gelb Rauschgelb	Turmalin
Magneteisenstein		Zinnstein	Strontspath	Pistazit		Kupferglimmer	
Gediegne Metalle		Honigstein	Arragonit			Wasser	
Amalgam		⋮	Natron				
Bleiglanz		⋮	Salpeter				
Glaserz		⋮	Weifsbleierz				
Speiskobalt		Kreuzstein	Bleivitriol				
			Quecksilberhornerz				
			Olivenerz				
			Linsenerz				
			Phosphatkupfererz				
			Salzkupfererz				
			Rothkobalterz				
			Kieselzinkerz				
			Titanit?				
			Weifsspiesglanzerz				
			Graubraunsteinerz				
			Schwarzspiesglanzerz				
			Grauspiesglanzerz				
			Wismuthglanz				
			Schrifterz				
			Blättererz?				
			Arsenikkies				
			Strahlkies				
			Schwefel				
			⋮				
			Wolfram				

	1812.		Barom. Zoll. Lin.	Therm. centigr. am Bar.	Therm. centigr. frei.	Zürich. Barom. Zoll. Lin.	Zürich. Therm. centigr. am Bar.	Zürich. Therm. centigr. frei.	Höhe über Zürich. Par. Fufs.	Höhe über Meeresfläche. Z. + 1276,5	
17	18. Aug. h. 12.	Munteratsch unter dem Gipfel	20, 1,62	14	12	26, 11,56	16,8	16,8	5567,2	8844	Des Gipfels Höhe = 9440 Fufs.
18	h. 10.	Lerchengränze am Abhang vom Munteratsch	21, 6,63	20	12	26, 11,49	16,8	16	5832	7108	
19	15. Aug. h. 9. a. m.	Ponte Resina Kirche	22, 9,94	12	10	St. Mauriz. 29, 8,61	10	11	−114,8	5400,2	
20	h. 8. a. m.	Cresta	22, 11,84	14	12	22, 8,61	10	11	−283,4	5231,6	
21	13. Aug. h. 10. p. m.	St. Mauriz untere Flugi	22, 9,19	15	10	Zürich. 26, 11,76	17	15⅝	4279	5555	
	14. Aug. h. 7. a. m.	St. Mauriz	22, 8,74	10	8,75	26, 11,85	17,5	13,5	4358	5634	Das Mittel giebt für St. Mauriz untere Flugi 5571 Fufs, welches auch das Resultat der besseren Beobachtungen zu seyn scheint.
	15. Aug. h. 7. a. m.	St. Mauriz	22, 8,61	10	8,75	26, 11,74	17,25	14,25	4373	5650	
	18. Aug. h. 6. p. m.	St. Mauriz	22, 9,47	14	13	26, 10,64	20⅝	19⅞	4295	5571	
	19. Aug. h. 7. a. m.	St. Mauriz	22, 9,14	11	7,75	26, 10,44	18,5	13,5	4204,2	5480	
	h. 2. p. m.	St. Mauriz	22, 8,95	13	17,5	26, 9,9	22⅞	22⅞	4326	5602	
	20. Aug. h. 7. a. m.	St. Mauriz	22, 9,94	12	10	26, 11,9	18,5	13,5	4270,2	5546	
	h. 7. p. m.	St. Mauriz	22, 10,46	15	14	26, 11,82	24⅞	22⅞	4308	5584	
	21. Aug. b. 7. a. m.	St. Mauriz	22, 10,55	12	9	27, 0,16	20	18,5	4238,4	5515	
22	14. Aug. h. 2.	Innbrücke nach dem Sauerbrunnen St. Mauriz	22, 10,2	12	12	St. Mauriz. 22, 8,74	10	12	−124	5391	
23	20. Aug. h. 4. p. m.	Lerchengränze an der Sudseite des Thales über St. Mauriz	21, 8,35	16	15	Zürich. 26, 11,78	22⅞	22⅞	5707,2	6983	
		a. Ueber der Albula.									
24	13. Aug. h. 5. p. m.	Schon tief unter Lerchengränze über Ponte	21, 10,14	12	9	26, 11,31	19	20	5412	6688	
25	h. 4. p. m.	Albula Scheideck	21, 4,97	14	10	26, 11,23	19,25	21⅛	5961,7	7283	
26	h. 5. p. m.	Etwas höher als Lerchengränze über Weifsenstein	21, 9,47	15	12	26, 11,34	19	19	5509,8	6785	
27	13. Aug. h. 2. p. m.	Weifsenstein	22, 2,3	15	10	26, 11,34	19	19	5018,4	6295	

	1812.		Barom. Zoll. Lin.	Therm. centigr. am Bar.	Therm. centigr. frei.	Zürich. Barom. Zoll. Lin.	Zürich. Therm. centigr. am Bar.	Zürich. Therm. centigr. frei.	Höhe über Zürich. Par. Fufs.	Höhe über Meeresfläche. Z + 1276,5	
28	15. Aug. h. 12.	Sennhüttendorf unter Weifsenstein	21, 11,22	16	12	26, 11,56	19	19	4183	5459	
29	h. 11.	Brücke ober Bergün in der Enge	23, 5,55	17	13	26, 11,41	18,75	18,75	3600	4876	
30	h. 9.	Bergün	24, 0,44	19	16	26, 11,45	18⅝	15⅝	2988	4264	
31	h. 8.	Fillisur	25, 0,68	17	15	26, 11,47	17,5	14	1896,6	3173	
32	h. 7.	Alveneuer Bad an der Albula	25, 5,39	18	14	26, 11,47	17,5	14	1492	2768	
33	20. Aug. b.	Über den Julier.									
	h. 10. a. m.	Silva plana See	22, 11,55	13	12	26, 11,9	21	21	4192,8	5469	
34	21. Aug. h. 10. a. m.	Juliersäulen									
		Scheideck des Passes	21, 8,49	15	14	27, 0,15	24,5	23⅝	6355,2	7631	
35	h. 1.	Bivio Julierbrücke	23, 1,56	21	16	27, 0,12	24,5	23,5	4081	5357	
36	h. 2.	Brücke ober Mühlen oder Als Molins	23, 8,1	23	18	26, 11,8	24	25,25	3481,8	4758	
37	h. 4.	Tinzen Mühle Vall d'Err	24, 6,37	26	20	26, 11,71	24	25,25	2549,4	3826	
38	11. Aug. h. 5. a. m.	Conters	24, 5,89	12	12	26, 10,2	16¼	14⅜	2357,4	3634	
39	10. Aug. h. 5. p. m.	Tiefenkasten in der Höhe	25, 4,66	20	18	26, 9,7	19⅝	20	1434	2710	Der Fluſs an de Brücke = 2650 f Mittel aus beide = 2612.
	21. Aug. h. 6. p. m.	Tiefenkasten Brücke	25, 8,15	23	18	26, 11,61	24	25,25	1298,3	2575	
40	12. Aug. h. 3. p. m.	Brienz Höhe	24, 8,69	18	15	26, 10,93	18,75	18,75	2206,7	3483	
41	21. Aug. h. 9. p. m.	Lenz Krone	24, 4,46	15	10	26, 11,61	24	21,25	2592,6	3869	Mittel 3909 Fufs.
	22. Aug. h. 6. a. m.	Lenz	24, 4,06	15	13	26, 11,88	20¼	19¾	2673	3949	
42	11. Aug. h. 9. a. m.	Auf den Heydquellen	23, 7	13	12	26, 10,22	16,25	16	3344,4	4621	
43	22. Aug. h. 10. a. m.	Parpan Scheideck	23, 8,31	22	12	27, 0,0	23¾	22,5	3315,8	4592	Doch soll sie woh etwas höher al die Heydquelle liegen.
44	10. Aug. h. 12.	Parpan	23, 7,24	18	14	26, 10,23	17,5	18¾	3307,7	4584	
45	h. 1. p. m.	Tannengränze über Parpan	22, 7,36	20	12,5	26, 10,15	17,5	18¾	4392,6	5669	
46	h. 9. a. m.	Churwalden	24, 5	17	15	26, 10,56	16,5	13,25	2490,3	3767	
47	h. 8. a. m.	Malix	24, 8,78	17	15	26, 10,56	16,5	13,25	2158,2	3435	
48	9. Aug. h. 7. p. m.	Chur 40 Fufs über der Plessur	26, 3,98	17	16	26, 10,73	16,5	14⅝	547,56	1824	
	10. Aug. h. 6. a. m.	Chur	26, 3,8	16	12	26, 10,56	16,5	13⅞	538,62	1815,1	
	12. Aug. h. 6. a. m.	Chur	26, 3,94	17	13	26, 11	17,25	16	572,5	1849	
	22. Aug. h. 2.	Chur	26, 5,09	24	22	27, 0,7	23,75	24⅝	583,32	1860,8	
									560,475	1837,5	

Höhenmessungen

mit dem Barometer zwischen Tirano und Chur in Bündten.

	1812.		Baro. Zoll. Lin.	Therm. centigr. am Bar.	Therm. centigr. frei.	Zürich. Barom. Zoll. Lin.	Zürich. Therm. centigr. am Bar.	Zürich. Therm. centigr. frei.	Höhe über Zürich. Par. Fufs.	Höhe über Meeresfläche. Z. + 1276,5	
1	16. Aug.										
2	h. 1. p. m.	Madonna di Tirano	26, 1,37	25	20	26, 11,95	17,5	19,5	165	1441	daher Tirano = 381 Fufs Höhe.
3	—	Teufelsbrücke ober der Via Mala	25, 5,84	20	17	26, 11,95	17,5	19,5	1158,6	2434	
4	h. 12.	Bruschio Kirche	25, 7,52	19	16	26, 11,93	17,5	19,5	1371,9	2648	
5	h. 8.	Lago di Poschiavo	25, 5,98	15	14	26, 10,88	16½	15	1719,4	2996	die letztere ist besser.
	—	Lago di Poschiavo	25, 2,98	15	14	25, 0,89	Poschiavo. 15	14	—179,16	2962	
6	h. 7. a. m.	Poschiavo	25, 0,89	15	10	26, 11,82	Zürich. 16½	19⅜	1864,8	3141	
	h. 9. p. m. 17. Aug.	Poschiavo	25, 2,12	16	14	27, 0,19	17⅓	16¼	1825	3101	Mittel aus 4 Beobtungen = 3094 Fufs.
	h. 6 a. m. 18. Aug.	Poschiavo	25, 2,45	15	10	27, 0,18	16⅞	11¼	1763,9	3040	
	h. 9. p. m.	Poschiavo	25, 1,45	14	12	26, 11,76	16,25	12,5	1817,76	3094	
7	h. 5. p. m.	Pischiadell	23, 8,76	10	9	26, 11,47	17⅛	15	3241,16	4518	
8	h. 3. p. m.	La Rosa	22, 7,07	6	5	26, 11,55	16,9	19¾	4498,8	5775	
9	17. Aug.										
	h. 12. m.	La Motta	22, 4,8	16	14	26, 11,97	19¾	19	4861,8	6183	
10	h. 1.	Lerchengränze nivellirt am Abhang umher	21, 10,76	17	14	26, 11,97	19¾	19	5651	6927	
11	15. Aug. h. 2.	Bernina Scheideck	21, 4,47	5	4	26, 11,55	16,9	19⅜	5904,78	7181	
							Bernina osteria.				
12	—	Bernina Lago	21, 6,33	6	5	22, 2,05	17	12	593,5	6799	
							St. Mauriz.				
13	h. 12. 17. Aug.	Bernina osteria	22, 2,05	17	12	22, 8,61	10	13	660	6175	
							Zürich.				
	h. 7. p. m. 18. Aug.	Bernina osteria	22, 2,93	15	10	26, 11,64	19¼	19⅝	4976,5	6256	Mittel 6205,5 Fufs.
	h. 6. a. m.	Bernina osteria	22, 2,5	13	6	26, 11,71	17¾	11¾	4915,86	6195	
14	15. Aug. h. 1.	Lerchengränze an der Westseite über der Osteria	21, 5,99	11	10	22, 2,05	Bernina osteria. 17	12	764,4	6970	
15	18. Aug. h. 8 a. m.	An der Brücke des Flatybachs	22, 8,28	15	7,5	26, 11,71	17¾	12,5	4398,6	5675	
16	17. Aug. h. 3. p. m.	Monte Minur Cima	20, 0,73	14	8	26, 11,99	19¾	20	7646,2	8923	

Fig. I.

Fig. II.

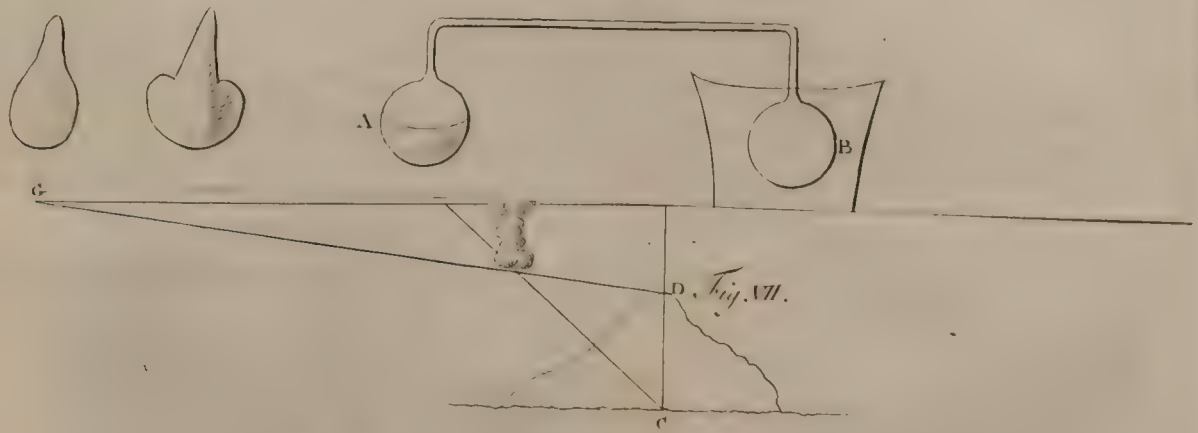


Fig. III.

Zu Herrn von Buch's Abhandlung über den Hagel.

Fig. I.

Fig. II.

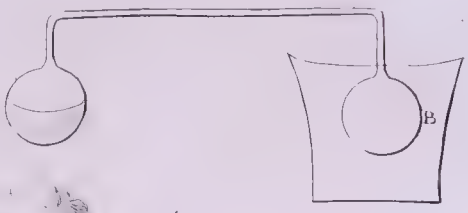


Fig. III.

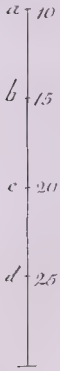
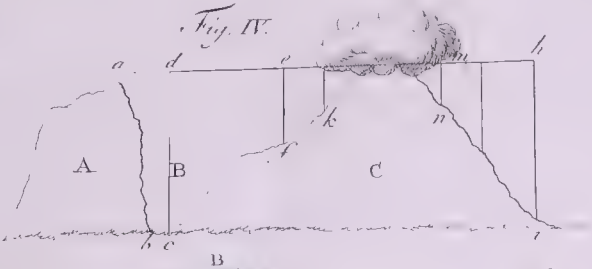


Fig. IV.



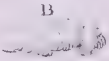
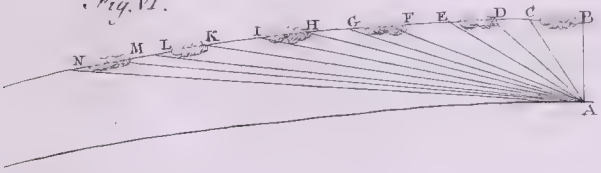


Fig. V

Fig. VIII.

Fig. VI.



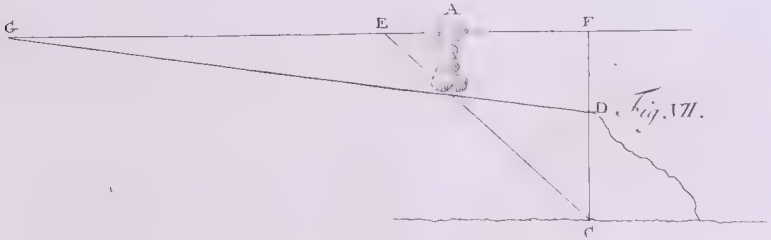
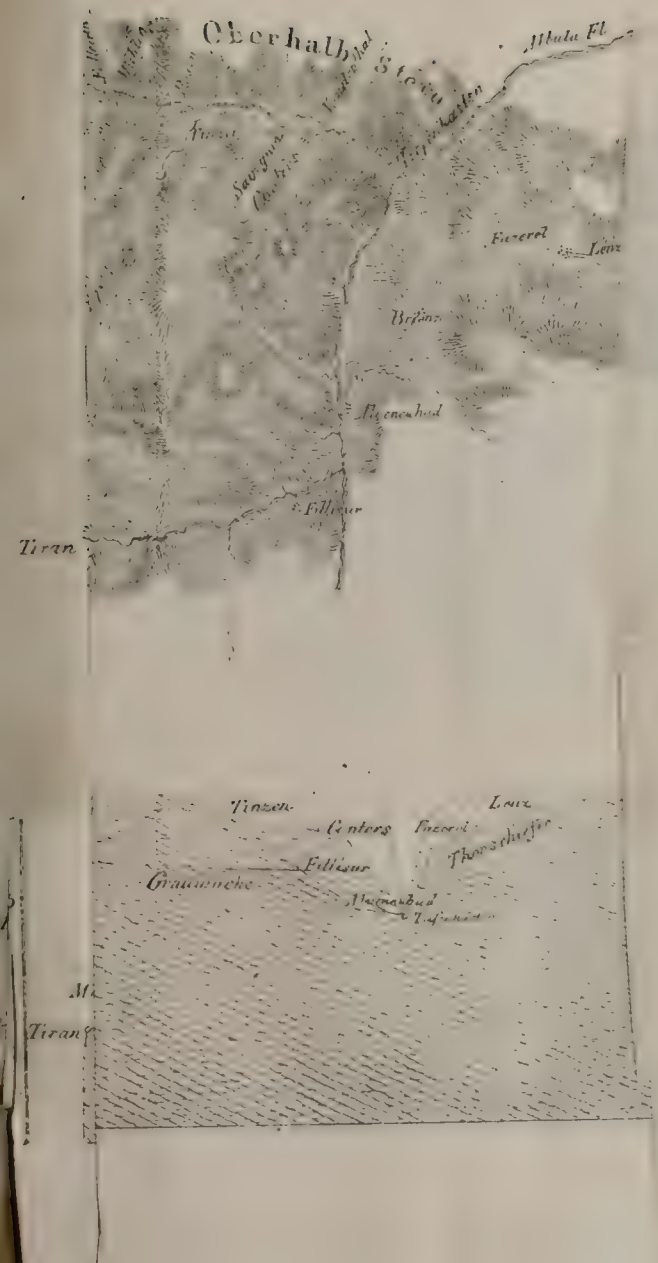
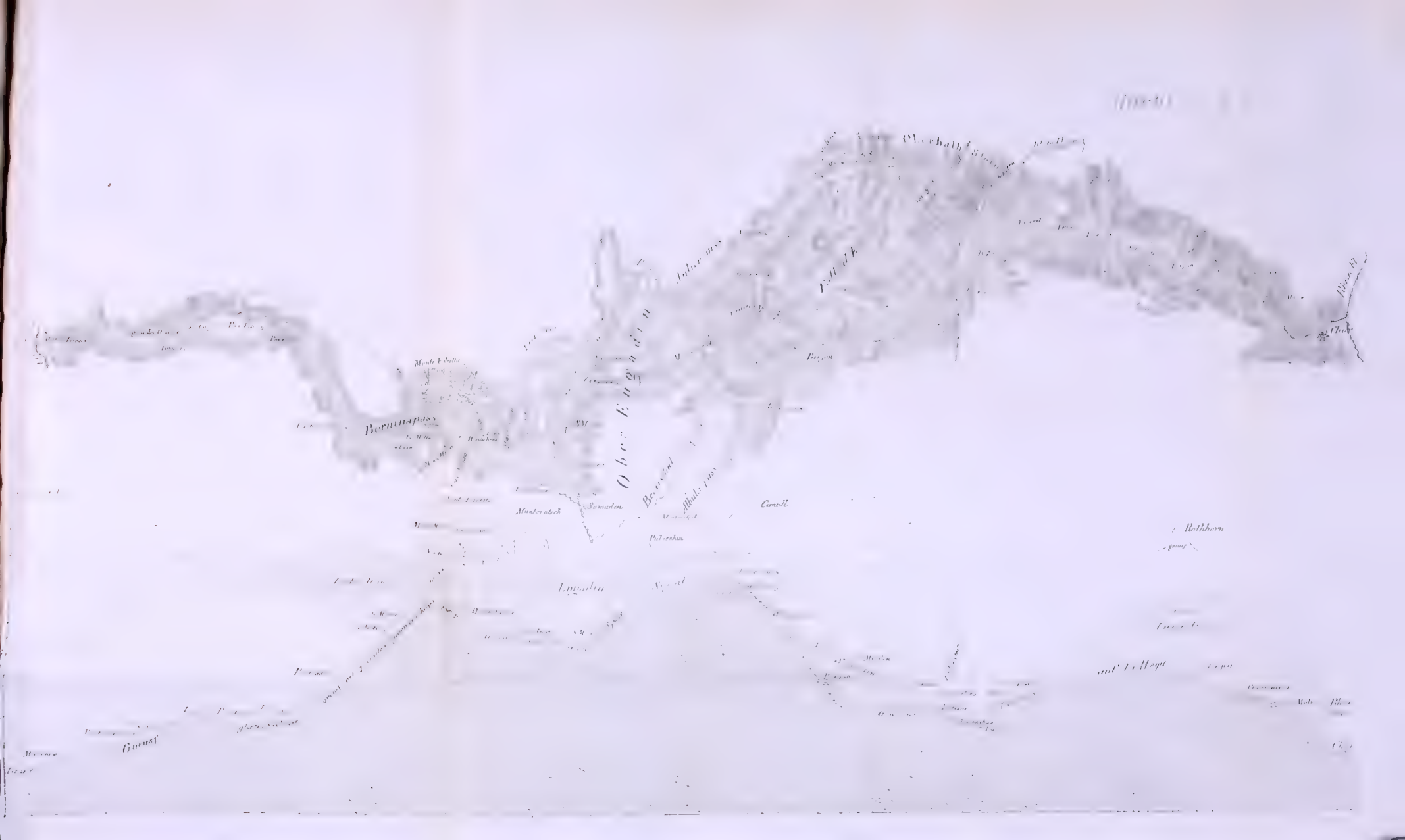


Fig. VII.

Zu Herrn von Buch's Abhandlung über den Hagel.


Oberhalb Stein
Ambula Fl.
Fazerol
Lenz
Tiran
Tinzen
Lenz
Centers
Fazerol
Thorschiefer
Fillisur
Grauwacke
Tiran

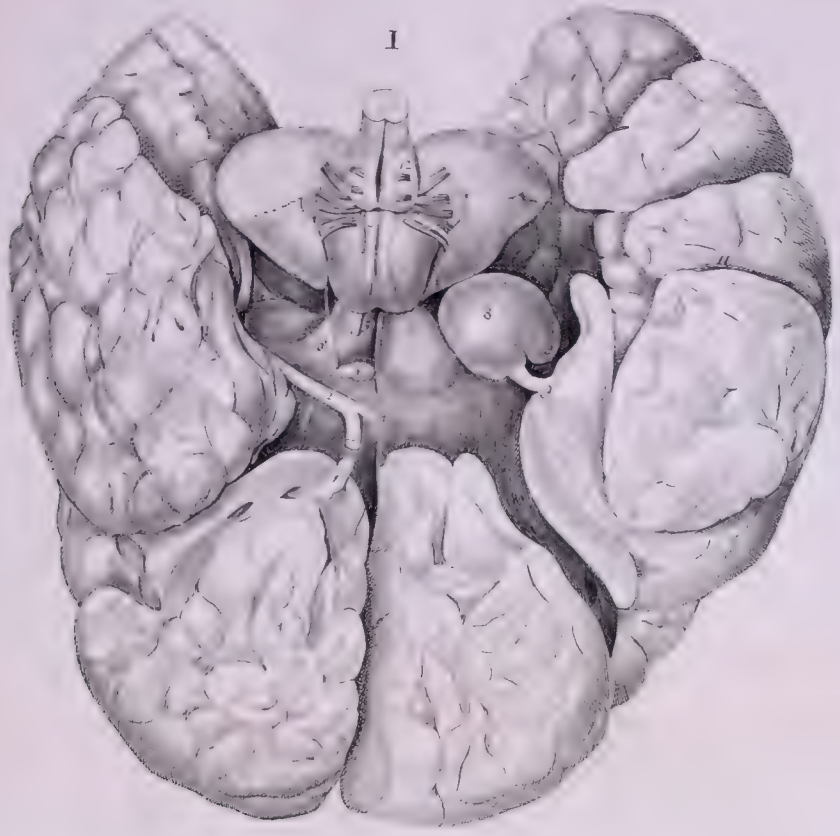

Oberhalb
Bernina pass
Samaden
Cimull
Rothhorn
Gueusf

Digitized by Google

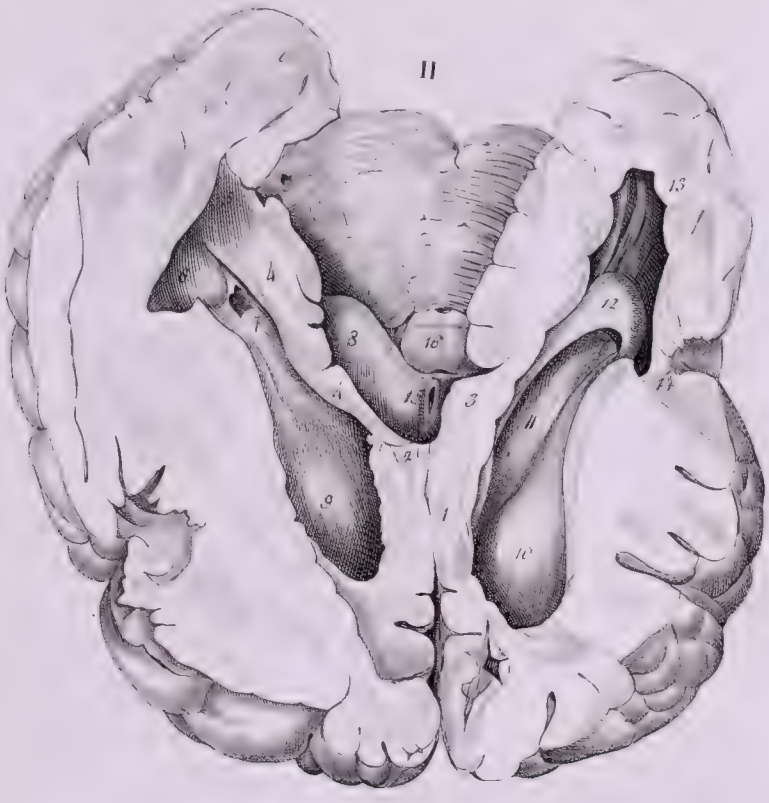
I

A

B

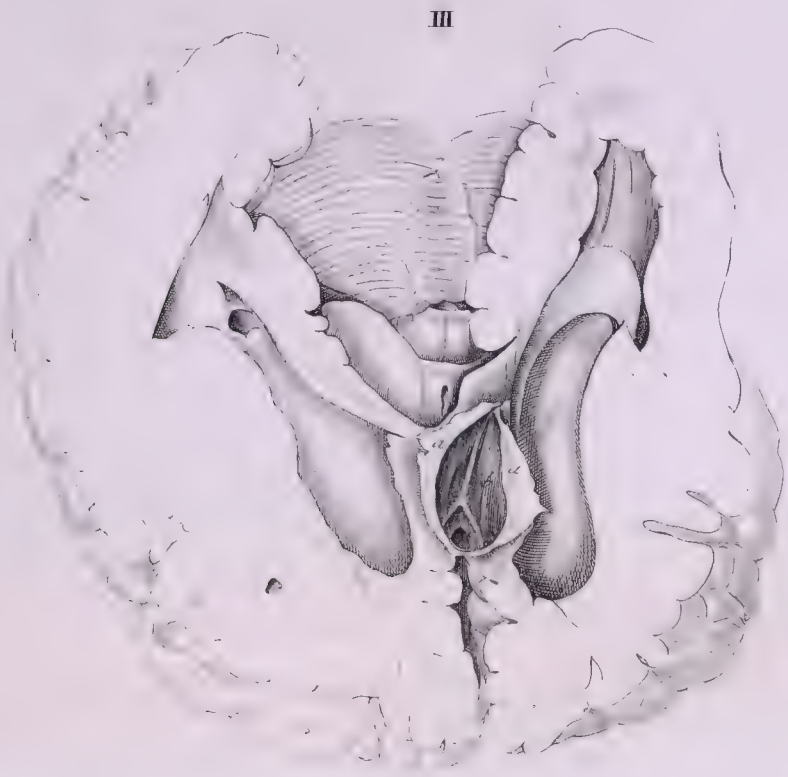


II

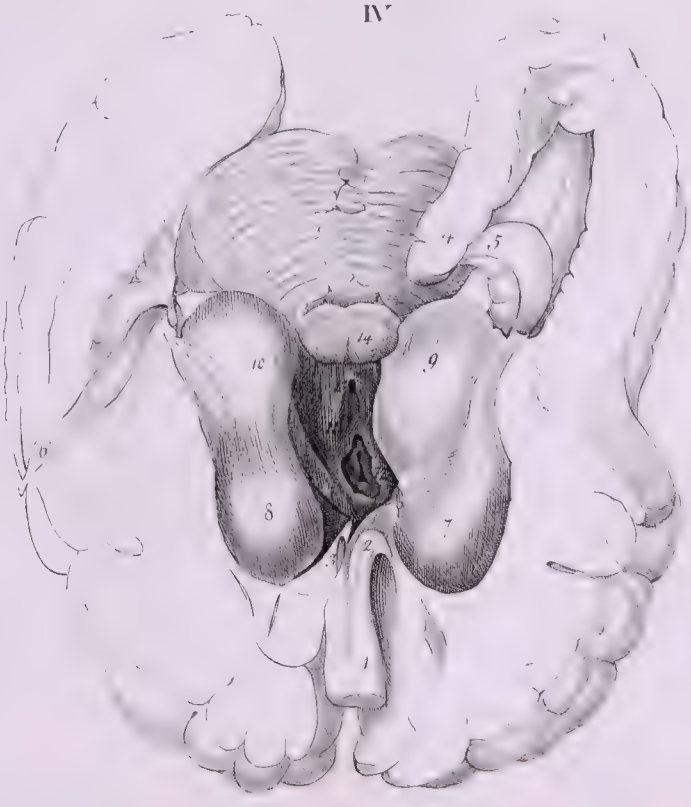


F. Guimpel. ad. nat. del. et fe

III



IV



F. Quimpel . ad. nat. del. et. je.

Abhandlungen

der

mathematischen Klasse

der

Königlich-Preufsischen

Akademie der Wissenschaften

aus

den Jahren 1814 — 1815.

Berlin

in der Realschul-Buchhandlung.

1818.

Abhandlungen

der mathematisch-physikalischen Klasse

der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Inhalt.

1. F. G. Fischer's analytische Untersuchungen über die Zurückstralung des Lichts von Metallspiegeln, die nach irgend einem Kegelschnitt gekrümmt sind . . Seite 1
2. Gruson's Entwickelung von $x^n + y^n$ in eine Reihe, die nach Potenzen von $(x+y)$ und von xy fortschreitet, und deren Anwendung bei Auflösung der Gleichungen . — 30
3. Desselben neuer analytischer Lehrsatz . . . . . — 36
4. Desselben Vereinfachung und Erweiterung der Euklidischen Geometrie . . . — 42
5. J. F. Pfaff, Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi . . . . . — 76
6. Eytelwein's Untersuchungen über die Bewegung des Wassers, wenn auf die Contraction, welche beim Durchgange durch verschiedene Oeffnungen statt findet, und auf den Widerstand, welcher die Bewegung des Wassers längs den Wänden der Behältnisse verzögert, Rücksicht genommen wird . . . . . — 137
7. Tralles, von den Summen einiger Reihen . . . . . — 179
8. Derselbe, von wiederholten Funktionen . . . . . — 216

Analytische Untersuchungen über die Zurückstralung des Lichts von Metallspiegeln, die nach irgend einem Kegelschnitt gekrümmt sind.

Von Herrn E. G. Fischer *).

Einleitung.

§. 1.

Die Formeln, welche Euler in seiner Dioptrik, für die Abweichungen wegen der Gestalt der Gläser, mit so vielem Scharfsinn entwickelt hat, lassen sich zwar auch auf Spiegel anwenden, indessen ist ihre Anwendbarkeit doch in doppelter Hinsicht beschränkt. 1) Sie stellen blofs die Abweichungen in der Achse dar, in Ansehung der Abweichungen aufser derselben aber, ist in der Theorie der Optik noch eine bedeutende Lücke auszufüllen übrig. Durch die gegenwärtige Abhandlung soll diese Lücke, wenigstens für den in der Ueberschrift angegebenen, und für die praktische Optik sehr wichtigen Fall ausgefüllt werden. 2) Die Eulerschen Formeln beziehen sich ausschliefsend blofs auf sphärische Krümmung; da man es aber vortheilhaft gefunden hat, grofse Objectivspiegel einer parabolischen Krümmung so viel als möglich zu nähern, so ist es nöthig, die Theorie auf alle Krümmungen, welche durch Umdrehung eines Kegelschnitts um eine Achse entstehen, auszudehnen. Hiedurch wird zwar die Entwickelung der Formeln etwas mühsam, die Resultate hingegen erscheinen einfacher als man erwartet.

*) Vorgelesen den 22. Juni 1815.

§. 2.

Es sind in allem nur fünf Arten solcher Spiegel möglich. Der Spiegel ist nämlich ein Segment

a) entweder von einer Kugel: sphärischer Spiegel;

b) oder von einem parabolischen Afterkegel, der durch Umdrehung einer Parabel um ihre Achse entsteht: parabolischer Spiegel;

c) oder von einem elliptischen Ey, das durch Umdrehung einer Ellipse um ihre lange Achse entsteht; da die Krümmung eines solchen Spiegels von der Mitte gegen den Rand hin abnimmt, so wollen wir ihn einen elliptischen Spiegel mit abnehmender Krümmung nennen;

d) oder von einem elliptischen Sphäroid, das durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kurze Achse entsteht; elliptischer Spiegel mit zunehmender Krümmung;

e) oder endlich von einem hyperbolischen Afterkegel, der durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Achse entsteht: hyperbolischer Spiegel.

§. 3.

Wird einer dieser fünf Spiegel vermittelst einer durch seine Achse gelegten Ebene geschnitten, so ist der Durchschnitt bei a) ein Kreisbogen; bei b) ein parabolischer Bogen zu beiden Seiten des Scheitels; bei c) ein elliptischer Bogen zu beiden Seiten der grofsen Achse; bei d) ein eben solcher Bogen zu beiden Seiten der kleinen Achse; endlich bei e) ein hyperbolischer Bogen zu beiden Seiten der Achse.

§. 4.

Nimmt man in allen diesen Fällen die Achse zur Abscissenlinie, und den Scheitelpunkt zum Anfangspunkt der Abscissen, so lassen sich alle gedachte Durchschnittscurven, bei rechtwinkligen Coordinaten, durch die einzige Gleichung der Ellipse

$$y^2 = 4px - \frac{4p}{d}x^2$$

vorstellen, in welcher 4p der Parameter, und d diejenige Achse ist, um welche die Curve gedreht werden mufs, um den Spiegel zu beschreiben.

Für den Kreis ist 4p = d = dem Durchmesser des Kreises.

Für die Parabel ist d unendlich, also das letzte Glied der Gleichung = 0.

Für die Ellipse gilt die Gleichung in den beiden §. 2. bei c) und d) angegebenen Fällen, je nachdem man den Buchstaben d die grofse oder die kleine Achse der Ellipse bedeuten läfst; wobei nur zu bemerken ist, dafs wenn 4p in beiden Fällen gleich angenommen wird, die Gleichung zwei verschiedene Ellipsen vorstelle.

Für die Hyperbel ist endlich die Gleichung gültig, wenn d negativ gesetzt wird.

Wir werden also Formeln erhalten, die sich leicht auf jeden der obigen fünf Spiegel anwenden lassen, wenn wir die obige Gleichung zum Grunde legen.

Erster Abschnitt.

Theorie der Abweichung in der Achse.

§. 5.

Aufgabe: Es sey GH Fig. 1. der Durchschnitt des Spiegels, und AE die Achse desselben. Aus E falle ein Strahl in B auf den Spiegel, und werde nach F zurückgeworfen. Es soll eine Gleichung zwischen AE, AF, und der Abscisse AD des Punktes B gefunden werden.

Kurze Uebersicht des Ganges der Auflösung. — Zieht man die zu dem Punkt B gehörige Normale BC, so sind in den Dreiecken ECB, FCB die Winkel bei C gleich, und die Winkel bei C haben gleiche Sinus, daher verhält sich CE : BE = FC : BF; also ist

$$CE \cdot BF = BE \cdot FC,$$

welches die Fundamentalgleichung ist.

Ist ferner BD die Ordinate des Punktes B, so lassen sich die vier Linien dieser Gleichung durch vier andere BD, DF, DC, DE ausdrücken.

Ist ferner die Gleichung für die Curve gegeben, so läfst sich wieder von diesen letztern vier Linien die Ordinate BD, und die Subnormale DC, durch die Abscisse AD ausdrücken, und so die verlangte Gleichung finden.

Ihre vollständige Entwickelung macht den Inhalt der folgenden §§. aus.

§. 6.

Um Irrationalitäten zu vermeiden, erheben wir die Fundamentalgleichung ins Quadrat, so ist: $CE^2 \cdot BF^2 = BE^2 \cdot FC^2$.

Man setze nun $BD^2 + DF^2$ statt BF^2; $BD^2 + DE^2$ statt BE^2; $DE - DC$ statt CE; $DC - CF$ statt FC, so erhält man nach einigen nicht schwierigen Verwandlungen eine Formel, die sich durch $DE - DF$ dividiren läfst. Nach geschehener Division findet man folgende Gleichung:

$$(DC^2 + DB^2)(DE + DF) - 2DC \cdot DE, DF + 2DC \cdot DB^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist vollkommen allgemein, und man würde aus derselben, die Auflösung unserer Aufgabe, nicht blofs für jeden Kegelschnitt, sondern überhaupt für jede Curve ableiten können. Denn man übersieht leicht, dafs man vermittelst der Gleichung der Curve, alles was unsere Formel enthält, durch AD, AF und AE nebst den Constanten der Curve würde ausdrücken können. Wir begnügen uns aber, sie auf die Kegelschnitte anzuwenden.

Entwickelt man aus der obigen Gleichung DF, so erhält man:

$$DF = \frac{2DC \cdot DB^2 + (DC^2 - DB^2)\,DE}{2DC \cdot DE - (DC^2 - DB^2)}$$

und da $AF = DF + AD$, so haben wir

$$AF = \frac{2DC \cdot DB^2 + (DC^2 - DB^2)\,DE}{2DC \cdot DE - (DC^2 - DB^2)} + DA.$$

§. 7.

Die Entfernung des stralenden Punktes vom Spiegel AE sey $= a$. Der Punkt B sey durch seine Abscisse $AD = x$ gegeben, so haben wir $DE = a - x$.

Aus der Gleichung der Curve §. 4. haben wir ferner

$$DB^2 = \frac{4px\,(d - x)}{d}$$

und die Subnormale des Punktes B ist

$$DC = \frac{2p\,(d - 2x)}{d}$$

so dafs sich alle Gröfsen, welche die Formel für AF enthält, durch a, d, p und x ausdrücken lassen.

§. 8.

Es hat daher gar keine Schwierigkeit, für AF einen genauen Ausdruck zu finden, und man erhält nach allen erfoderlichen Reductionen, die mehr mühsam als schwer sind, folgende Formel:

$$AF = \frac{2ddp - 2dp\,(2a - d)\,x + (ad - 4ap - dd)\,x^2 - 8px^3}{2dd\,(a - p) - 2d\,(a - 2p)\,x + (d - 4p)\,x^2}$$

§. 9.

Diese Formel ist für die Anwendung zu verwickelt. Wir werden uns daher auf eine Annäherungsformel beschränken müssen, und man kann dies um so sicherer, da x in jedem Fall gegen a, d und p sehr klein ist. Wir wollen uns daher nur auf die Glieder beschränken, welche Potenzen, niedriger als x^2, enthalten.

§. 10.

Wir setzen also:

$$AF = \frac{adp - 2p(2a-d)x}{d(a-p) - 2(a-2p)x}$$

Diese Formel läfst sich auf folgende Art in zwei Glieder theilen, von denen blofs das zweite x enthält. Zuerst ist

$$AF = \frac{adp\left(1 - \frac{2(2a-d)}{ad}x\right)}{d(a-p)\left(1 - \frac{2(a-2p)}{d(a-p)}x\right)}$$

oder mit Weglassung der höhern Potenzen:

$$AF = \frac{ap}{a-p}\left(1 - \frac{2(2a-d)}{ad}x\right)\left(1 + \frac{2(a-2p)}{d(a-p)}x\right)$$

$$AF = \frac{ap}{a-p}\left(1 - \frac{2(2a-d)}{ad}x + \frac{2(a-2p)}{d(a-p)}x\right)$$

$$AF = \frac{ap}{a-p} - \frac{2ap}{a-p}\left(\frac{2a-d}{ad} - \frac{a-2p}{d(a-p)}\right)x.$$

Man multiplicire das zweite Glied aufserhalb der Klammer mit $\frac{ap}{a-p}$, innerhalb mit dem umgekehrten Werth $\frac{a-p}{ap}$, so ergiebt sich

$$AF = \frac{ap}{a-p} - 2\left(\frac{ap}{a-p}\right)^2\left(\frac{2a-d}{ad}\cdot\frac{a-p}{ap} - \frac{a-2p}{dap}\right)x$$

$$AF = \frac{ap}{a-p} - 2\left(\frac{ap}{a-p}\right)^2\left[\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{d}\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{a}\right)\right]x$$

oder endlich:

$$AF = \frac{ap}{a-p} - 2\left(\frac{ap}{a-p}\right)^2\left(\frac{1}{dp} - \frac{1}{ap} + \frac{1}{aa}\right)x$$

§. 11.

Das erste Glied unserer Formel enthält kein d; es bleibt also für alle Kegelschnitte bei gleichem Parameter ungeändert.

Setzt man $x = o$, so verschwindet das zweite Glied, d. h. $\frac{ap}{a-p}$ ist die Entfernung, in welcher sich diejenigen Stralen nach der Reflexion vereinigen, welche unendlich nahe bei der Achse auffallen. Wir wollen annehmen, dieses geschehe in dem Punkte M, und wollen AM, wie gewöhnlich, α nennen, so erhalten wir die bekannte Formel $\alpha = \frac{ap}{a-p}$; und es ist klar: 1) dafs diese Formel für alle Kegelschnitte gültig sey; 2) dafs der Buchstabe p, der uns bisher blofs der vierte Theil des Parameters war, bei jedem Kegelschnitt zugleich die Brennweite des Spiegels bezeichne. Denn setzt man $a =$ unendlich, so wird $\alpha = p$.

Längenabweichung in der Achse.

§. 12.

Das zweite Glied unserer Formel stellt daher geradezu dasjenige vor, was man die Längenabweichung in der Achse nennt; nämlich FM (Fig. 1.). Es ist also:

$$FM = 2\left(\frac{ap}{a-p}\right)^2\left(\frac{1}{dp} - \frac{1}{ap} + \frac{1}{aa}\right)x$$

Soll dieses FM der Raum seyn, in welchem alles aus E kommende Licht nach der Zurückstralung die Achse schneidet, so mufs x die zu den äufsersten Punkten G und H des Spiegels gehörige Abscisse seyn.

Breitenabweichung in der Achse, oder Halbmesser des Zerstreuungskreises.

§. 13.

Wenn man in dem Punkte M die Linie MN winkelrecht bis an den zurückgeworfenen Stral BN zieht, so ist MN das, was man die Breitenabweichung des Strals BN nennt.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BDF_0 und FMN ergiebt sich

$$MN = \frac{BD \cdot FM}{DF} = \frac{BD \cdot FM}{AF - AD}.$$

Setzen wir in der für AF (§. 10.) gefundenen Formel α statt $\frac{ap}{a-p}$, und Q statt $\left(\frac{1}{dp} - \frac{1}{ap} + \frac{1}{aa}\right)$ vor x, so ist $AF = \alpha - 2\alpha^2 Q x$; $FM = 2\alpha^2 Q x$. Was BD betrifft, so ist (nach §. 7.) $BD^2 = 4px - \frac{4p}{p}x^2$;

da wir aber nach den Gesetzen der Approximation das Glied, welches x^2 enthält, weglassen müssen, so erhalten wir $BD = 2\sqrt{px}$; folglich

$$MN = \frac{4a^2 Qx\sqrt{px}}{a^2 - 2aQx} = 4aQx\sqrt{px}$$

indem bei der Division die folgenden Glieder höhere Potenzen als x^2 enthalten würden. Setzen wir für Q und α wieder ihre Werthe, so ergiebt sich

$$MN = \frac{4ap}{a-p}\left(\frac{1}{dp} - \frac{1}{ap} + \frac{1}{aa}\right) x\sqrt{px}.$$

§. 14.

Aus Gründen, die im folgenden liegen, ist es zweckmäfsig, mit dieser Formel noch folgende Umgestaltung vorzunehmen:

$$MN = \frac{4ap}{a-p}\left(\frac{1}{4pp} - \frac{1}{ap} + \frac{1}{aa} - \frac{1}{4pp} + \frac{1}{dp}\right) x\sqrt{px}$$

$$MN = \frac{4ap}{a-p}\left[\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{2p}\right)^2 + \frac{1}{dp}\right] x\sqrt{px}$$

$$MN = \frac{4ap}{a-p}\left(\frac{(a-2p)^2 - a^2}{4a^2p^2} + \frac{1}{dp}\right) x\sqrt{px}.$$

§. 15.

Für die Entwickelung der Formeln war es bequemer, die Abscisse $AD = x$, als die Ordinate $BD = y$ in Rechnung zu bringen. Für die Anwendung verhält es sich umgekehrt. Da wir nun mit Weglassung von x^2, $y^2 = 4px$ setzen dürfen, so ist $\sqrt{px} = \frac{y}{2}$, und $x = \frac{yy}{4p}$, folglich $x\sqrt{px} = \frac{y^3}{8p}$; demnach

$$MN = \frac{a}{2p\,(a-p)}\left(\frac{(a-2p)^2 - a^2}{4aap} + \frac{1}{d}\right) y^3.$$

§. 16.

Nimmt man an, der Punkt B liege am äufsersten Rande des Spiegels, so sieht man leicht ein, dafs MN der Halbmesser eines kreisförmigen Raums sey, durch welchen alle aus E kommenden, und vom Spiegel zurückgeworfenen Stralen hindurchgehen müssen; d. h. MN ist unter dieser Voraussetzung der Halbmesser des Zerstreuungskreises, oder das Maafs der Undeutlichkeit in der Achse.

Vergleichung der sphärischen und parabolischen Spiegel, in Ansehung der Deutlichkeit in der Achse.

§. 17.

Für den sphärischen Spiegel ist $d = 4p$ (§. 4.), daher

$$MN = \frac{a}{2p\,(a-p)}\left(\frac{(a-2p)^2}{4aap}\right)y^3 = \frac{(a-2p)^2}{8app\,(a-p)}\,y^3.$$

Für den parabolischen Spiegel ist d unendlich, also

$$MN = \frac{a}{2p\,(a-p)}\left(\frac{(a-2p)^2-a^2}{4aap}\right)y^3 = \frac{(a-2p)^2-a^2}{8app\,(a-p)}\,y^3$$

§. 18.

Eine genauere Vergleichung beider Formeln zeigt, dafs die Undeutlichkeit für gewisse Werthe von a bei dem sphärischen, für andere bei dem parabolischen Spiegel gröfser sey. Die Gränzen hievon ergeben sich durch folgende Betrachtung.

Beide Formeln haben gleiche Nenner, es wird also lediglich auf die Vergleichung der Zähler ankommen. Auch ist klar, dafs es bei dieser Vergleichung nur auf ihre absolute Gröfse, nicht auf die Vorzeichnung ankomme.

Völlige Gleichheit beider Zähler findet nur statt, wenn $a = o$, ein Fall, der bei dem optischen Gebrauch solcher Spiegel gar nicht vorkommt. Aber es giebt noch zwei Werthe von a, bei welchen beide Zähler gleich grofs, aber entgegengesetzt sind. Diese Werthe ergeben sich durch Auflösung der Gleichung $(a-2p)^2 = -(a-2p)^2 + a^2$; woraus man findet

$$a = 4p\,(1 \pm \sqrt{0,5}).$$

Es ist aber $\sqrt{0,5} = 0,7071..$ Nennt man daher die beiden Werthe von a, welche dieser Ausdruck in sich schliefst a' und a'', so hat man

$$a' = 4p\,(1 + 0,7071..) = 6,8284..p$$
$$a'' = 4p\,(1 - 0,7071..) = 1,1716..p$$

zwischen diesen beiden Werthen von a, (oder in runden Zahlen, zwischen der einfachen und siebenfachen Brennweite) ist die Undeutlichkeit bei dem sphärischen Spiegel, in allen übrigen Fällen bei dem parabolischen Spiegel kleiner.

Der parabolische Spiegel giebt daher, als Objectivspiegel gebraucht, in der Achse eine gröfsere Deutlichkeit. Zum kleineren Spiegel eines Gregorischen Teleskops hat die sphärische Krümmung den Vorzug.

Hätte

Hätte die Ausführung anderer Krümmungen von Seiten der Mechanik nicht fast unüberwindliche Schwierigkeiten, so würde sich aus unsern Formeln erweisen lassen, dafs für den letztern Fall eine hyperbolische Krümmung noch vorzüglicher seyn würde.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Abweichungen aufser der Achse.

§. 19.

Folgende Betrachtungen mögen uns den Weg zu dieser etwas verwikkelten Untersuchung bahnen.

Es sey H (Fig. 2.) ein stralender Punkt aufser der Achse, von welchem der Stral HQ, der die Achse in P schneidet, normal auf den Spiegel fällt, also in sich selbst zurückgeworfen wird.

Alle übrigen von H kommenden Stralen, welche über oder unter HQ den Spiegel treffen, werden gegen den Normalstral hin reflectirt, und durchschneiden ihn entweder (wie alle, die in der Ebene der Zeichnung liegen), oder sie gehen wenigstens sehr nahe bei ihm vorbei. Alle zurückgeworfene Stralen durchkreuzen sich daher innerhalb eines kleinen Raums, der in unserer Zeichnung als ein kreisförmiger Raum vom Durchmesser $m\mu$ angenommen ist, indem die von den äufsersten Punkten des Spiegels B und S reflectirten Stralen, jener die Linie MN, in welcher eine scharfe Abbildung entstehen sollte, in m, dieser in μ schneidet.

Die Gröfse von $m\mu$ zu bestimmen, ist eigentlich die Aufgabe, die wir aufzulösen haben.

§. 20.

Aus H fälle man HG, und QR aus Q winkelrecht auf die Achse, so ist der Punkt H gegeben, wenn AG und der Punkt Q gegeben sind. Der Punkt Q aber sey durch seine Abscisse AR gegeben. Auch sieht man leicht, dafs unter eben den Voraussetzungen die ganzen Dreiecke QRP und PGH gegeben sind.

§. 21.

Man betrachte nun einen andern aus H kommenden Stral HB, welcher die Achse in E schneidet. Der Punkt B sey wieder durch seine Abscisse AD gegeben, und wenn BC die zu dem Punkt B gehörige Normale ist, so

ist in dem Dreiecke BDC, vermöge der Gleichung der Curve, alles für gegeben zu achten.

§. 22.

Man mache den Winkel CBF = CBE, so ist GF der reflectirte Stral. Man kann aber den Stral HB betrachten, als käme er aus dem Punkte E der Achse, und sein reflectirter Stral schneidet die Achse in F.

Durch diese Betrachtung knüpft sich unsere Untersuchung an die Resultate des ersten Abschnitts, und eine Vergleichung der ersten und zweiten Figur zeigt deutlich, dafs in den Dreiecken EBC, CBF der zweiten Figur alles völlig so sey, wie in den gleichbenannten Dreiecken der ersten. Es findet folglich auch hier die oben §. 6. entwickelte Gleichung statt:

$$= (DC^2 - DB^2)(DE + DF) - 2DC.DE.DF + 2DC.DB^2 = 0.$$

§. 23.

Es sey nun M derjenige Punkt, wo die aus G kommenden und nahe bei A auf den Spiegel fallenden Stralen sich nach geschehener Reflexion vereinigen, so dafs in M die optische Abbildung des Punktes G ist. Dann ist AM das, was im ersten Abschnitt α hiefs, so wie AG das, was dort a genannt wurde. Der Punkt M ist also vermöge des ersten Abschnitts (§. 11.) gegeben, wenn AG = a gegeben ist.

In M errichte man MN winkelrecht, so wird der reflectirte Stral BF diese Linie in irgend einem Punkt m schneiden, und Mm ist diejenige Gröfse, für welche wir zunächst eine Formel suchen wollen.

§. 24.

Diese Formel ergiebt sich aus Betrachtung der ähnlichen Dreiecke BDF, MmF, in welchen sich verhält DF : MF = BD : Mm, oder DF : DF − DM = BD : Mm; daher ist

$$(I.)\quad Mm = \left(1 - \frac{DM}{DF}\right) BD.$$

§. 25.

Wir wollen nun zunächst aus der Fundamentalgleichung (§. 22.) den Werth von $\frac{1}{DF}$ bestimmen. Dividirt man diese Gleichung zuerst durch DE . DF, so erhält man:

$$DC^2 - DB^2)\left(\frac{1}{DF} + \frac{1}{DF}\right) + \frac{2DC.DB^2}{DE.DF} - 2DC = 0,$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\text{(II.)}\quad \frac{1}{DF} = \frac{2DC - (DC^2 - DB^2)\frac{1}{DE}}{(DC^2 - DB^2) + 2DC.DB^2\frac{1}{DE}}$$

Zur Abkürzung wollen wir den Zähler dieser Formel $= Z$, und den Nenner $= N$ setzen, also $\frac{1}{DF} = \frac{Z}{N}$.

§. 26.

Die Linien DC, DB sind, wie oben §. 21. bemerkt worden, als gegeben zu betrachten, wenn der Punkt B gegeben ist. Wir wollen also nur zuerst den Werth von $\frac{1}{DE}$ aus unsern Datis bestimmen. Dieses geschieht auf folgende Art:

1) In den ähnlichen Dreiecken PQR, PGH hat man PR : QR $=$ PG : PH $=$ DG $-$ DP : GH, also ist

$$GH = \frac{DG.QR}{PR} - \frac{DP.QR}{PR}.$$

2) Es ist ferner in den Dreiecken BDE, EGH, DB $+$ GH : DB $=$ DG : DE; woraus folgt

$$\frac{1}{DE} = \frac{1}{DG}\left(1 + \frac{GH}{DB}\right)$$

substituirt man hier den bei Nr. 1. gefundenen Werth von GH, so erhält man

$$\text{(III.)}\quad \frac{1}{DE} = \frac{1}{DG}\left(1 + \frac{DG.QR}{DB.PR} - \frac{DP.QR}{DB.PR}\right)$$

$$\text{oder}\quad \frac{1}{DE} = \frac{1}{DG}\left(1 - \frac{QR.DP}{DB.PR}\right) + \frac{QR}{DB.PR}.$$

§. 27.

Die Data zur Berechnung der Formeln (III.), (II.), (I.) sind nun folgende:

Da der Punkt Q durch seine Abscisse AR gegeben ist, so setzen wir

$$AR = x;\ QR = y,$$

also vermöge der Gleichung der Curve §. 4.

$$QR^2 = y^2 = 4px\left(1 - \frac{1}{d}x\right);\ \text{und}$$

$$PR = 2p\left(1 - \frac{1}{d}x\right);\quad (\S.\ 7.).$$

Der Punkt B ist ferner gleichfalls durch seine Abscisse AD gegeben,

aber wir wollen diese hier nicht durch einen einzelnen Buchstaben bezeichnen, sondern sie durch ihr Verhältnifs gegen $AR = x$ ausdrücken, und

$$AD = n^2 x$$

setzen. Nennen wir ferner die Ordinate $BD = v$, so ist

$$BD^2 = v^2 = 4n^2 px \left(1 - \frac{nn}{d} x\right), \text{ §. 4. und}$$

$$CD = 2p \left(1 - \frac{2nn}{d} x\right); \text{ (§. 7.)}$$

Aus $AD = n^2 x$, und $AR = x$ ergiebt sich ferner

$$DR = (n^2 - 1)\, x.$$

Endlich mufs, wenn der Punkt H gegeben seyn soll, noch AG gegeben seyn. Wir setzen also

$$AG = a; \text{ daher } DG = a - n^2 x = a \left(1 - \frac{nn}{a} x\right).$$

Anmerkung. Wir haben hier alle Formeln, die aus zwei Gliedern bestehen, auf die Form $A(1 + Bx)$ gebracht. Diese Form giebt bei Weglassung der höhern Potenzen von x einen bequemen Algorithmus. Es ist nämlich $A(1 + Bx)\, C(1 + Dx) = AC(1 + Bx + Dx)$; ferner

$$\frac{1}{A(B + Cx)} = \frac{1}{A}(1 - Bx); \quad \frac{A(1 + Bx)}{C(1 + Dx)} = \frac{A}{C}(1 + Bx - Dx);$$

$$[A(1 + Bx)]^n = A^n(1 + nBx); \quad \sqrt[n]{[A(1 + Bx)]} = (1 + \frac{B}{n} x) \sqrt[n]{A};$$

u. s. f. Wir werden von diesem Algorithmus in den folgenden §§. Gebrauch machen.

§. 28.

Es würde zwar nicht unmöglich seyn, aus diesen Datis eine genaue Formel für Mm zu finden, aber die Rechnung würde sehr verwickelt, und durch Irrationalitäten beschwerlich werden. Wir wollen es daher sogleich auf eine Näherungsformel anlegen.

Wir wollen also zuerst den Werth von $\frac{1}{DE}$ nach der Formel (III.) §. 26. berechnen, und dabei alle Glieder weglassen, welche höhere Potenzen von x, als die erste enthalten. Es war §. 26.

$$\frac{1}{DE} = \frac{1}{DG}\left(1 - \frac{QR \cdot DP}{DB \cdot PR}\right) + \frac{QR}{DB \cdot PR}.$$

Nach §. 27. ist

$$\frac{QR^2}{DB^2} = \frac{1}{nn}\left(1 + \frac{nn-1}{d}x\right); \text{ also } \frac{QR}{DB} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{nn-1}{2d}x\right).$$

Hieraus folgt ferner, auch aus §. 27.:

$$\frac{QR}{DB \cdot PR} = \frac{1}{2np}\left(1 + \frac{nn+3}{2d}x\right).$$

Wir bestimmen weiter den Werth des Quotienten $\frac{DP}{PR}$, nämlich

$\frac{DP}{PR} = \frac{PR - DR}{PR} = 1 - \frac{DR}{PR}$. Es ist aber vermöge der §. 27. bestimmten Werthe von DR und PR,

$$\frac{DR}{PR} = \frac{nn-1}{2p}x; \text{ also}$$

$$\frac{DP}{PR} = 1 - \frac{nn-1}{2p}x.$$

Hieraus und aus dem obigen Werth von $\frac{QR}{DB}$ ergiebt sich weiter

$$\frac{QR}{DB}\cdot\frac{DP}{PR} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{nn-1}{2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{p}\right)x\right], \text{ und}$$

$$1 - \frac{QR \cdot DP}{DB \cdot PR} = \frac{n-1}{n} - \frac{nn-1}{2n}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{p}\right)x$$

$$= \frac{n-1}{n}\left[1 - \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{p}\right)x\right].$$

Endlich ist nach §. 27. $\frac{1}{DG} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{nn}{a}x\right)$, und so erhalten wir aus §. 26.

$$\frac{1}{DE} = \frac{n-1}{na}\left(1 + \frac{n+1}{np}x - \frac{n+1}{2d}x + \frac{nn}{a}x\right) + \frac{1}{2np}\left(1 + \frac{nn+3}{2d}x\right).$$

§. 29.

Wir gehen nunmehr zur Berechnung des Werthes von $\frac{1}{DF}$, nach der §. 25. entwickelten Formel (II.) über. Es war

$$\frac{1}{DF} = \frac{2DC - (DC^2 - DB^2)\frac{1}{DE}}{(DC^2 - DB^2) + 2DC \cdot DB^2 \frac{1}{DE}} = \frac{Z}{N}.$$

Hier ist zuerst aus §. 27.

$$DC^2 - DB^2 = 4p^2 - \frac{16n^2p^2}{d}x - 4n^2px$$

$$= 4p^2\left(1 - \frac{4n^2}{d}x - \frac{n^2}{p}x\right)$$

und daher aus §. 28.

$$(DC^2 - DB^2)\frac{1}{DE} = \frac{4(n-1)p^2}{na}\left(1 + \frac{n^2}{a}x - \frac{8n^2+n+1}{2d}x - \frac{2n^2-n-1}{2p}x\right)$$

$$+ \frac{2p}{n}\left(1 - \frac{7n^2-3}{2d}x - \frac{n^2}{p}x\right)$$

und da ferner $2DC = 4p\left(1 - \frac{2nn}{d}x\right)$, so ist der Zähler unserer Formel §. 25.

$$Z = 4p\left(1 - \frac{2n}{d}x\right) - \frac{4(n-1)p^2}{na}\left(1 + \frac{n^2}{a}x - \frac{8n^2+n+1}{2d}x - \frac{2n^2-n-1}{2p}x\right)$$

$$- \frac{2p}{n}\left(1 - \frac{7n^2-3}{2d}x - \frac{n^2}{p}x\right).$$

Wenn man diese Formel durch $2p$ dividirt, und dann die Glieder, welche kein x enthalten, von denen, welche es enthalten, absondert, so ergiebt sich

$$\frac{Z}{2p} = \frac{(2n-1)a - 2(n-1)p}{nap} + \frac{1}{n}\left(-\frac{8n^3-7n^2+3}{2d} + \frac{n}{p}\right)x$$

$$- \frac{2(n-1)p}{na}\left(\frac{n^2}{a} - \frac{8n^2+n+1}{2d} - \frac{2n^2-n-1}{2p}\right)x.$$

§. 30.

Es folgt die Berechnung des Nenners N (§. 25.). Es ist zunächst (§. 27.)

$$2DC.DB^2 = 16n^2p^2x.$$

Dieser Werth ist mit $\frac{1}{DE}$ (§. 28.) zu multipliciren. Da er aber schon den Factor x enthält, so haben wir aus dem Werth von $\frac{1}{DE}$ nur die Glieder zu nehmen, welche kein x enthalten; so erhalten wir

$$2DC.DB^2\,\frac{1}{DE} = 16n^2p^2\left(\frac{n-1}{na} + \frac{1}{2np}\right)x = 4p^2\left(\frac{4n(n-1)}{a} + \frac{2n}{p}\right)x$$

Oben §. 29. fanden wir

$$DC^2 - DB^2 = 4p^2\left(1 - \frac{4n^2}{d}x - \frac{n^2}{p}x\right),$$

wir erhalten daher

$$\frac{N}{2p} = 2p\left(1 - \frac{4n^2}{d}x - \frac{n(n-2)}{p}x + \frac{4n(n-1)}{a}x\right).$$

Anstatt hiedurch den Werth von $\frac{Z}{2p}$ zu dividiren, kann man diesen bequemer durch den umgekehrten Werth $\frac{2p}{N}$ multipliciren. Es ist aber

$$\frac{2p}{N} = \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{4n^2}{d}x + \frac{n(n-2)}{p}x - \frac{4n\ n-1)}{a}x\right).$$

§. 31.

Durch Multiplication der Werthe von $\frac{Z}{2p}$ und $\frac{2p}{N}$ erhält man mit Weglassung der höheren Potenzen von x, den Werth von $\frac{Z}{N}$ oder $\frac{1}{DF}$, wie folgt:

$$\frac{1}{DF} = \frac{(2n-1)a - 2(n-1)p}{2nap} + \frac{1}{2np}\left(-\frac{8n^3-7n^2+3}{2d} + \frac{2n^2}{2p}\right)x$$
$$+ \frac{n-1}{na}\left(+\frac{8n^2+n+1}{2d} + \frac{2n^2-n-1}{2p} - \frac{n^2}{a}\right)x$$
$$+ \frac{(2n-1)a - 2(n-1)p}{2nap}\left(+\frac{8n^2}{2d} + \frac{2n(n-2)}{2p} - \frac{4n(n-1)}{a}\right)x,$$

oder wenn man die letzte Zeile in zweie theilt

$$\frac{1}{DF} = \frac{(2n-1)a - 2(n-1)p}{2nap} + \frac{1}{2np}\left(-\frac{8n^3-7n^2+3}{2d} + \frac{2n^2}{2p}\right)x$$
$$+ \frac{n-1}{na}\left(+\frac{8n^2+n+1}{2d} + \frac{2n^2-n-1}{2p} - \frac{n^2}{a}\right)x$$
$$+ \frac{1}{2np}\left(+\frac{8n^2(2n-1)}{2d} + \frac{2n(n-2)(2n-1)}{2p} - \frac{4n(n-1)(2n-1)}{a}\right)x$$
$$+ \frac{n-1}{na}\left(-\frac{8n^2}{2d} - \frac{2n(n-2)}{2p} + \frac{4n(n-1)}{a}\right)x,$$

oder, nach einigen nicht schwierigen Reductionen

$$\frac{1}{DF} = \frac{a-p}{ap} - \frac{a-2p}{2nap} + \frac{n^2-2n+1}{pp}x - \frac{8n^3-15n^2+8n-1}{2nap}x$$
$$+ \frac{3n^2-7n+4}{aa}x + \frac{n^2-1}{2nad}x + \frac{8n^3-n^2-3}{4npd}x$$

§. 32.

Es ist endlich noch der Werth von Mm nach der Formel (I) §. 24. zu berechnen; nämlich

$$Mm = \left(1 - \frac{DM}{DF}\right) BD.$$

Hier ist blofs noch der Werth von DM zu bestimmen. Man erinnere sich, dafs M Fig. 2. derjenige Punkt war, wo Stralen, welche aus G, also aus der Entfernung $AG = a$ kommen, und unendlich nahe bei der Achse auf den Spiegel fallen, sich nach der Zurückstralung vereinigen (§. 23.) Folglich ist

$$AM = \alpha = \frac{ap}{a-p} \text{ (§. 11.). Daher } DM = \frac{ap}{a-p} - n^2 x.$$

Multiplicirt man nun hiemit die letzte im vorigen §. für $\frac{1}{DF}$ gefundene Formel, so erhält man:

$$\frac{DM}{DF} = 1 - \frac{a-2p}{a-p}$$
$$+ \frac{ap}{a-p}\left(\frac{n^2-2n+1}{pp} - \frac{8n^3-15n^2+6n-1}{2nap} + \frac{2n^2-7n+4}{aa} + \frac{n^2-1}{2nad} + \frac{8n^3-n^2-3}{4npd}\right)x$$
$$+ \left(-\frac{a-p}{ap}n^2 + \frac{a-2p}{ap}n\right)x$$

woraus nach gehörigen Veränderungen der in den beiden Klammern befindlichen Glieder folgt

$$1 - \frac{DM}{DF} = \frac{a-2p}{2n(a-p)}$$
$$+ \frac{ap}{a-p}\left(\frac{3n-2}{pp} + \frac{4n^3-12n^2+8n-1}{2nap} - \frac{2n^2-6n+4}{aa} - \frac{n^2-1}{2nad} - \frac{8n^3-n^2-3}{4npd}\right)x$$

Dieser Ausdruck ist noch mit $DB = \left(2n - \frac{n^2}{d}x\right)\sqrt{px}$ (§. 27.) zu multipliciren, und man erhält dadurch

$$Mm = \left[\frac{a-2p}{a-p} + \frac{ap}{a-p}\left(\frac{3n^2-2n}{pp} + \frac{4n^3-12n^2+8n-1}{2ap} - \frac{4n^3-12n^2+8n}{aa} - \frac{n^2-1}{2ad} - \frac{8n^3-n^2-3}{2pd}\right)x\right.$$
$$\left. + \frac{a-2p}{2(a-p)d}n^2x\right]\sqrt{px}.$$

Statt des letzten Gliedes in der äufseren Klammer setze man

$$\frac{ap}{a-p}\left(-\frac{n^2}{2pd} + \frac{p^2}{ad}\right)x,$$

dann

dann läfst sich alles, was mit x multiplicirt ist, vereinigen, und man erhält nun:

$$Mm=\left[\frac{a-2p}{a-p}+\frac{ap}{a-p}\left(\frac{3n^2-2n}{pp}+\frac{4n^3-12n^2+8n-1}{ap}-\frac{4n^3-12n^2+8n}{aa}+\frac{1}{ad}-\frac{8n^3-3}{2dp}\right)x\right]\sqrt{px}.$$

§. 33.

Die Glieder, welche in der innern Klammer stehn, haben wir bisher nach den Divisoren geordnet, weil dadurch die Entwickelung der Formela erleichtert wurde. Der Gebrauch erfodert aber eine Anordnung nach Potenzen von n. Die Formel erhält dadurch folgende Gestalt:

$$Mm=\left[\frac{a-2p}{a-p}+\frac{ap}{a-p}\left(\left(-\frac{1}{ap}+\frac{1}{aa}+\frac{3}{2dp}\right)-\left(\frac{3}{pp}-\frac{8}{ap}+\frac{8}{aa}\right)x+\left(\frac{3}{pp}-\frac{12}{ap}+\frac{12}{aa}\right)n^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-4\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{ap}+\frac{1}{dp}\right)n^3\right)x\right]\sqrt{px}.$$

Zu mehrerer Bequemlichkeit wollen wir folgende Abkürzungen brauchen:

$$A=-\frac{1}{ap}+\frac{1}{aa}+\frac{3}{2dp}=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{dp}$$

$$B=+\frac{2}{pp}-\frac{8}{ap}+\frac{8}{aa}=+2\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{a}\right)^2$$

$$C=+\frac{3}{pp}-\frac{12}{ap}+\frac{12}{aa}=+3\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{a}\right)^2$$

$$D=-\frac{4}{ap}+\frac{4}{aa}+\frac{4}{dp}=+4\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{ap}+\frac{1}{pd}\right)$$

In diesen Bezeichnungen haben wir also

$$Mm=\left[\frac{a-2p}{a-p}+\frac{ap}{a-p}(A-Bn+Cn^2-Dn^3)x\right]\sqrt{px}.$$

§. 34.

Es ist hier der Ort, den Sinn und Werth des Buchstaben n genauer zu erörtern.

Wir haben oben (§. 27.) die dem normalen Stral HQ zugehörige Abscisse AR = x gesetzt, und die zu irgend einem andern von H kommenden Stral HB gehörige AD haben wir n^2x genannt. Es ist also für alle von H kommende Stralen x eine beständige und n eine veränderliche Gröfse, und wir haben

$$n^2=\frac{AD}{AR};\text{ und }n=\pm\sqrt{\frac{AD}{AR}}.$$

Liegt nun der Punkt B (wie in unserer Fig. 2.) entfernter von der Achse als Q, so ist AD > AR, folglich n > + 1. Rückt der Punkt B allmälig näher an Q, so nähert sich n dem Werthe + 1, und es erhält diesen Werth, wenn B mit Q zusammenfällt. Rückt B noch näher gegen die Achse, so wird AD < AR, folglich n < + 1. Kommt B in A, so ist DA = o, also auch n = o. Rückt B auf die andere Seite der Achse, so bewegt sich der Punkt D in der entgegengesetzten Richtung gegen seine vorige Bewegung, d. h. n wird negativ. Verlängert man in der Figur BD bis S, so ist klar, dafs n von A bis S gerade so negativ wachse, wie es von B bis A positiv abgenommen hatte, und dafs zu jeden zwei Punkten, die (wie B und S) gleich weit über und unter der Achse liegen, gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von n gehören.

Unsere Formel giebt also für jeden von H kommenden Stral HB den Punkt m, in welchem er nach der Zurückstralung die Linie MN, in welcher sich eigentlich eine scharfe Abbildung des Punktes H befinden sollte, schneidet.

§. 35.

Es ist aber auch hier für die Anwendung bequemer, die Ordinaten statt der Abscissen in die Formeln zu bringen.

Da die Ordinate QR des Normalstrals für alles aus H kommende Licht eine beständige Gröfse ist, so wollen wir sie nicht mit y, sondern mit c bezeichnen. Da nun nach der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte (§. 4.), mit Weglassung des Gliedes, welches x^2 enthält, $QR^2 = c^2 = 4px$, so erhalten wir

$$AR = x = \frac{cc}{4p}; \quad px = \frac{cc}{4}; \quad \sqrt{px} = \frac{c}{2}.$$

Nennen wir nun die Ordinate des als veränderlich gedachten Punktes B, nämlich AD = v, so haben wir auf eben die Art

$$AD = n^2 x = \frac{vv}{4p}.$$

Da nun $n^2 = \frac{AD}{AR}$ war, so ergiebt sich

$$n^2 = \frac{v^2}{c^2}, \text{ und } n = \frac{v}{c}.$$

§. 37.

Bringt man diese Werthe statt n in die Formel für Mm (§. 33.), so erhält man

$$Mm = \left[\frac{a-2p}{a-p} + \frac{ap}{a-p}\left(A - \frac{B}{c}v + \frac{C}{cc}v^2 - \frac{D}{ccc}v^3\right)\frac{c^2}{4p}\right]\frac{c}{2}$$

oder wenn man alle Glieder, welche das veränderliche v enthalten, von denen trennt, die es nicht enthalten

$$Mm = \frac{a}{8(a-p)}\left(\frac{4(a-2p)}{a} + Ac^2\right)c - \frac{a}{8(a-p)}(Bc^2v - Ccv^2 + Dv^3).$$

§. 37.

Der erste Theil dieser Formel bleibt für alle von H kommende Stralen ungeändert. Der Werth des letzten Stücks aber ist von v abhängig. Setzt man $v = o$, so verschwindet dieses ganze Stück. Folglich bestimmt der erste Theil allein die Stelle der Linie MN, wo der von H kommende Hauptstral HA nach der Zurückstralung die Linie MN schneidet. Macht man also den Winkel GAO = GAH, und durchschneidet AO die MN in dem Punkte r, so ist

$$Mr = \frac{a}{8(a-p)}\left(\frac{4(a-2p)}{a} + Ac^2\right)c.$$

Da wir aber oben (§ 23.) M für denjenigen Punkt angenommen haben, wo eine scharfe Abbildung des Punktes G entstehen sollte, so ist r derjenige Punkt der MN, durch welchen alle von H kommende Stralen nach der Reflexion gehen müfsten, wenn ein scharfes Bild des Punktes H entstehen, und der ganze Gegenstand GH sich in der Linie MN scharf und ähnlich abbilden sollte.

§. 38.

Betrachten wir nun irgend einen andern Stral HB, der den Spiegel oberhalb der Achse trifft, für welchen also v positiv ist, so ergiebt sich aus der negativen Vorzeichnung des zweiten Theils der Formel für Mm (§. 36.), dafs sein reflectirter Stral BK die Linie MN unter r schneiden werde, (wofern nicht etwa in besondern Fällen der ganze zweite Theil der Formel einen negativen Werth erhält). Nehmen wir nun an, der Stral BK schneide die MN in m, so ist klar, dafs das letzte Glied unserer Formel die kleine Linie rm vorstelle, welche wir die Abweichung des Strals BK nennen, und mit dem Buchstaben u bezeichnen wollen. Da nun rm = Mr — Mm, so ergiebt sich $rm = u = +\frac{a}{8(a-p)}(Bc^2v - Ccv^2 + Dv^3)$. So ausge-

drückt, zeigt die positive Vorzeichnung einer Abweichung an, dafs sie unter r, eine negative, dafs sie über r liege.

§. 39.

Setzen wir statt B, C und D wieder ihre Werthe aus §. 33, so erhalten wir folgende Formel für

die Abweichung aufser der Achse

$$u = \frac{a}{8(a-p)}\left[2\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{a}\right)^2 c^2 v - 3\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{a}\right)^2 cv^2 + 4\left(\frac{1}{aa}-\frac{1}{ap}+\frac{1}{pd}\right)v^3\right]$$

Diese Formel ist als das Hauptresultat unserer Untersuchung anzusehen, indem sie für jeden Stral, der von einem Spiegel zurückgeworfen wird, angiebt, wie weit er sich von der Stelle entfernt, durch welche er eigentlich gehen müfste, um eine scharfe Abbildung zu machen.

Gebrauch der Formel zur Bestimmung des Zerstreuungskreises.

§. 40.

Unter allen vom Spiegel zurückgeworfenen Stralen mufs es einen geben, der am tiefsten, und einen andern der am höchsten über r durch MN geht. Nehmen wir also an, dafs der von B reflectirte Stral die MN am tiefsten in m, der von S reflectirte aber am höchsten in μ schneide, so werden alle übrigen vom Spiegel kommenden Stralen zwischen m und μ durchgehen müssen. Legt man nun durch MN eine auf der Achse winkelrechte Ebene und beschreibt in dieser einen Kreis vom Durchmesser $m\mu$, so sieht man leicht, dafs alles vom Punkt H kommende u vom Spiegel zurückgeworfene Licht, welches sich eigentlich in den einzigen Pnnkt r sammeln sollte, über die Fläche dieses Kreises zerstreuen, und eine desto undeutlichere Abbildung von H machen werde, je gröfser $m\mu$ ist.

Wir nennen daher $m\mu$ den *Durchmesser des Zerstreuungskreises*, und betrachten ihn als das Maafs der Undeutlichkeit.

Die durch MN gelegte Ebene wollen wir die Ebene des Bildes, so wie eine durch GH winkelrecht auf die Achse gelegte Ebene die Ebene des Gegenstandes nennen. Denn denken wir uns den stralenden Gegenstand als eine in der Ebene GH beliebig gezeichnete Figur, so ist klar, dafs ihr optisches Bild eine ähnliche, und ähnlich nur entgegengesetzt liegende Fi-

gur in der Ebene MN seyn müfste, wenn überhaupt eine scharfe Abbildung möglich wäre.

§. 41.

Im Allgemeinen ist über den Zerstreuungskreis folgendes zu bemerken:

1) Dafs alle in der Ebene der Zeichnung liegende Stralen zwischen m und μ durchgehen müssen, folgt nothwendig aus dem blofsen Begriff des Zerstreuungskreises. Was aber solche Stralen betrifft, welche von II aus über oder unter der Ebene der Zeichnung zum Spiegel gelangen, so würde eine genaue Bestimmung der Punkte, wo sie durch die Ebene des Bildes gehen, eine sehr verwickelte Untersuchung erfodern. Man kann sich aber dieser Untersuchung überheben, denn da erweislich die Zerstreuungskreise in der Achse wirkliche Kreise sind, so folgt schon aus dem Gesetze der Stätigkeit, dafs sie in der Nähe der Achse nur sehr wenig von der Kreisgestalt abweichen können. Sollte daher auch ein Kreis vom Durchmesser $m\mu$ in der That nicht alle zu dem Punkt II gehörige Stralen aufnehmen, so ist doch gewifs, dafs die, welche etwa neben demselben durchgehen möchten, nur einen ganz unbedeutenden Theil aller ausmachen werden.

2) Wir haben in Fig. 2. und im 4ten §. angenommen, dafs die von den äufsersten Punkten B und S kommenden Stralen auch am entferntesten von r durch die Ebene des Bildes gehen. So verhält es sich in der That, wie wir sehen werden, bei dem sphärischen Spiegel. Bei anders gekrümmten Spiegeln kann es sich anders verhalten, so wie wir es namentlich bei dem parabolischen anders finden werden.

3) Da die §. 39. gefundene Formel für jeden in der Ebene der Zeichnung liegenden Stral den Punkt seines Durchgangs durch die Ebene des Bildes bestimmt, so ist klar, dafs man in jedem Fall vermittelst derselben auch die äufsersten Durchgangspunkte m und μ werde finden können, die Stralen, wozu sie gehören, mögen vom Rande oder von andern Punkten des Spiegels kommen. Man wird also auch in jedem Fall die Gröfse von $m\mu$ finden können. Aber diese Untersuchung läfst sich nicht mehr allgemein für alle Kegelschnitte anstellen. Man mufs sie für jeden besonders führen, weil die Function von v, durch welche die Abweichung §. 39. bestimmt wird, bei den einzelnen Kegelschnitten Veränderungen erleidet, welche auf die Lage der Punkte m und μ wesentlichen Einflufs haben.

§. 42.

Was sich im Allgemeinen darüber sagen läfst, möchte sich etwa auf folgendes beschränken:

Der Werth von u (§. 39.) ist im Allgemeinen in Ansehung v eine Function vom dritten Grade. Daher mufs es immer drei Werthe von v geben, zu denen ein und derselbe Werth von u gehört, und wir werden sehen, dafs in besondern Fällen alle drei Werthe möglich sind. Dann giebt es also drei Stralen, welche gleiche Abweichung haben, also durch einen und denselben Punkt der Linie MN gehen.

In dem Fall, wenn die Function drei mögliche Werthe hat, giebt es einen dreifachen Wechsel des Positiven und Negativen, zwischen welchen zwei analytische Maxima, ein positives und ein negatives liegen. Hieraus begreift man die Möglichkeit, dafs die gröfsten Abweichungen nicht nothwendig zu den äufsersten Stralen vom Rande des Spiegels gehören.

Endlich ist es klar, dafs es bei jedem Kegelschnitte gewisse Werthe von a gebe, für welche das Glied, welches v^3 enthält, verschwindet, wodurch die Function wesentlich verändert, und auf den zweiten Grad gebracht wird.

Aus diesem allen ist es einleuchtend, dafs die Bestimmung des Durchmessers $m\mu$ immer nur für einen hinlänglich bestimmten Fall gemacht werden könne, dafs sie aber alsdann keine Schwierigkeit habe. Wir wollen uns daher auch im dritten Abschnitt blofs auf die Vergleichung der Undeutlichkeit bei einem sphärischen und parabolischen Objectiv-Spiegel beschränken, weil dieses für die Anwendung von Wichtigkeit, und zugleich hinreichend ist, die Methode der Untersuchung sichtbar zu machen.

Dritter Abschnitt.

Vergleichung der Undeutlichkeit bei sphärischen und parabolischen Objectivspiegeln von gleicher Brennweite.

§. 43.

Da wir uns blofs auf Objectivspiegel einschränken wollen, so dürfen wir $a = \infty$ setzen, wodurch die Formel für die Abweichung (§. 39.) folgende einfache Gestalt erhält:

$$u = \frac{1}{8pp}\left(2c^2v - 5c\mu^2 + \frac{4p}{d}v^3\right),$$

Für den sphärischen Spiegel ist ferner $d = 4p$ (§. 4.), also

$$u = \frac{1}{8pp}(2c^2v - 3cv^2 + v^3) = \frac{v(v-c)(v-2c)}{8pp}.$$

Für den parabolischen ist $d = \infty$ (§. 4.), also

$$u = \frac{1}{8pp}(2c^2v - 3cv^2) = \frac{-cv(3v-2c)}{8pp}.$$

§. 44.

Es ist aber von Wichtigkeit, ehe wir in eine bestimmtere Vergleichung beider Spiegel eingehen, eine Betrachtung über den Werth des Buchstaben c und sein Verhältnifs gegen den Oeffnungshalbmesser des Spiegels anzustellen.

Wenn der Punkt Q, Figur 3., wie in der vorigen Figur die Stelle bezeichnet, wo der Normalstral auffällt, so ist die Ordinate von Q, wofür wir hier unbedenklich den Bogen AQ selbst nehmen können, die Gröfse, die wir c genannt haben. Dagegen ist v die Ordinate des Punktes, wo der Stral auffällt, dessen Abweichung bestimmt werden soll; es ist also eine veränderliche Gröfse, welche von Null an positiv und negativ wachsen kann, bis zu der Gröfse des Oeffnungshalbmessers $AS = AB$.

Der Normalstral PQ schneide die Achse in P, so können wir wegen der Kleinheit der zu Q gehörigen Abscisse die Länge AP als die Subnormale betrachten. Diese ist aber (nach §. 7.) bei allen Kegelschnitten $= 2p\left(1 - \frac{2x}{d}\right)$, wofür wir aber wieder wegen der Kleinheit von x bei allen Kegelschnitten 2p annehmen dürfen. Halbirt man also AP in M, so ist $AM = p$. Errichtet man nun MN winkelrecht, und legt durch sie eine auf der Achse winkelrechte Ebene, so ist diese die Ebene des Bildes für einen unendlich entfernten Gegenstand. Man ziehe CA parallel mit PQ, und AD durch r, wo MN vom Normalstral geschnitten wird, so ist CA der Hauptstral des Lichtcylinders, der sich nach der Zurückstralung in r vereinigen sollte, und aus der leicht erweislichen Gleichheit der Winkel CAP, PAD ist klar, dafs AD die Reflexion des Hauptstrals sey. Wir wollen nun annehmen, dafs das in der Ebene MN entstehende Bild unmittelbar durch ein dahinter, etwa in E aufgestelltes Oculargias betrachtet würde, so sieht man leicht, dafs das Oculargias DG bis an die beiden Stralen AC und AD reichen müfste, wo-

fern man denjenigen Punkt des Gegenstandes, von welchem die Stralen CA, PQ kommen, noch am Rande des Gesichtsfeldes mit genügendem Lichte erblicken soll. Die Brennweite des Oculars aber müfste EM seyn. Man setze ferner, dafs das Fernrohr m mal vergröfsern sollte, so müfste $EM = \frac{p}{m}$ seyn, und da der Oeffnungshalbmesser des Oculars schwerlich gröfser als $\frac{1}{5}$ seiner Brennweite seyn darf, so ist $ED = EC$ höchstens $\frac{p}{5m}$. Wegen der Kleinheit der Brennweite ist aber ED nur sehr wenig gröfser als Mr, und so ergiebt sich, dafs Mr höchstens $= \frac{p}{5m}$ seyn könne. Da aber $AP = 2AM$, so ist auch $AQ = 2Mr$; aber AQ ist $= c$, und so ergiebt sich, dafs c höchstens $\frac{2p}{5m}$ betragen könne, für diejenigen Stralen, die vom äufsersten sichtbaren Punkt des Gegenstandes kommen. Demnach wird sich AQ : AM d. h. c : p höchstens wie $\frac{2}{5m}$: 1 verhalten, so dafs c immer ein desto kleinerer Bruch der Brennweite seyn wird, je gröfser m ist.

Was aber den äufsersten Werth von $v = AB$ betrifft, so wird es hier, wo es nur auf eine Schätzung ankommt, hinreichend seyn, dieselbe nach einem wirklich ausgeführten vorzüglichen Instrument zu bestimmen. *Herschel* erwähnt (m. s. das astr. Jahrb. für 1817. S. 225.) eines siebenfüfsigen Teleskops als eines sehr vorzüglichen Instruments, indem es Vergröfserungen bis zum 6000fachen vertrage. Die Brennweite desselben war 85,2 Zoll, der Oeffnungshalbmesser 3,1. Es verhielt sich also hier $v : p$ nahe wie 1 : 27, oder es war $v = \frac{p}{27}$.

Also verhielt sich $c : v = \frac{2}{5m} : \frac{1}{27} = \frac{54}{5m} : 1$ fast $= \frac{11}{m} : 1$.

Herschels schwächste Vergröfserung war bei diesem Instrument eine 227fache. Es war also c kaum $\frac{1}{20}$ von dem Oeffnungshalbmesser. Und es ist überhaupt sichtbar, dafs c überall bei starken Vergröfserungen gegen den äufsersten Werth, den v haben kann, sehr klein seyn werde.

Nach

Nach dieser vorläufigen Betrachtung kommen wir zu der Bestimmung des Zerstreuungskreises bei beiden Spiegeln.

Zerstreuungskreis bei dem sphärischen Spiegel.

§. 45.

Da die Gleichung für die Abweichung (§. 43.)

$$v^3 - 3cv^2 + 2c^2v = 8ppu$$

vom dritten Grade ist, so wird in den Werthen von u ein dreifacher Wechsel der Zeichen statt finden, und zu jedem Werth von u ein dreifacher von v gehören. Für $u = o$ sind diese drei Werthe $v = o$, $v = c$, $v = 2c$. Macht man also (Fig. 3.) $QU = QA$, so werden die drei aus A, Q und U zurückgeworfenen Stralen ohne Abweichung durch r gehen.

Es hat nun keine Schwierigkeit, die Veränderungen der Abweichung für alle Punkte des Spiegels zu übersehen. Wir wollen dieses von S aus gegen B fortschreitend thun.

Für den Punkt S muſs $v = AS$, und negativ gesetzt werden. Dann ist $u = \frac{-v^3 - 3cv^2 - 2c^2v}{8pp}$. Da also u negativ ist, so geht der von S reflectirte Stral über v durch MN (§. 38.). Wir nehmen an in μ.

Läſst man nun das negative v bis Null abnehmen, so nehmen auch die Abweichungen bis Null ab. Alle von SA kommende Stralen gehen also, zwischen μ und r durch.

Von $v = o$ bis $v = c$ gehen nun die Werthe von u ins Positive über, also liegen alle Abweichungen der Stralen, die von AQ kommen, unter r. Aber zwischen diesen beiden Werthen von v muſs ein Maximum der Abweichung liegen. Man findet es bei $v = c\,(1 - \sqrt{\frac{1}{3}})$; und wenn dieser Werth in die Gleichung gebracht wird, so findet man die gröſste Abweichung $u = \frac{c^3}{12pp}\sqrt{\frac{1}{3}}$. Macht man demnach $A\alpha = c\,(1 - \sqrt{\frac{1}{3}})$, oder $Q\alpha = c\sqrt{\frac{1}{3}}$, und $ra = \frac{c^3}{12pp}\sqrt{\frac{1}{3}}$, so sieht man, daſs alle von A bis α kommende Stralen in dem Raum von r bis a, alle von α bis Q kommende aber umgekehrt von a bis r mit abnehmender Abweichung durchgehen.

Von $v = c$ bis $v = 2c$ müssen die Abweichungen wieder negativ werden, also über r liegen. Die gröſste Abweichung findet sich bei $v = c(1 + \sqrt{\frac{1}{3}})$,

wozu die Abweichung $u = -\frac{c^3}{12pp}\sqrt{\frac{1}{3}}$ gehört. Macht man also

$A\beta = c\,(1+\sqrt{\frac{1}{3}})$, oder $Q\beta = c\sqrt{\frac{1}{3}}$, und $rb = \frac{c^3}{12pp}\sqrt{\frac{1}{3}}$, so werden alle von $Q\beta$ kommende Stralen, von r bis b, und alle von βU kommende umgekehrt von b bis r durchgehen.

Wird endlich $v > 2c$, so werden die Abweichungen wieder positiv, und fallen unter r, und wenn wir m für den Punkt nehmen, wo der von B kommende Stral durchgeht, so müssen alle von UB kommende Stralen von r bis m durchgehen.

§. 46.

Wir haben die Punkte m und μ in der Figur aufserhalb des Raums ab gesetzt, und es läfst sich leicht zeigen, dafs die Sache es so fodere. Denn wenn wir v für den Oeffnungshalbmesser nehmen, so sind die Abweichungen für B und S

$$rm = \frac{v^3 - 3cv^2 + 2c^2v}{8pp}; \quad r\mu = \frac{-v^3 - 3cv^2 - 2c^2v}{8pp};$$

Beide Werthe sind aber wegen der Kleinheit von c wenig verschieden von $\pm\frac{v^3}{8pp}$. Dagegen war $ra = rb = \frac{c^3}{12pp}\sqrt{\frac{1}{3}}$, welches gegen das vorige offenbar sehr klein ist.

Es ist $m\mu$ der Durchmesser desjenigen Raums, durch welchen alle vom Spiegel reflectirten Stralen gehen müssen. Dieser Raum ist aber die absolute Summe von rm und $m\mu$. Folglich erhalten wir für den Durchmesser des Zerstreuungskreises

$$m\mu = \frac{v^3 + 2c^2v}{4pp}; \text{ oder beinahe} = \frac{v^3}{4pp}.$$

§. 47.

Da indessen das Licht über den Zerstreuungskreis sehr ungleichförmig vertheilt ist, so ist es nicht überflüssig, zu untersuchen, ob sich nicht in dem kleinen Raum ab, (wo durch jeden Punkt drei Stralen gehen, während durch jeden andern Punkt der $m\mu$ nur einer geht) vielleicht so viel Licht verdichte, dafs alles übrige aufser ab durchgehende dagegen für unbeträchtlich zu achten sey. Diese Betrachtung darf um so weniger vernachlässigt

werden, da sich aus §. 45. ergiebt, dafs durch ab nicht blofs alles das Licht gehe, was vom Raum des Spiegels $\alpha\beta$ kommt, sondern auch noch ein Theil dessen, was unter α und über β reflectirt wird.

Nehmen wir an, dafs der äufserste durch a gehende Stral aus β, der äufserste durch b gehende aus γ komme, so läfst sich der ganze Raum $\beta\gamma$ auf folgende Art bestimmen.

Die beiden gröfsten Abweichungen gehörten zu $v = c\,(1 \mp \sqrt{\frac{1}{3}})$; die gröfsten Abweichungen selbst waren $u = \pm \frac{c^3}{12pp}\sqrt{\frac{1}{3}}$. Bringt man diesen Werth von u in die Gleichung $v^3 - 3cv^2 + 2c^2v - 8ppu = o$, so erhält man $v^3 - 3cv^2 + 2c^2v \mp \frac{2c^3}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = o$. Aus der Theorie der Gleichungen ist bekannt, dafs in einem Maximum allezeit zwei gleiche Wurzeln vereinigt sind. Daher mufs sich die letzte Gleichung nicht blofs durch $[v - c\,(1 \mp \sqrt{\frac{1}{3}})] = o$, sondern auch durch $[v - c(1 \mp \sqrt{\frac{1}{3}})]^2 = o$ dividiren lassen. Verrichtet man diese Division wirklich, so erhält man den Quotienten $v - c\,(1 \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}}) = o$, also $v = c \pm 2c\sqrt{\frac{1}{3}}$. Macht man demnach $A\gamma = c + 2c\sqrt{\frac{1}{3}}$, und $A\delta = c - 2c\sqrt{\frac{1}{3}}$, oder, was dasselbe ist $Q\gamma = Q\delta = 2c\sqrt{\frac{1}{3}}$ (also gerade noch einmal so grofs als $Q\beta$ und $Q\alpha$), so sind γ und δ die Punkte, von welchen die äufsersten durch a und durch b gehenden Stralen kommen, und $\gamma\delta$ ist $= 4c\sqrt{\frac{1}{3}}$, oder nahe 2, 5. c.

Bei starken Vergröfserungen ist dieser Raum gegen die ganze Oeffnung des Spiegels nicht beträchtlich; bei schwachen kann er bedeutend werden. Für den ersten Fall werden wir also $m\mu$, nicht ab für den Durchmesser des Zerstreuungskreises nehmen müssen.

Zerstreuungskreis bei dem parabolischen Spiegel.

§. 48.

Für den parabolischen Spiegel war (§. 45.) die Gleichung für die Abweichung $-3cv^2 + 2c^2v = 8ppu$. Da diese Gleichung nur vom zweiten Grade ist, so ist klar, dafs sich das Licht hier ganz anders auf dem Zerstreuungskreise vertheilt, als bei dem sphärischen Spiegel.

Die Abweichung u ist $= o$, für $v = o$ und für $v = \frac{2}{3}c$. Macht man demnach (Fig. 3.) $A\pi = \frac{2}{3}AQ = \frac{2}{3}c$, so werden sich blofs die aus A

und π zurückgeworfenen Stralen in r schneiden. Zwischen diesen Gränzen ist u negativ, also liegt die Abweichung aller von $A\pi$ kommenden Stralen unter r; für alle andern Werthe von v ist die Abweichung positiv, und fällt über r.

Verfolgen wir also wieder die Stralen von S gegen B, so geht der von S zurückgeworfene Stral über r durch, und wir nehmen an, dafs es in μ geschehe. Alle übrigen von SA kommenden gehen mit immer kleineren Abweichungen zwischen μ und r durch, bis der von A zurückgeworfene durch r selbst geht. Die zunächst über A auffallenden Stralen gehen unter r durch. Es giebt aber zwischen $v = o$ und $v = \frac{2}{3}c$ eine gröfste Abweichung. Sie gehört zu $v = \frac{1}{3}c$, und ist $u = \frac{c^3}{24pp}$. Setzt man also $A\alpha = \frac{1}{2}A\pi = \frac{1}{3}c$ und $ra = \frac{u^3}{24pp}$, so geht der von α kommende Stral durch a, und ist der äufserste, der unter r durchgehen kann; denn die von $\alpha\pi$ kommenden gehen wieder mit abnehmenden Abweichungen durch πr. Alle von πB kommende endlich gehen mit zunehmenden Abweichungen über r durch, bis der von B selbst reflectirte Stral durch einen Punkt geht, der ganz nahe unter μ liegt.

§. 49.

Nehmen wir jetzt wieder v für den Oeffnungshalbmesser, so gehört zu $AB = +v$ die Abweichung $\frac{-cv(3v-2c)}{8pp}$, und zu $AS = -v$, die Abweichung $r\mu = \frac{-cv(3v+2c)}{8pp}$. Beide sind wegen der Kleinheit von c wenig verschieden, und kommen dem Werthe $\frac{-3cvv}{8pp}$ sehr nahe. Die gröfste Abweichung unter r aber war $ra = \frac{c^3}{24pp}$.

Der Durchmesser des Zerstreuungskreises ist daher die absolute Summe von $r\mu$ und ra, nämlich $a\mu = \frac{9cv^2+c^3}{24pp}$, welches wegen der Kleinheit von c nur wenig von $\frac{3cvv}{8pp}$ verschieden ist.

§. 50.

Nennen wir den Durchmesser des Zerstreuungskreises bei dem sphärischen Spiegel s, bei dem parabolischen p, und brauchen die im vorigen und im 45sten §. gefundenen Näherungsausdrücke, so verhält sich

$$s : p = \frac{v^3}{4pp} : \frac{5v^2c}{8pp} = 1 : \frac{5c}{2v},$$

wodurch allerdings der grofse Vorzug des sphärischen vor dem parabolischen Spiegel bei starken Vergröfserungen unzweideutig dargethan ist.

§. 51.

Bei einer früheren Untersuchung dieses Gegenstandes, wovon ein Auszug in dem astr. Jahrb. für 1708 (S. 136. ff.) gedruckt ist, urtheilte der Verfasser, dafs der sphärische Spiegel kleinere Abweichungen habe, als der parabolische. Dieses war unrichtig. Aber der Grund des Irrthums lag nicht in einem Fehler der Rechnung. Denn die dort gegebenen Formeln sind zwar minder bequem und geschmeidig, als die hier entwickelten, aber ihre Richtigkeit würde sich unzweideutig erweisen lassen, wenn sie nicht durch die hier weit vollständiger entwickelte Theorie entbehrlich geworden wären. Das unrichtige Urtheil rührte daher, dafs der Verfasser den Objectivspiegel blofs für sich, nicht in Verbindung mit Ocularen betrachtete. Daher setzte er den äufsersten Normalstral an den Rand des Spiegels, wodurch alle Werthe von $v \angle c$, und daher die im vorigen §. gefundene Gröfse $\frac{5c}{2v}$ allerdings gröfser als 1, also die Undeutlichkeit bei dem parabolischen Spiegel gröfser als bei dem sphärischen wird. Wenn die Bilder eines Spiegels nicht durch Oculare betrachtet, sondern auf einer weifsen Wand aufgefangen werden sollten, dann würde jener Schlufs des Verfassers völlig richtig seyn.

Entwickelung von $x^n + y^n$ in eine Reihe, die nach Potenzen von $(x+y)$ und von xy fortschreitet, und deren Anwendung bei Auflösung der Gleichungen.

(Der Exponent n mufs eine ganze positive Zahl sein, übrigens darf n sowohl gerade als ungerade sein.)

Von Herrn Gruson *).

I. Lehrsatz. $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$.

Bew. Was rechter Hand stehet, wirklich entwickelt, giebt das, was linker Hand stehet.

Anwendung.

1) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

2) $x^3 + y^3 = (x+y)[x^2 + y^2] - xy[x+y]$
$= (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

3) $x^4 + y^4 = (x+y)[x^3 + y^3] - xy[x^2 + y^2]$
$= (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2$

4) $x^5 + y^5 = (x+y)[x^4 + y^4] - xy[x^3 + y^3]$
$= (x+y)^5 - 5xy(x+y)^3 + 5x^2y^2(x+y)$

5) $x^6 + y^6 = (x+y)[x^5 + y^5] - xy[x^4 + y^4]$
$= (x+y)^6 - 6xy(x+y)^4 + 9x^2y^2(x+y)^2 - 2x^3y^3$

6) $x^7 + y^7 = (x+y)[x^6 + y^6] - xy[x^5 + y^5]$
$= (x+y)^7 - 7xy(x+y)^5 + 14x^2y^2(x+y)^3 - 7x^3y^3(x+y)$

*) Vorgelesen den 28. Aprill 1814.

8) $x^8 + y^8 = (x+y)[x^7+y^7] - xy[x^6+y^6]$
$= (x+y)^8 - 8xy(x+y)^6 + 20x^2y^2(x+y)^4 - 16x^3y^3(x+y)^2$
$+ 2x^4y^4$

9) $x^9 + y^9 = (x+y)[x^8+y^8] - xy[x^7+y^7]$
$= (x+y)^9 - 9xy(x+y)^7 + 27x^2y^2(x+y)^5 - 30x^3y^3(x+y)^3$
$+ 9x^4y^4(x+y)$

10) $x^{10} + y^{10} = (x+y)[x^9+y^9] - xy[x^8+y^8]$
$= (x+y)^{10} - 10xy(x+y)^8 + 35x^2y^2(x+y)^6 - 50x^3y^3(x+y)^4$
$+ 25x^4y^4(x+y)^2 - 2x^5y^5$

11) $x^{11} + y^{11} = (x+y)[x^{10}+y^{10}] - xy[x^9+y^9]$
$= (x+y)^{11} - 11xy(x+y)^9 + 44x^2y^2(x+y)^7 - 77x^3y^3(x+y)^5$
$+ 55x^4y^4(x+y)^3 - 11x^5y^5(x+y)$

12) $x^{12} + y^{12} = (x+y)[x^{11}+y^{11}] - xy[x^{10}+y^{10}]$
$= (x+y)^{12} - 12xy(x+y)^{10} + 54x^2y^2(x+y)^8 - 112x^3y^3(x+y)^6$
$+ 105x^4y^4(x+y)^4 - 56x^5y^5(x+y)^2 + 2x^6y^6$

etc.

Diese Entwickelungen berechtigen schon, zu schliefsen, dafs die allgemeine Form sein wird

$$x^n + y^n = (x+y)^n + A_1 xy(x+y)^{n-2} + A_2 x^2y^2(x+y)^{n-4} + A_3 x^3y^3(x+y)^{n-6} + \ldots + A_r x^r y^r (x+y)^{n-2r} + \ldots$$

also

$$0 = {}^n\mathfrak{A}\left|x^{n-}\right. + {}^n\mathfrak{B}\left|x^{n-3}y + {}^n\mathfrak{C}\right|x^{n-4}y^2 + {}^n\mathfrak{D}\left|x^{n-5}y^3 + {}^n\mathfrak{E}\right|x^{n-6}y^4 + \ldots + {}^n\mathfrak{A}\left|y^{n-}\right.$$
$$+ A_1\left(\left|1\right. + {}^{n-2}\mathfrak{A}\right| + {}^{n-2}\mathfrak{B}\left| + {}^{n-2}\mathfrak{C}\right| + {}^{n-2}\mathfrak{D}\left| + \ldots\right.$$
$$+ A_2\left(\left|1\right. + {}^{n-4}\mathfrak{A}\right| + {}^{n-4}\mathfrak{B}\left| + {}^{n-4}\mathfrak{C}\right| + \ldots\right.$$
$$+ A_3\left(\left|1\right. + {}^{n-6}\mathfrak{A}\right| + {}^{n-6}\mathfrak{B}\left| + \ldots\right.$$
$$+ A_4\left(\left|1\right. + {}^{n-8}\mathfrak{A}\right| + \ldots\right.$$

etc.

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen

$${}^n\mathfrak{A} + A_1 = 0$$
$${}^n\mathfrak{B} + {}^{n-2}\mathfrak{A}.A_1 + A_2 = 0$$
$${}^n\mathfrak{C} + {}^{n-2}\mathfrak{B}.A_1 + {}^{n-4}\mathfrak{A}.A_2 + A_3 = 0$$
$${}^n\mathfrak{D} + {}^{n-2}\mathfrak{C}.A_1 + {}^{n-4}\mathfrak{B}.A_2 + {}^{n-6}\mathfrak{A}.A_3 + A_4 = 0$$
$${}^n\mathfrak{E} + {}^{n-2}\mathfrak{D}.A_1 + {}^{n-4}\mathfrak{C}.A_2 + {}^{n-6}\mathfrak{B}.A_3 + {}^{n-8}\mathfrak{A}.A_4 + A_5 = 0$$
$$\vdots$$
$${}^n\mathfrak{R} + {}^{n-2}\mathfrak{R}.A_1 + {}^{n-4}\mathfrak{R}.A_2 + {}^{n-6}\mathfrak{R}.A_3 + {}^{n-8}\mathfrak{R}.A_4 + {}^{n-10}\mathfrak{R}.A_5 + \ldots$$
$$+ {}^{n-(2r-2)}\mathfrak{A}.A_{r-1} + A_r = 0$$

demnach

$$A_1 = -{}^n\mathfrak{A} = -n$$

$$A_2 = -{}^n\mathfrak{B} - {}^{n-1}\mathfrak{A}.A_1 = n.n-2 - \frac{n.n-1}{1.2}$$

$$= \frac{n.n-3}{1.2}.$$

$$A_3 = -{}^n\mathfrak{C} - {}^{n-1}\mathfrak{B}.A_1 - {}^{n-2}\mathfrak{A}.A_2$$

$$= -\frac{n.n-4.n-5}{1.2.3}.$$

$$A_4 = -{}^n\mathfrak{D} - {}^{n-1}\mathfrak{C}.A_1 - {}^{n-2}\mathfrak{B}.A_2 - {}^{n-3}\mathfrak{A}.A_3$$

$$= \frac{n.n-5.n-6.n-7}{1.2.3.4}.$$

$$A_5 = -{}^n\mathfrak{E} - {}^{n-1}\mathfrak{D}.A_1 - {}^{n-2}\mathfrak{C}.A_2 - {}^{n-3}\mathfrak{B}.A_3 - {}^{n-4}\mathfrak{A}.A_4$$

$$= -\frac{n.n-6.n-7.n-8.n-9}{1.2.3.4.5}.$$

etc.

Das hier wahrzunehmende Gesetz erlaubt uns, anzunehmen, dafs

$$A_r = \pm \frac{n.n-(r+1).n-(r+2).n-(r+3)\ldots n-(2r-1)}{1.2.3.4.\ldots r}.$$

Bewiesen wird dieses Gesetz durch folgende Betrachtung:

Es sei der Kürze wegen $x+y=u$ und $xy=p$.

Nun sei $x^n + y^n = u^n - A_1 p.u^{n-2} + A_2 p^2 u^{n-4} - A_3 p^3.u^{n-6}$
$+ \ldots \pm A_r p^r u^{n-2r} \mp \ldots$

und $x^{n-1} + y^{n-1} = u^{n-1} - B_1 p.u^{n-3} + B_2 p^2 u^{n-5} - B_3 p^3 u^{n-7}$
$+ \ldots \pm B_r p^r.u^{n-(2r+1)} \mp \ldots$

eben so $x^{n-2} + y^{n-2} = u^{n-2} - C_1 p.u^{n-4} + C_2 p^2 u^{n-6} - C_3 p^3 u^{n-8}$
$+ \ldots \pm C_r p^r.u^{n-(2r+2)} \mp \ldots$

Nun mufs nach unserm Lehrsatze I. sein

$$x^n + y^n = u[x^{n-1} + y^{n-1}] - p[x^{n-2} + y^{n-2}]$$

$$= \left\{\begin{array}{l} u^n - B_1 p u^{n-2} + B_2 p^2 u^{n-4} - B_3 p^3 u^{n-6} \\ \qquad + \ldots \pm B_r p^r.u^{n-2r} \mp \\ - p.u^{n-2} + C_1 p^2.u^{n-4} - C_2 p^3 u^{n-6} \\ \qquad + \ldots \pm C_{r-1} p^r.u^{n-2r} \mp \end{array}\right.$$

Es

Es mufs also seyn

$$A_1 = B_1 + 1$$
$$A_2 = B_2 + C_1$$
$$A_3 = B_3 + C_2$$
$$\vdots$$
$$A_r = B_r + C_{r-1}$$

Nach den Eingangs aus der Rechnung für A_1 bis A_5 gefundenen Formeln folgt, dafs $B_1 = n-1$

also wirklich $B_1 + 1 = n-1+1 = n = A_1$

Eben so ist $B_2 + C_1 = \frac{n-1 \cdot n-4}{1 \cdot 2} + n-2$

$$= \frac{n \cdot n-3}{1 \cdot 2} = A_2$$

etc.

Aus der für A_r geschlossenen Formel folgt, dafs seyn müfste

$$B_r = \frac{n-1 \cdot n-r+2 \cdot n-(r+3) \ldots n-2r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r}$$

und $$C_{r-1} = \frac{n-2 \cdot n-(r+3) \cdot n-(r+4) \ldots n-(2r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r-1}$$

Mithin $$B_r + C_{r-1} = \frac{n \cdot n-(r+1) \cdot n-(r+2) \ldots n-(2r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r} = A_r$$

Es ist folglich

$$x^n + y^n = (x+y)^n - \frac{n}{1} xy(x+y)^{n-2} + \frac{n \cdot n-3}{1 \cdot 2} x^2 y^2 (x+y)^{n-4}$$
$$- \frac{n \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 y^3 (x+y)^{n-6}$$
$$+ \ldots \pm \frac{n \cdot n-(r+1) \cdot n-(r+2) \ldots [n-(2r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r} x^r y^r (x+y)^{n-2r} \mp \text{etc.} \quad \text{(II.)}$$

Eine Anwendung von dieser Formel sey das folgende:

In dieser Formel (II.) setze man

$x = \frac{u}{a}$, $y = \frac{a}{u}$ diese geben $xy = 1$, $x+y = \frac{u}{a} + \frac{a}{u}$ und dieses sey $= v$;

so wird die Formel (II.) folgende

$$\frac{u^n}{a^n}+\frac{a^n}{u^n}=v^n-\frac{n}{1}v^{n-2}+\frac{n.n-3}{1.2}v^{n-4}-\frac{n}{1}.\frac{n-4}{2}.\frac{n-5}{3}v^{n-6}$$
$$+\ldots\pm\frac{n}{1}.\frac{n-(r+1)}{2}.\frac{n-(r+2)}{3}\ldots\frac{n-(2r-1)}{r}.v^{n-2r}\mp\ldots\text{(III.)}.$$

Nehmen wir von der reciproquen Gleichung die allgemeinste Form

$u^m+pau^{m-1}+qa^2u^{m-2}+\ldots+qa^{m-2}u^2+pa^{m-1}u+a^m=o$,

oder, welches einerlei ist

$u^m+a^m+pau(u^{m-2}+a^{m-2})+qa^2u^2(u^{m-4}+a^{m-4})+\ldots=o$:

Diese Gleichung ist, so oft m ungrade ist, durch u + a theilbar; und da der Quotient eine reciproque Gleichung vom ungeraden Grade ist, so folgt daraus, dafs die Auflösung der Gleichungen von diesem Geschlechte auf die Auflösung der reciproquen Gleichungen vom graden Grade zurückgeführt ist, die alle durch folgende Formel vorgestellt werden

$u^{2c}+a^{2c}+pau(u^{2c-2}+a^{2c-2})+qa^2u^2(u^{2c-4}+a^{2c-4})+\ldots=o$:

Die Auflösung von dieser wird auf die Auflösung von der vom cten Grade gebracht, wenn man sie mit $a^c u^c$ dividirt, dieses giebt

$$\left(\frac{u^c}{a^c}+\frac{a^c}{u^c}\right)+p\left(\frac{u^{c-1}}{a^{c-1}}+\frac{a^{c-1}}{u^{c-1}}\right)+q\left(\frac{u^{c-2}}{a^{c-2}}+\frac{a^{c-2}}{u^{c-2}}\right)+\text{etc.}=o,$$

setzt man nun für $\frac{u^c}{a^c}+\frac{a^c}{u^c}$ und den andern in den Klammern enthaltenen Gröfsen, die Werthe, die man findet, wenn man in der Gleichung III. nach und nach $n=c$, $n=c-1$, $n=c-2$ etc. setzt

Die Gleichung in v, die aus diesen Substitutionen entstehet, wird vom $\frac{m}{2}$ten oder $\frac{m-1}{2}$ten Grade seyn, je nachdem m grade oder ungrade seyn wird: so wie man aber die c Werthe von v hat, so findet man auch die 2c Werthe von u durch die Gleichung

$$\frac{u}{a}+\frac{a}{u}=v, \text{ oder } u^2-avu+a^2=o,$$

und hat überdem $u=-a$ im Fall m ungrade ist.

Wäre nun die gegebene Gleichung

$u^7+pau^6+qa^2u^5+sa^3u^4+sa^4u^3+qa^5u^2+pa^6u+a^7=o$,

d. h., $(u^7+a^7)+pau(u^5+a^5)+qa^2u^2(u^3+a^3)+sa^3u^3(u+a)=o$;

so wird der durch die Division durch $u+a$ entstehende Quotient seyn,
$(u^6+a^6)+(p-1)au(u^4+a^4)+(1-p+q)a^2u^2(u^2+a^2)+(s-q+p-1)a^3u^3=o.$
Wird diese Gleichung mit a^3u^3 dividirt, so ergiebt sich

$$\left(\frac{u^3}{a^3}+\frac{a^3}{u^3}\right)+(p-1)\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{a^2}{u^2}\right)+(1-p+q)\left(\frac{u}{a}+\frac{a}{u}\right)+s-q+p-1=o.$$

Da nun nach der Gleichung (II.)

$$\frac{u^3}{a^3}+\frac{a^3}{u^3}=v^3-3v;\ \frac{u^2}{a^2}+\frac{a^2}{u^2}=v^2-2;\ \frac{u}{a}+\frac{a}{u}=v,$$

so wird die vorherrschende Gleichung in folgende übergehen

$$v^3+(p-1)v^2+(q-p-2)v+(s-q-p+1)=o.$$

Diese Gleichung wird drei Werthe von v geben, und die letzte von den drei vorherrschenden in u, die sich verwandelt in

$$u^2-avu+a^2=o$$

wird für jeden der drei Wurzeln von v zwei Werthe geben, welches die sämmtlichen 6 Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Neuer analytischer Lehrsatz.

Von Herrn Grunert *).

Bei meinen arithmetischen und analytischen Untersuchungen kam ich darauf, den hier folgenden Lehrsatz, der mir neu und merkwürdig genug schien, vorzutragen.

Lehrsatz:

Wenn n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist das Product aus den folgenden n Factoren

$$(x+z)(x+az)(x+a^2z)(x+a^3z)\ldots(x+a^{n-1}z)$$

$$= x^n + \frac{a^n-1}{a-1}\cdot x^{n-1}z + \frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}x^{n-2}z^2$$

$$+ \frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^n-a^2}{a^3-1}\cdot x^{n-3}z^3$$

$$+\ldots+\frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\ldots\frac{a^n-a^{r-1}}{a^r-1}x^{n-r}z^r+\ldots+a^{\frac{n.n-1}{2}}z^n.$$

Beweis. 1) $(x+z)(x+az) = x^2 + (a+1)xz + az^2 = x^2$

$$+\frac{a^2-1}{a-1}xz + \frac{a^2-1}{a-1}\cdot\frac{a^2-a}{a^2-1}\cdot z^2.$$

2) $(x+z)(x+az)(x+a^2z) = x^3 + (a^2+a+1)x^2z$

$$+(a^3+a^2+a)xz^2 + a^3z^3$$

$$= x^3 + \frac{a^3-1}{a-1}x^2z + \frac{a^3-1}{a-1}\cdot\frac{a^2-a}{a^2-1}xz^2$$

$$+\frac{a^3-1}{a-1}\cdot\frac{a^3-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^3-a^2}{a^3-1}\cdot z^3.$$

*) Vorgelesen den 10. November 1814.

Das hier bemerkte Gesetz allgemein ausgedrückt, giebt nun für n Factoren

$$(x+z)(x+az)(x+a^2z)(x+a^3z)\ldots(x+a^{n-1}z)$$

$$= x^n + \frac{a^n-1}{a-1}x^{n-1}z + \frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\cdot x^{n-2}z^2$$

$$+ \frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^n-a^2}{a^3-1}x^{n-3}z^3$$

$$+\ldots+\frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\ldots\frac{a^n-a^{r-1}}{a^r-1}x^{n-r}z^r+\ldots+a^{\frac{n.n-1}{2}}.z^n. \quad (\mathfrak{A})$$

Die Richtigkeit der aus Induction geschlossenen Gesetze wird aufser allen Zweifel gesetzt, wenn wir jene Reihe ($\mathfrak{A}$), die aus n Factoren entstanden seyn soll, noch mit $x + a^n z$ multipliciren, denn alsdann ergiebt sich ein solches Produkt aus $(n+1)$ solchen Factoren. — Wir erhalten durch diese verlangte Multiplication

$$(x+z)(x+az)(x+a^2z)(x+a^3z)\ldots(x+a^{n-1}z)(x+a^nz)$$

$$= x^{n+1} + \left(\frac{a^n-1}{a-1}+a^n\right)x^nz + \left(\frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}+a^n.\frac{a^n-1}{a-1}\right)x^{n-1}z^2$$

$$+\left(\frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^n-a^2}{a^3-1}+a^n.\frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\right)x^{n-2}z^3+\ldots$$

$$+\left(\frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\ldots\frac{a^n-a^{r-2}}{a^{r-1}-1}\cdot\frac{a^n-a^{r-1}}{a^r-1}+a^n\frac{a^n-1}{a-1}\ldots\frac{a^n-a^{r-2}}{a^{r-1}-1}\right)x^{n-r+1}z^r+\ldots$$

$$= x^{n+1} + \frac{a^{n+1}-1}{a-1}x^nz + \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\cdot\frac{a^{n+1}-a}{a^2-1}x^{n-1}z^2$$

$$+\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\cdot\frac{a^{n+1}-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^{n+1}-a^2}{a^3-1}x^{n-2}z^3+\ldots$$

$$+\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\cdot\frac{a^{n+1}-a}{a^2-1}\ldots\frac{a^{n+1}-a^{r-1}}{a^r-1}x^{n-r+1}z^r+\ldots$$

Ist also die Reihe für n Factoren richtig, so ist sie es auch für $(n+1)$ Factoren. — Nun ist sie gewifs richtig für $n=2 : n=3$, folglich ist sie auch richtig für $3+1=4$, und für $4+1=5$ etc.

NB. Im Producte ist der Coefficient von x^{n+1-r} gleich

$$\frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^n-a^{r-2}}{a^{n-1}-1}\left(\frac{a^n a^{r-1}}{a^r-1}+a^n\right)$$

$$= \frac{a^n-1}{a-1}\ldots\frac{a^n-a^{r-2}}{a^{r-1}-1}\cdot a^{r-1}\cdot\frac{a^{n+1}-1}{a^r-1}.$$

Vertheilt man nun die $(r-1)$ a en auf die $(r-1)$ Factoren, die zur Linken von a^{r-1} stehen, und schreibt den Zähler $a^{n+1}-1$ voran, so erhält man $\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\cdot\frac{a^{n+1}-a}{a^2-1}\cdots\frac{a^{n+1}-a^{r-1}}{a^r-1}$. Wird in der Reihe des Lehrsatzes $r=n$ gesetzt, so erhalten wir

$$\frac{a^n-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-a}{a^2-1}\cdots\frac{a^n-a^{n-2}}{a^{n-1}-1}\cdot\frac{a^n-a^{n-1}}{a^n-1}\cdot z^n$$

$$=\frac{a^n-1}{a-1}\cdot a\cdot\frac{a^{n-1}-1}{a^2-1}\cdot a^2\cdot\frac{a^{n-2}-1}{a^3-1}\cdot\ldots\cdot a^{n-2}\cdot\frac{a^2-1}{a^{n-1}-1}\cdot a^{n-1}\cdot\frac{a-1}{a^n-1}\cdot z^n$$

Zähler und Nenner heben sich und es bleibt

$$a\cdot a^2\cdot a^3\ldots a^{n-1}z^n=a^{\frac{n\cdot n-1}{2}}\cdot z^n.$$

Zweiter Beweis dieses Lehrsatzes:

Es sey $(x+z)(x+az)(x+a^2z)\ldots(x+a^{n-1}z)=x^n+A_1x^{n-1}z+A_2x^{n-2}z^2+\ldots+A_nz^n=Y.$

Man setze az statt z, so erhält man

$$(x+az)(x+a^2z)(x+a^3z)\ldots(x+a^nz)=x^n+A_1ax^{n-1}z+A_2a^2x^{n-2}z^2+\ldots+A_ra^rx^{n-r}z^r+\ldots+A_na^nz^n=\frac{Y}{x+z}\cdot(x+a^nz)=P.$$

Man setze

$$\frac{Y}{x+z}=x^{n-1}+B_1x^{n-2}z+B_2x^{n-3}z^2+\ldots+B_rx^{n-(r+1)}z^r+\ldots$$

so ist $Y=x^n+B_1\left|x^{n-1}z+B_2\right|x^{n-2}z^2+\ldots+B_r\left|x^{n-r}z^r+\ldots\right.$
$+1\left|\quad+B_1\right|\quad+B_{r-1}\left|\right.$

Diese letztere Reihe mit der obenstehenden für Y verglichen, giebt ganz allgemein

I) $A_r=B_r+B_{r-1}$

Ferner ist

$$(x+a^nz)\cdot\frac{Y}{x+z}=x^n+B_1\left|x^{n-1}+B_2\right|x^{n-2}z^2+\ldots+B_r\left|x^{n-r}z^r+\ldots\right.$$
$$+a^n\left|\quad+a^nB_1\right|\quad+a^nB_{r-1}\left|\right.$$

Diese mit der Reihe P verglichen, giebt ganz allgemein

II) $A_r\cdot a^r=B_r+a^n\cdot B_{r-1}$

Aus I. und II. ergiebt sich

III) $B_r=\frac{a^n-a^r}{a^r-1}\cdot B_{r-1}$

Aus I. und III. findet sich

IV) $A_r = \frac{a^n - 1}{a^r - 1} \cdot B_{r-1}$

Aus den allgemeinen Formeln III. und IV. lassen sich nun alle besondere Coefficienten bequem finden.

In der Formel III. r nach und nach $= 1, 2, 3$ etc. gesetzt, giebt die folgenden Resultate:

$r = 1$ giebt $B_1 = \frac{a^n - a}{a - 1}$

$r = 2 \quad B_2 = \frac{a^n - a^2}{a^2 - 1} \cdot B_1 = \frac{a^n - a}{a - 1} \cdot \frac{a^n - a^2}{a^2 - 1}$

$r = 3 \quad B_3 = \frac{a^n - a^3}{a^3 - 1} \cdot B_2 = \frac{a^n - a}{a - 1} \cdot \frac{a^n - a^2}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^n - a^3}{a^3 - 1}$

$\vdots \qquad \vdots$

allgemein $B_r = \frac{a^n - a}{a - 1} \cdot \frac{a^n - a^2}{a^2 - 1} \cdots \frac{a^n - a^{r-1}}{a^{r-1} - 1} \cdot \frac{a^n - a^r}{a^r - 1}$

Hieraus ergiebt sich aus der Formel IV.

$A_1 = \frac{a^n - 1}{a - 1}$

$A_2 = \frac{a^n - 1}{a^2 - 1} \cdot B_1 = \frac{a^n - 1}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^n - a}{a - 1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^n - a}{a^2 - 1}$

$A_3 = \frac{a^n - 1}{a^3 - 1} \cdot B_2 = \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^n - a}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^n - a^2}{a^3 - 1}$

$\vdots$

$A_r = \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^n - a}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^n - a^2}{a^3 - 1} \cdots \frac{a^n - a^{r-1}}{a^r - 1}$

Die wirkliche Entwickelung der Coefficienten erleichtert die combinatorische Analysis, denn hier muſs seyn:

$(x + z)(x + az)(x + a^2 z) \ldots (x + a^{n-1} z) = x^n + A' x^{n-1} z + B' x^{n-2} z^2 + C' x^{n-3} z^3 + \ldots + N' z^n$

Daher $A' = \frac{a^n - 1}{a - 1}$

$B' = \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^n - a}{a^2 - 1}$

$$C' = \frac{a^n - 1}{a-1} \cdot \frac{a^n - a}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^n - a^2}{a^3 - 1}$$

$$\vdots$$

$$R' = \frac{a^n - 1}{a-1} \cdot \frac{a^n - a}{a^2 - 1} \cdots \frac{a^n - a^{r-1}}{a^r - 1}$$

$(a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots a^{n-1})$

Hiernach ist

1) $(x+z)(x+az)(x+a^2z)(x+a^3z) = x^4 + A'x^3z + B'x^2z^2 + C'xz^3 + D'z^4$

(a^0, a^1, a^2, a^3)

$$= x^4 + 1 \left| x^3z + a \right| x^2z^2 + a^3 \left| xz^3 + a^5z^4 \right.$$
$$+ a \quad + a^2 \quad + a^4$$
$$+ a^2 \quad + 2a^3 \quad + a^5$$
$$+ a^3 \quad + a^4 \quad + a^6$$
$$+ a^5$$

2) $(x+z)(x+az)(x+a^2z)(x+a^3z)(x+a^4z) = x^5$
$+ A'x^4z + B'x^3z^2 + C'x^2z^3 + D'xz^4 + E'z^5$

$(a^0, a^1, a^2, a^3, a^4)$

$$= x^5 + 1 \left| x^4z + a \right| x^3z^2 + a^3 \left| x^2z^3 + a^6 \right| xz^4 + a^{10}z^5$$
$$+ a \quad + a^2 \quad + a^4 \quad + a^7$$
$$+ a^2 \quad + 2a^3 \quad + 2a^5 \quad + a^8$$
$$+ a^3 \quad + 2a^4 \quad + 2a^6 \quad + a^9$$
$$+ a^4 \quad + 2a^5 \quad + 2a^7 \quad + a^{10}$$
$$+ a^6 \quad + a^8$$
$$+ a^7 \quad + a^9$$

3) $(x+z)(x+az)(x+a^2z)(x+a^3z)(x+a^4z)(x+a^5z) = x^6$
$+ A'x^5z + B'x^4z^2 + C'x^3z^3 + D'x^2z^4 + E'xz^5 + F'z^6.$

$(a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5)$

$$= x^6 + 1 \left| x^5z + a \right| x^4z^2 + a^3 \left| x^3z^3 + a^6 \right| x^2z^4 + a^{10} \left| xz^5 + a^{15}z^6 \right.$$
$$+ a \quad + a^2 \quad + a^4 \quad + a^7 \quad + a^{11}$$
$$+ a^2 \quad + 2a^3 \quad + 2a^5 \quad + 2a^8 \quad + a^{12}$$
$$+ a^3 \quad + 2a^4 \quad + 3a^6 \quad + 2a^9 \quad + a^{13}$$
$$+ a^4 \quad + 3a^5 \quad + 3a^7 \quad + 3a^{10} \quad + a^{14}$$
$$+ a^5 \quad + 2a^6 \quad + 3a^8 \quad + 2a^{11} \quad + a^{15}$$
$$+ 2a^7 \quad + 3a^9 \quad + 2a^{12}$$
$$+ a^8 \quad + 2a^{10} \quad + a^{13}$$
$$+ a^9 \quad + a^{11} \quad + a^{14}$$
$$+ a^{12}$$

Ob

Ob alle Fälle richtig aufgezählt sind, prüft man nach folgenden Formeln:

$$n\int_{(n)}A' = n;\quad n\int_{(n)}B' = \frac{n.n-1}{1.2};\quad n\int_{(n)}C = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3};\ \ldots$$

$$n\int_{(n)}M' = \frac{n.n-1.n-2\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m} = \frac{n^{m\,1-1}}{1^{m\,1\,1}}.$$

Diese Formeln sind zugleich die Grenzwerthe der Coefficienten, d. h. die Werthe dieser Coefficienten für $a = 1$, und diese Grenzwerthe sind die bekannten Binomial-Coefficienten.

Also $6\int_{(6)}A' = 6$; $6\int_{(6)}C' = 20$; $6\int_{(6)}E' = 6$;

$6\int_{(6)}B' = 15$; $6\int_{(6)}D' = 15$; $6\int_{(6)}F' = 1$.

Vereinfachung und Erweiterung der Euklidischen Geometrie.

Von Herrn Gruson*).

Die Euklidische Geometrie hat in einem Zeitraum von mehr als 2000 Jahren, d. h. seit Euklides, keiner wesentlichen Fortschritte sich zu rühmen. Ich wage daher wohl viel, wenn ich der gelehrten Welt meine Forschungen in diesem Gebiet vorlege. Ich habe in der That Jahre lang gekämpft, denn mehrere von den Sätzen, die ich hier mittheile, hatte ich schon um 1787 entdeckt, und sie auch seit der Zeit mehreren meiner Freunden, Bekannten und Zuhörern mitgetheilt, deren Beifall für mich sehr ermunternd war. Man erwarte in dieser Abhandlung nicht die Sätze so geordnet, wie es in einem Lehrbuche sein müfste; es war hier nur mein Zweck, keinen Satz aufzustellen, der nicht aus dem vorhergegangenen strenge bewiesen werden konnte, und besonders, zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit die aufgestellten Hauptlehrsätze Gelegenheit geben, neue geometrische Sätze zu entdecken. — Belohnt werde ich mich halten, wenn competente Richter mich ihres Beifalls würdigen, und wenn dieser Versuch geübteren Mathematikern Veranlassung geben sollte, meinem angefangenen Werke den Stempel der Vollkommenheit zu geben.

Aus meiner Abhandlung selbst wird übrigens hervorgehen, dafs ich die geometrischen Lehrsätze und Aufgaben rein geometrisch, ohne Einmischung arithmetischer Lehren, wie z. B. die von Verhältnissen und Proportionen, zu beweisen suche, wie es die Würde einer eigenthümlichen Wissenschaft verlangt, und eben hierin bin ich viel weiter gegangen als Euklides

*) Vorgelesen den 15. Juni 1815.

selbst. — Der entgegengesetzte Weg, den die neuen Geometer gehen, kann zwar zu nützlichen Resultaten führen, steht aber in Absicht der Methode in jedem Betracht dem von mir eingeschlagenen Wege sehr nach.

§. 1.

Erkl. Ein beliebiges schiefwinkliges Parallelogramm, dessen Seiten a, b, soll durch a . b angedeutet werden.

Wäre das Parallelogramm rechtwinklig, so würde a . b ein Rectangel aus den Linien a und b vorstellen.

Eine Gleichung wie: a . b = c . d bedeutet also im allgemeinen, dafs die aus den Linien a, b und c, d unter gleichem Winkel gebildeten Parallelogramme einander gleich sein sollen.

Wäre der von a, b und von c, d eingeschlossene Winkel ein rechter, so würde man lesen: Das Rectangel aus a, b ist gleich dem Rect. aus c, d.

Es bedeutet also a . a entweder ein Rhombus oder ein Quadrat, dessen Seite a, je nachdem der Winkel ein schiefer oder ein rechter ist. Im letztern Falle ist es erlaubt, a . a = a^2 zu setzen. In keinem Falle ist es hier ohne ausdrückliche Erinnerung erlaubt, jene gewählte Bezeichnung als Producte zu lesen, oder ihr einen arithmetischen Sinn zu geben.

§. 2.

Lehrs. Gleichwinklige Prllgrm., deren Seiten einzeln genommen einander gleich sind, decken sich.

§. 3.

Lehrs. Gleiche und gleichwinklige Prllgrm., die eine gleiche Seite haben, decken sich, oder ihre andern Seiten sind auch gleich.

§. 4.

Lehrs. Gleichwinklige Prllgrm. mit einer gleichen Seite, haben zusammen genommen gleichen Inhalt mit einem ihnen gleichwinkligen Prllgrm. von eben der Seite, dessen Grundlinie allen ihren Grundlinien zusammen genommen gleich ist.

Also auch

Rectangel von gleicher Höhe haben zusammen genommen gleichen Inhalt mit einem Rect. von derselben Höhe, des-

sen Grundlinie allen ihren Grundlinien zusammen genommen gleich ist.

D. h. Wenn a die gleiche Seite, und b, c, d, e ...: die Grundlinien der gleichwinkligen Prllgr. sind, so ist

$$a.b+a.c+a.d+a.e+\ldots=a.[b+c+d+e+\ldots]$$

auch ist umgekehrt

$$a.[b+c+d+e+\ldots]=a.b+a.c+a.d+a.e+\ldots$$

D. h. das Parallelogramm aus zwei graden Linien, wo die eine aus mehrern Abschnitten bestehet, hat gleichen Inhalt mit allen den ihm gleichw. Prllgrm. zusammengenommen, welche aus der ungetheilten graden Linie und jedem der Abschnitte der andern beschrieben sind.

§. 5.

Zus. 1. Der Unterschied zweier gleichw. Prllgrm., die eine gleiche Seite haben, ist einem gleichw. Prllgrm. von derselben Seite gleich, dessen Grundl. dem Unterschiede ihrer Grundl. gleich ist.

d. h.: $a.b-a.c=a.[b-c]$

und umgekehrt: $a.[b-c]=a.b-a.c.$

§. 6.

Zus. 2. Das Prllgr. aus zwei geraden Linien, die beide aus mehrern Abschnitten bestehen, hat gleichen Inhalt mit allen den ihm gleichw. Prllgrm. zusammen genommen, welche aus je zwei Abschnitten der einen und der andern beschrieben sind.

Wenn $A=a+b+c+d+\ldots$

und $B=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$

so wäre

$$A.B=[a+b+c+d+\ldots].B=a.B+b.B+c.B+d.B+\ldots \quad (\S.\ 4.)$$

$$=\left.\begin{array}{l} a.[\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots] \\ +b.[\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots] \\ +c.[\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots] \\ +d.[\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots] \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} a.\alpha+a.\beta+a.\gamma+a.\delta+\ldots \\ +b.\alpha+b.\beta+b.\gamma+b.\delta+\ldots \\ +c.\alpha+c.\beta+c.\gamma+c.\delta+\ldots \\ +d.\alpha+d.\beta+d.\gamma+d.\delta+\ldots \end{array}\right.$$

etc. etc.

§. 7.

Lehrsatz. Die Differenz zweier Quadrate ist gleich einem Rectangel aus der Summe und Differenz der Seiten dieser Quadrate.

Es seien a und b die Seiten zweier Quadrate, so soll sein

$$a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$$

Bew. $a^2 - b^2 = a.a - a.b + a.b - b.b$
$= a.(a-b) + b.(a-b)$
$= (a+b).(a-b).$ } §. 4 und 5.

§. 8.

Lehrsatz. Das Rectangel aus der Summe und der Differenz zweier Linien ist gleich der Differenz der Quadrate aus diesen Linien.

D. h. Wenn a und b diese Linien, so soll sein

$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

Bew. $(a+b).(a-b) = a.(a-b) + b.(a-b)$
$= a.a - a.b + a.b - b.b$
$= a^2 - b^2$ } §. 4 und 5.

§. 9.

Neuer allgemeiner Haupt-Lehrsatz. In zwei rechtwinkligen und gleichwinkligen Triangeln sind die Rectangel aus je zwei nicht homologen Seiten, die aber zu gleichem Winkel gehören, einander gleich. (Fig. 1.)

Wenn A, B, C die Seiten des einen rechtw. Triangels, und a, b, c die homologen Seiten des andern rechtw. Triangels, so soll sein 1) $A.b = a.B$; 2) $A.c = a.C$; 3) $B.c = b.C$.

Bew. I. (Fig. 2.) Die rechtwinkligen Triangel ABC, abc seien gleichwinklig. Man bringe den kleinen $\triangle$ abc mit dem Winkel a über den grofsen $\triangle$, so dafs a auf A, ab längs AB und ac längs AC fällt, und zeichne die Rect. $AB.BC = \square BD$; $AB.bc = \square AG$; und $ab.BC = \square AE$, so ist $\square AG = \square AE$. (Eukl. 1. B. 43 S.)

oder $AB.bc = ab.BC$.

D. h. die Rectangel aus zwei nicht homologen Catheten sind einander gleich.

Bew. II. (Fig. 5.) Man bringe ferner den kleinen Triangel so über den grofsen, dafs zwar der Winkel a den Winkel A deckt, allein die Cathete ab falle längs AC und ac längs AB. Man zeichne die Rectangel AB.ac = □ AE; und ab.AC = □ AG. Ziehe CD und cF,

so ist ∠ CAD = ∠ cAF

AC = AF

AD = ac

daher △ CAD ≅ △ cAF (Eukl. 1 B. 4 S.)

aber △ CAD = ½ □ AE

und △ cAF = ½ □ AG

Folglich □ AE = □ AG

oder AB.ac = ab.AC.

Eben so wird bewiesen, dafs AC.bc = ac.BC. Man darf nemlich den △ abc mit c über C bringen, so dafs ca längs CB fällt.

D. h, die Rectangel aus zwei homologen Catheten und den Hypotenusen sind einander gleich.

§. 10.

Anmerk. Dafs AC.bc = ac.BC, kann auch auf folgende Art bewiesen werden. (Fig 4.) Man zeichne das □ AE = ac.BC und das □ AF = AC.bc. Verlängere DC und cF, bis sich beide in G schneiden, so ist

das □ AF = Prllgr. AG

und das □ AE = Prllgr. AG

Folglich □ AF = □ AE

oder AC.bc = ac.BC

Oder auch so. Ziehe cC, so ist der △ AcC sowohl vom □ AF, als auch vom □ AE die Hälfte, folglich sind gedachte Rect. einander gleich.

§. 11.

Neuer Lehrs. In zwei gleichwinkligen Triangeln sind die gleichwinkligen Parallelogramme aus je zwei nicht homologen Seiten, die aber zu gleichen Winkeln gehören, einander gleich. (Fig. 5)

Bew. Es seien ABC und abc die gleichw. Tr., und der kleine Tr. werde wieder wie in Fig. 4. über den grofsen Tr. gelegt.

Nun bilde man das Prllgr. BD = AB.BC; das Prllgr. bD = ab.BC; das Prllgr. AE = AB.bc; das Prllgr. cG = ac.BC; das Prllgr. AF = AC.bc,

so ist 1) Prllgr. bD = Prllgr AE oder ab.BC = AB.bc

2) Prllgr. AF = Prllgr. cG oder AC.bc = ac.BC

3) Prllgr. AH = Prllgr. Bc oder Ac.ab = ac.AB

weil Prllgr. AH = Prllgr. bD und auch Prllgr. AE = Prllgr. Bc

da nun Prllgr. bd = Prllgr. AE, so ist auch Prllgr. AH = Prllgr. Bc.

§. 12.

Lehrs. Wenn in zwei Tr. ABC, abc der W. A = W. a und Ab.ac = ab.AC, so sind gedachte Tr. gleichwinklig. (Fig. 6.)

Bew. Man nehme Ab′ = ab, und ziehe b′c′ parallel mit BC, so ist nach §. 11. AB.Ac′ = Ab′.AC; da nun Ab′.AC = AB.ac sein soll (Hyp. und Ab′ = ab), so muſs auch AB.Ac′ = AB.ac sein, folglich Ac′ = ac (§. 3.); demnach der △ Ab′c′ = △ abc, und folglich auch △ abc gleichw. mit dem △ ABC.

§. 13.

Erkl. Wenn man von einem Punct auf eine grade Linie oder auf eine Ebene einen Perpendikel fallen laſst, so ist der Punct, in welchem der Perpendikel die Linie oder Ebene trifft, die Projection dieses Puncts auf jene Linie oder Ebene. Die Projection einer graden Linie auf eine grade Linie oder Ebene ist wieder eine grade Linie, die zwischen den Projectionen ihrer Endpuncte liegt. In zusammengesetzten Fällen dürfte es nützlich sein, durch eine gute Bezeichnung die Projection von einer Linie auf einer andern verständlich darzustellen. So wollen wir durch b_a die Projection der Linie b auf die Linie a, und eben so durch a_b die Projection der Linie a auf b darstellen.

Für den mit der Trigonometrie Vertrauten wollen wir noch bemerken, daſs, wenn der durch a und b gebildete Winkel durch ∠ (a, b) angegeben wird, alsdann $a_b = a \cdot \text{Cos.}(a, b)$ und $b_a = b \cdot \text{Cos.}(a, b)$, wodurch die strengen rein geometrisch erwiesenen Resultate sofort in die trigonometrische Sprache übertragen werden. Folgende Sätze über die orthographische Projection, die ich hier nur anführe, werden uns in der Folge nützlich sein.

§. 14.

1) Eine gerade Linie, die in der Richtung der Entwerfungslinie liegt, erscheint in der Projection wie ein Punct.

2) Eine grade Linie, die parallel mit der Entwerfungsebene ist, wird durch eine ihr gleiche abgebildet.

3) In jeder geschlossenen gradlinigen Figur ist jede Seite gleich der algebraischen Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf sie.

4) Die Projection vom ganzen Umfange einer geschlossenen Figur auf eine beliebige gegebene grade Linie ist immer Null.

5) In einem rechtw. Tr. ist z. B. jede Cathete die Projection der Hypotenuse auf sie. — Die Hypotenuse ist gleich der Summe der Projectionen beider Catheten auf sie, und die Projection einer Cathete auf die andere ist Null. Wenn a und b die Cathete und c die Hypotenuse eines rechtw. Tr., so ist $a = c_a$; $b = c_b$; $c = a_c + b_c$ und $a_b = b_a = 0$.

§. 15.

Lehrs. Bei jedem Winkel sind die Rect. aus einem Schenkel in der Projection des andern auf ihn einander gleich. (Fig. 7.)

Bew. Von dem Endpuncte B und C der Schenkel des Winkels BAC sei Bb perpendikular auf den verlängerten Schenkel AC, und Cc perpendikular auf AB. — Zeichne die

$\square bD = AC.Ab$ und $\square cE = Ac.AB$. Ziehe BD; CE, so ist

$\left.\begin{array}{l} \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AC \\ AB = AE \end{array}\right\}$ daher $\triangle BAD \overset{s}{=} \triangle CAE$ über $\triangle BAD = \frac{1}{2}\square bD$ und $\triangle CAE = \frac{1}{2}\square cE$ $\left.\right\}$ folglich $\square bD = \square cE$ oder $AC.Ab = Ac.AB$.

Der Beweis wird ungleich kürzer, wenn man nicht übersieht, dafs $\triangle ABb$ und $\triangle ACc$ gleichw. sind, folglich unmittelbar nach §. 9.

$$AC.AB = Ac.AB, \text{ auch } AB.Cc = AC.Bb,$$

d. h. auch die Rect. aus jedem Schenkel in der Entwurfslinie auf ihm sind einander gleich.

§. 16.

Aufg. Der $\triangle ABC$ sei rechtwinklig bei C und CD, auf AB perpendicular. Man soll die Eigenschaften der hier vorhandenen drei rechtwinkligen und gleichwinkligen Tr. auffinden. (Fig. 8.)

Aufl. Die $\triangle\triangle CDA$ und CDB haben jeder mit dem $\triangle ABC$ einen spitzen Winkel gemein, daher sind sie alle drei gleichw. und $x = A$, $y = B$.

Die

Die drei Seiten des △s ABC sind AB, AC, BC
— — — — △s CDA — AC, AD, CD
— — — — △s CDB — BC, CD, BD

} so gestellt stehen nur die homologen Seiten unter einander.

Nun verbinde man hier je zwei nicht homologe Seiten zu Seiten eines Rect. Dieses giebt folgende Gleichungen:

1) $AB \cdot AD = AC^2$; 2) $AB \cdot CD = AC \cdot BC$; 3) $AC \cdot CD = AD \cdot BC$;
4) $AB \cdot BD = BC^2$; 5) $AC \cdot BD = CD \cdot BC$; 6) $AD \cdot BD = CD^2$

No. 1. und 4. sagen aus, dafs in jedem rechtwinkligen △ das Quadrat über einer Cathete gleich ist dem Rect. aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt.

No. 6. belehrt uns, dafs in jedem rechtwinkligen Tr. das Quadrat des Perpendikels gleich ist dem Rect. aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Von diesem bekannten Satze, der in allen Geometrien entweder aus dem Pythagorischen Lehrs. oder aus der Aehnlichkeit der Tr. bewiesen wird, gebe ich noch folgenden neuen äufserst einfachen Beweis. (Fig. 9.)

Man nehme $AE = CD$, ziehe AG und EF parallel mit CD und $CG \parallel AB$, so ist $EH = BD$; zieht man ferner $IK \parallel AB$, so ist nach Euklid 1 B. 43 S. $\square EG = \square DI$ oder $CD^2 = AD \cdot DB$.

Aus No. 3 und 5 ergiebt sich, dafs in jedem rechtw. Tr. das Rect. aus einer Cathete und dem Perpend. gleich ist dem Rect. aus der andern Cathete und der Projection der ersten Cathete auf die Hypotenuse.

Für Liebhaber gebe ich hier von diesem Satze folgenden besondern Beweis:

I. Es soll $AC \cdot CD = AD \cdot BC$ sein. (Fig. 10.)

Bew. Verl. BC und mache $CE = CD$. Vollende das Rect. AE, ziehe $AG \parallel CD$ und vollende das Rect. DG,

so ist der $\triangle AFG \overset{\sim}{=} \triangle CDB$, also $AG = BC$,

und $\square AE =$ Prllgr. CG

auch $\square DG =$ Prllgr. CG

folglich $\square AE = \square DG$

oder $AC \cdot CD = AD \cdot BC$

II. Es soll $BC \cdot CD = AC \cdot BD$ sein (Fig. 11.)

Bew. Ueber BC zeichne man das Rect. BE, in welchem CE = CD. Verl. DC und FE, bis beide sich in G schneiden. Ziehe BH ‖ DG und HI ‖ BD, so ist der △ CEG ≅ △ CDA, also CA = CG = BH.

Ferner ist das □ BE = Prllgr. BG

auch ist das □ BI = Prllgr. BG

folglich □ BE = □ BI

oder BC . CD = AC . BD.

Addiren wir die Rect. in No. 1 und 4, so ergiebt sich sofort der Pythagorische Lehrs., nemlich: $AB^2 = AC^2 + BC^2$; der hier also nur als ein Corollar erscheint, und den wir, nach Bekanntschaft mit unserm Lehrs. §. 9., gar nicht verfehlen konnten.

No. 2. sagt aus, dafs das Rect. aus der Hypotenuse und dem Perpendikel gleich ist dem Rectangel aus den beiden Catheten, welches sich auch leicht auf eine besondre Weise so beweisen läfst: (Fig. 12.)

Man zeichne das Rect. BE = AB . CD und das Rect. CF = BC . CA, so ist der △ ABC die Hälfte vom □ BE, und auch die Hälfte vom □ CF, folglich □ BE = □ CF, d. h. AB . CD = AC . CB. Eukl. 10. B. 55 S. 1ster Lehrs.

§. 17.

Neuer allgemeiner Lehrsatz. In jedem beliebigen Tr. ist das Rect. aus einer Seite und der Projection einer andern Seite auf sie, gleich dem Rect. aus der zweiten Seite und der Projection der erstern auf sie. (Fig. 13.)

Bew. Von allen drei Winkelspitzen fälle man Perpendicularen auf die Gegenseiten, so ist nach §. 9. oder nach §. 15. sofort aus der Figur zu lesen: AB . Ac = Ab . AC

BA . Bc = Ba . BC

CA . Cb = Ca . CB

§. 18.

Lehrs. In jedem spitzwinkligen Tr. ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, weniger einem doppelten Rect. aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf sie. (Fig. 13.)

So ist $AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2CA . Cb = AB^2 + AC^2 - 2AB . Ac$.

Dasselbe gilt auch von jeder Seite in einem stumpfwinkligen Tr., wenn sie einem spitzen Winkel gegenüber liegt.

Bew. I. $AC^2 = AC.Ab + AC.Cb$ (weil $AC = Ab + Cb$ §. 13. No. 5.)

$= AB.Ac + BC.Ca$ (§. 17.)

$= AB^2 - AB.Bc + BC^2 - BC.Ba$

$= BA^2 + BC^2 - 2AB.Bc$

oder $= BA^2 + BC^2 - 2BC.Ba$ } Weil $AB.Bc = BC.Ba$ (§. 17.)

Eben so ist $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.Cb$ oder $= CA^2 + CB^2 - 2CB.Ca$

und $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.Ac$ oder $= AB^2 + AC^2 - 2AC.Ab$

Für den stumpfwinkligen Tr. ist (Fig. 15.)

$AC^2 = AC.Ab - AC.Cb$

$= AB.Ac - CB.Ca$ (§. 17.)

$= AB^2 - AB.Bc - [BC.Ba - BC^2]$

$= AB^2 + BC^2 - 2AB.Bc$

oder $= BA^2 + BC^2 - 2BC.Ba.$

§. 19.

Lehrs. In jedem stumpfwinkligen Tr. ist das Quadrat über der Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, gleich der Summe der beiden andern Seiten, mehr einem doppelten Rect. aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf sie. (Fig. 15.)

$AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2CA.CB$ oder $= CA^2 + CB^2 + 2CB.Ca.$

Bew. $AB^2 = AB.Ac + AB.Bc$

$= Ab.AC + Ba.BC$ (§. 17.)

$= CA^2 + CA.Cb + CB^2 + CB.Ca$

$= CA^2 + CB^2 + 2CA.Cb$

oder $= CA^2 + CB^2 + 2CB.Ca.$

Anm. Die zwei Lehrs. in §. 18 und 19. hat auch bereits Eukl. im 2. B. 12 und 13 S. vermittelst des Pythag. Lehrs. und anderer im 2 B. seiner Elemente enthaltenen Sätze erwiesen. — Meine hier gegebenen Beweise sind von dem Pyth. Lehrsatze unabhängig und ungleich einfacher. Noch leichter läßt sich das Resultat dieser Sätze aus der Figur lesen, wenn man über alle Seiten Quadrate zeichnet.

Zus. Wenn im Tr. in Fig. 15. der Winkel C ein rechter wäre, so verschwinden die Rect. $CA.Cb$ und $CB.Ca$, weil Ca sowohl als $Cb = o$ sind,

folglich bleibt $AB^2 = CA^2 + CB^2$. Hier erscheint also der Pyth. Lehrsatz abermals als ein blofses Corollarium.

§. 20.

Erkl. Jede grade Linie, die man von der Spitze eines Tr. nach irgend einem Punct der gegenüberliegenden Seite zieht, soll eine Transversale genannt werden. Wenn es Noth thut, mag auch jede grade Linie, welche den Umfang einer Figur schneidet, diesen Namen führen.

§. 21.

Neuer Lehrsatz. Zieht man von der Spitze eines gleichschenkligen Triangels eine beliebige Transversale, welche die Grundlinie oder ihre Verlängerung schneidet, so ist das Rect. aus der Summe und Differenz eines Schenkels und der Transversale gleich dem Rectangel aus den beiden durch die Transversale auf der Grundlinie gemachten Abschnitten.

I) Wenn die Transversale die Grundlinie schneidet. (Fig. 14.)

Bew. Es sei ACB der gleichschenklige Δ und CD die Transversale, so ist, wenn Cc auf AB perpendikular,

$CA^2 = CD^2 + AD^2 + 2AD \cdot Dc$ (§. 19.)

also auch $CA^2 - CD^2 = AD^2 + 2AD \cdot Dc$.

Mithin $(CA + CD) \cdot (CA - CD) = AD\,(AD + 2Dc)$ (§. 7.)

Da nun $AD + 2Dc = BD$ [denn $2Dc$ ist der Unterschied zwischen den Abschnitten.]

so ist auch $(CA + CD) \cdot (CA - CD) = AD \cdot DB$.

II) Wenn die Transversale die Verlängerung der Grundlinie schneidet. (Fig. 15.)

Bew. Es sei Cc auf AB perpendikular, so ist

$CD^2 = AC^2 + AD^2 + 2AD \cdot Ac$ (§. 19.)

$CD^2 - AC^2 = AD^2 + 2AD \cdot Ac$

$(CD + CA) \cdot (CD - CA) = AD \cdot (AD + 2Ac)$ (§. 7.)

$AD + 2AC = BD$ [denn $2AC$ ist die Differenz der Abschnitte.]

folglich $(CD + CA) \cdot (CD - CA) = AD \cdot BD$.

§. 22.

Lehrs. Wird in einem beliebigen Triangel die Transversale von der Spitze bis zur Mitte der Grundlinie gezogen, so

ist die Summe der Quadrate der beiden Seiten gleich der doppelten Summe des Quadrats der Transversale und des Quadrats der halben Grundlinie.

Bew. Es sei Cc auf AB perpendicular, und CD die Transversale, so ist

$$CA^2 = DC^2 + DA^2 + 2DA.Dc$$
$$\text{und } CB^2 = DC^2 + BD^2 - 2DB.Dc \quad \Big\} \text{ §. 18. 19.}$$

folglich $CA^2 + CB^2 = 2DC^2 + 2AD^2 = 2[DC^2 + AD^2] = 2[DC^2 + \frac{1}{4}AB^2]$.

Zus. Wenn die Transversale CD der halben Grundlinie AB gleich ist, so ergiebt sich: $CA^2 + CB^2 = 4AD^2 = AB^2$, also nach Eukl. 1 B. 22 S. ist der Triangel in diesem Falle rechtwinklig, d. h., wenn die drei Winkelspitzen eines Triangels von der Mitte einer Seite gleich weit entfernt liegen, so ist der Triangel rechtwinklig. Dieser Satz läfst sich aber auch leicht unabhängig vom §. 22. so beweisen. In Fig. 16. ist $m = 2x$ und $n = 2y$, also $m + n = 2x + 2y$; da nun $m + n = 2R$, so ist folglich $x + y =$ Winkel $C = R$.

Und umgekehrt: In jedem rechtwinkligen Triangel liegen die 3 Winkelspitzen von der Mitte der Hypotenuse gleich weit entfernt, welches apagogisch leicht zu erweisen ist. Dieses letztere vorausgesetzt, so würde aus §. 22. wieder der Pythag. Lehrsatz als Corollar hervorgehen.

§. 23.

Lehrs. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten. (Fig. 17.)

Bew. Da die Diagonalen eines Prllgr. sich gegenseitig halbiren, so ist nach §. 22.

$$AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2BE^2$$
$$\text{und } AD^2 + DC^2 = 2AE^2 + 2ED^2$$

folglich $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

oder $2[AB^2 + AD^2] = AC^2 + BD^2$

Zus. Werden die Diagonalen gleich, so wird das Prllgrm. ein Rect., und es ergiebt sich hieraus wiederum der Pyth. Lehrsatz als Corollar.

§. 24.

Lehrs. In jeder vierseitigen Figur ist die Summe der Quadrate aller Seiten gleich der Summe von den Quadraten der

beiden Diagonalen und dem vierfachen Quadrate von der Entfernung der Mittelpuncte beider Diagonalen. (Fig. 18.)

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$$

wo E und F die Mitten der Diagonalen.

Bew. Ziehe BE, DE, so ist

$$AB^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$$

und $$CD^2 + DA^2 = 2AE^2 + 2DE^2$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + 2[BE^2 + DE^2]$$

$$2[BE^2 + DE^2] = 2[2BF^2 + 2EF^2]$$

$$= BD^2 + 4EF^2$$

folglich $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

Dieser allgemeine sehr schöne Satz ist von Euler zuerst geom. auf eine andre Art erwiesen worden. (Nov. Comm. Acad. Imp. Petrop. T. I. p. 409. sqq.) Wenn $EF = 0$, so ergiebt sich der Satz von §. 23. als Corollar, und die Figur ist in diesem Falle ein Prllgrm., und hiermit ist zugleich die Frage beantwortet: In welcher vierseitigen Figur ist die Summe der Quadrate der Diagonalen ein Maximum?

§. 25.

Lehrs. Wenn Puncte D, D, D.. von der Mitte C einer graden Linie AB gleich weit entfernt liegen, so ist die Summe der Quadrate aus den Entfernungen dieses Puncts von den Endpuncten A und B der gegebenen Linien eine beständige Grösse. (Fig. 19.)

Bew. Nach §. 22. ist $DA^2 + DB^2 = 2[AC^2 + CD^2]$.

§. 26.

Lehrs. Wenn die Winkelspitzen D, E, F der über der Grundlinie AB eines gleichschenkligen Tr. ACB gezeichneten Tr. von der Spitze C des gleichschenkligen Tr. um die Länge eines Schenkels CA entfernt sind, und mit der Spitze C auf einerlei Seite der Grundlinie liegen, so sind gedachte Winkel einander gleich, und jeder ist die Hälfte des Winkels C an der Spitze des gleichschenkligen Triangels. (Fig. 20.)

Bew. Es sind hier drei Fälle zu beachten: 1). wenn die Spitze D in gra-

der Linie mit einem Schenkel CA des gleichschenkligen Tr. liegt. In diesem Falle ist ∠ ACB der äufsere Winkel von dem gleichschenkligen Tr. BCD, und folglich ∠ ACB = 2 D.

2) Wenn die Schenkel des Winkels E den Winkel C einschliefsen. Ziehe ECG, so wird der Winkel ACB in zwei Theile zerlegt, davon der eine der äufsere Winkel des gleichschenkligen △ ACE, und der andere der äufsere Winkel von dem gleichschenkligen △ BCE, woraus sich denn ergiebt, dafs ∠ ACB = 2 E ist.

3) Wenn der Winkel F den einen Schenkel CB schneidet. In diesem Falle ziehe FCH, so ist ∠ HCB der äufsere Winkel des gleichschenkligen △ BCF, und ∠ HCA der äufsere Winkel von dem gleichschenkligen △ ACF, daraus ergiebt sich Winkel ACB = 2 Winkel AFB.

Zus. Es sei I ein Punct auf der andern Seite der Grundlinie AB, so ist der Winkel AIB immer die Hälfte von dem erhabenen Winkel ACB, welches erwiesen wird, wenn man durch I und C eine Linie zichet; er ergänzt also einen Winkel, wie D, E, F zu 2 R.

§. 27.

Lehrs. Wenn Winkel D, E, F auf einerlei Seite über der Grundlinie AB eines gleichschenkligen Tr. gleich grofs sind, so liegen sie alle von der Spitze C des gleichschenkligen Triangels ACB gleich weit entfernt, und wenn I ein Supplementw. z. B von D ist, so ist auch CI = CA (Fig. 20.)

Bew. Der Beweis läfst sich leicht apagogisch führen und kann seiner Leichtigkeit wegen hier wegbleiben.

§. 28.

Aufg. Zu drei gegebenen Puncten A, B, C, die nicht in grader Linie liegen, einen *Mittelpunct*, d. h. einen Punct zu finden, der von diesen drei gegebenen Puncten gleich weit entfernt liegt. (Fig. 21.)

Aufl. Man verbinde die Puncte durch grade Linien und errichte auf zwei dieser Linien in deren Mitte Perpendikel; wo sich diese schneiden, ist der Mittelpunct.

Bew. Es seien DE und FG die gedachten Perpd., so ist ihr Durchschnittspunct H der Mittelpunct; denn zieht man HA, HB, HC, so ist △ AHF ≅ △ CHF und △ HDA ≅ △ HDB, folglich HA = HB = HC.

§. 29.

Neuer allgemeiner Haupt-Lehrsatz. In zwei beliebigen gleichwinkligen Triangeln sind die Rectangel aus je zwei nicht homologen Seiten, die zu gleichen Winkeln gehören, einander gleich.

Es seien (Fig. 22.) ABC und abc zwei gleichwinklige Triangel, so soll z. B. sein $CA \cdot cb = ca \cdot CB$.

Bew. Den kleinen $\triangle abc$ lege man an den grofsen $\triangle ABC$ mit dem gleichen Winkel $c = C$ so an einander, dafs ca mit CB und cb mit CA in grade Linie fällt. Man bestimme nach §. 28. zu den drei Puncten A, B, a den Mittelpunct. Da nun Winkel b = Winkel B, so ist dieser Punct D auch der Mittelpunct von den 4 Puncten A, B, a und b. (§. 27.) Ziehe DB, DA und DC, so ist nach §. 21. I. $BC \cdot ca = (BD + DC)(BD - DC)$.

Zieht man DA und Db, so ist eben so nach §. 21.

$$AC \cdot cb = (AD + DC)(AD - DC),$$

folglich $CA \cdot cb = ca \cdot CB$.

Eben so beweist man auch, dafs $AC \cdot ab = ac \cdot AB$ und $BC \cdot ba = bc \cdot BA$.

Andrer Bew. Man lege den kleinen Triangel in den grofsen, so dafs die Winkel $c = C$ sich decken, und ca längs CB fällt.

Es sei D der Mittelpunct von B, A, b, so ist, weil $\angle Bab + \angle BAb = 2R$, der Punct D auch der Mittelpunct von B, A, b und a (§. 27.). Zieht man nun DA, DB, Da, Db, so ist nach §. 21. II.

$$CA \cdot cb = (DC + DA)(DC - DA)$$

und $$CB \cdot ca = (DC + DB)(DC - DB),$$

folglich $CA \cdot cb = CB \cdot ca$.

Anmerk. Dieser Lehrsatz ist der Haupt-Lehrsatz in meinem System der Geometrie, und hier auf das strengste rein geometrisch leicht erwiesen worden. Als Lehrsatz ist er nirgends meines Wissens je aufgestellt worden, und ein Geometer, der zum Beweise desselben aufgefordert würde, hätte ihn ohne Anstand vermittelst Proportionen aus der Aehnlichkeit der Triangel erwiesen, ohne zu ahnen, dafs es für diesen höchst allgemeinen und wichtigen Lehrsatz einen so äufserst leichten und strengen Beweis, ohne Einmischung arithm. Begriffe, wie die von Verhältnifs und Proportionen, giebt. — Ich gestehe es aufrichtig, dafs mir seine Entdeckung das höchste Vergnügen gewährt hat und noch gewährt, indem ich überzeugt bin, dafs die Euklidische

dische Geometrie durch diese Sätze ungemein erleichtert und die rein geom. Methode dadurch auch vervollkommnet wird. — Spielend, so zu sagen, werden, ohne der Strenge das Geringste zu vergeben, eine Menge bekannte und unbekannte wichtige Sätze der Geometrie dadurch von selbst entdeckt. — Den Einwurf, dafs, die Lehre von der Aehnlichkeit der Triangel vorausgesetzt, alle von mir vorgetragenen Sätze ebenfalls sich erweisen lassen, darf ich hier von keinem erwarten, der dieses Feld kennt und Vergleichungen zwischen Methoden anzustellen versteht. In einem System der Geometrie müfste dieser Lehrsatz, so früh als möglich, vorkommen, und die von mir hier mitgetheilten Zwischensätze müfsten ihren Platz anderswo finden.

§. 30.

Lehrs. Wenn in zwei Tr. ABC. abc die Rect. aus je zwei Seiten, die in beiden Tr. einen Winkel einschliefsen, gleich sind, nemlich

$$AB.ac = ab.AC;\ AB.bc = ab.BC \text{ und } AC.bc = ac.BC,$$

so sind die Tr. gleichwinklig. (Fig. 12.) Dieses wollen wir künftig durch das Zeichen ∞ anzeigen.

Bew. Nimmt man $Ab' = ab$, $Ac' = ac$, ziehe $b'c'$, so ist, weil nun auch

$$AB.Ac' = Ab.AC,$$

der $\triangle Ab'c' \infty \triangle ABC$.

Es mufs daher auch $AB.b'c' = Ab'.BC$ sein;

da nun $Ab'.BC = ab.BC = AB.bc$,

so mufs $AB.b'c' = AB.bc$ sein,

mithin auch $b'c' = bc$ (§. 3.);

Demnach $\triangle abc = \triangle Ab'c'$,

folglich $\triangle abc \infty \triangle ABC$.

§. 31.

Der allgemeine Lehrsatz in §. 29. ist nicht blofs für Rect. wahr, sondern auch für jedes aus den genannten Seiten gebildete gleichwinklige Parallelogramm, wie dieses aus §. 11. zu ersehen ist, und daher erhalten alle erwiesene Sätze eine noch gröfsere Allgemeinheit.

§. 32.

Lehrs. Zieht man in einem Tr. eine Linie DE mit der Grundlinie BC parallel, so ist 1) das Rect. aus dem obern Ab-

schnitt AD der einen Seite und dem untern Abschnitt EC der andern Seite gleich dem Rect. aus dem obern Abschnitt AE der zweiten Seite und dem untern Abschnitt DB der ersten Seite.

2) Auch das Rect. aus einer Seite AB und der Parallele DE ist gleich dem Rect. aus dem obern Abschnitt AD der genannten Seite und der Grundlinie BC. Umgekehrt: Wenn jene Rect. gleich sind, so ist DE ‖ BC.

Bew. Ziehe DF ‖ AC, so geben die hier entstandenen gleichw. Tr. sofort

$$AD \cdot EC = AE \cdot DB \text{ und } AB \cdot DE = AD \cdot BC.$$

Den Beweis für das Umgekehrte übergehe ich, da er leicht zu finden ist.

Zus. Statt Rect. kann man auch gleichw. Parallelogramme setzen, und dieses mag hier ein für allemal gesagt sein.

§. 33.

Lehrs. Wenn eine Transversale AD den Winkel BAC eines Tr. ABC halbirt, so ist das Rect. aus einer Seite AB des getheilten Winkels und dem nicht anliegenden Abschnitt DC gleich dem Rect. aus der zweiten Seite AC des halbirten Winkels und dem zweiten nicht anliegenden Abschnitt DB. Umgekehrt: Wenn gedachte Rect. gleich sind, so halbirt DA den Winkel A. (Fig. 25.)

Bew. I) Verl. CA und mache AE = AB. Ziehe BE, so ist

$$x + y = 2y = 2E, \text{ also } y = E, \text{ und also } AD \parallel BE.$$

Mithin $AE \cdot DC = AC \cdot BD$ (§. 31.)

folglich auch $AB \cdot DC = AC \cdot BD$.

II) Und wenn $AB \cdot DC = AC \cdot BD$,

so ist auch $AE \cdot DC = AC \cdot BD$;

Mithin AD ‖ BE,

also $y = z$ und $y = E$.

Da nun $z = E$, so ist auch $x = y$.

§. 34.

Aufg. Aus dem Winkel A eines gegebenen △ ABC eine Transversale zu ziehen, welche die Gegenseite BC so theilt, dafs ein beliebiges Parallgr. aus dieser Seite BC und einem durch die Transversale gemachten Abschnitt gleich dem

diesem Parallgr. gleichwinkligen Rhombus aus der an dem Abschnitt anliegenden Seite werde. (Fig. 26.)

Aufl. Mache den Winkel BAD = Winkel C, so ist AB. AB = BC. BD. (§. 29, 31.)

Zus. Auch ist $AB^2 = BC . BD$. Machen wir $\angle CAE = \angle B$, so ist auch $AC^2 = BC . CE$. Also $AB^2 + AC^2 = BC . [BD + CE]$

$= BC . [BC - DE] = BC^2 - BC . DE$.

Wäre nun der $\angle BAC = R$, so hätten wir hier abermals den Pyth. Lehrs. Dieser Satz ist auch umgekehrt wahr.

§. 55.

Aufg. Es sei ABC ein gleichschenkliger Tr., in welchem ein Winkel an der Grundlinie BC doppelt so grofs als der Winkel A an der Spitze ist. Man sucht die Aufgabe, von welcher die Constr. eines solchen Tr. abhängt. (Fig. 27.)

Aufl. Man halbire einen Winkel C an der Grundlinie durch CD, so ist, weil x = A, nach §. 29. $CB^2 = AB . BD$, und da $\triangle BCD \sim \triangle ABC$, und auch x = y = A, so ist AD = CD = BC;

folglich $AD^2 = AB . BD$.

Es kommt also auf die Aufl. der Aufg. an:

Eine gegebene Linie AB in D so zu theilen, dafs das Quadrat des gröfsern Abschnitts gleich dem Rect. aus der ganzen Linie und dem andern Abschnitt sei; deren Aufl. ich hier so gebe: (Fig. 28.)

In dem Endpunkte A errichte $BC = \frac{1}{2} AB$ perpendikular auf AB. Ziehe AC und mache BD = AE = AC − CB, so ist $BD^2 = AB . DA$.

Bew. Ziehe BE, und mache den $\angle AED = x$, so ist nach §. 29.

$AE^2 = AB . AD$.

Macht man also BD = AE, so ist auch $BD^2 = AB . AD$.

Anm. Aufl. und Bew. sind neu und äufserst einfach.

§. 56.

Lehrs. Das Quadrat der Seite eines regul. Sechsseit plus dem Quadr. von der Seite eines regul. Zehnseit ist gleich dem Quadrat von der Seite eines regul. Fünfseit. (Fig. 29.)

Bew. Es sei CA = CB die Seite des regl. Sechsseit, und AB die Seite des regul. Fünfseits, so wie AD = DB die Seite eines regul. Zehnseits. Mache $\angle BCE = \angle CBA$, und ziehe DE, so ist $\triangle CBE \sim \triangle BCA$, also

$CB^2 = AB \cdot BE$. (§. 29.) Es läfst sich nun leicht zeigen, dafs CE verl. AD in F halbirt, also $z = y$, daher $AD^2 = AB \cdot AE$,

folglich $CB^2 + AD^2 = AB^2$.

§. 37.

Lehrs. Wenn man in einem $\triangle ABC$ den Winkel A durch die Transversale AD halbirt, so ist das Rect. aus den Seiten AB, AC, die den getheilten Winkel einschliefsen, gleich dem Rect. aus den Segmenten BD, DC und dem Quadrate der Transversale AD. D. h. $AB.AC = BD.DC + AD^2$. (Fig. 30.)

Bew. Mache den Winkel $BCE = x$, und verlängere AD, bis CE geschnitten wird, so ist $\triangle CDE \backsim \triangle ABD \backsim \triangle ACE$; daher nach §. 29.

$$AD.DE = BD.DC,$$

und auch $BA.AC = AE.AD$

$$= (AD + DE).AD$$

$$= AD^2 + DE.AD$$

$$= AD^2 + BD.DC.$$

§. 38.

Aufg. Zwischen den Schenkeln des Winkels A sei $BC \parallel DE$ und $AG = AB$, $AF = AE$. Man soll beweisen, dafs $CF \parallel DG$, oder dafs $\angle BCF \parallel \angle EDG$. (Fig. 31.)

Bew. Da die $\triangle\triangle ABG$ und AFE gleichschenklig, so ist $BG \parallel FE$;

$AC.AD = AE.AB$, weil $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$;

$AG.AF = AE.AB$, $\triangle ABG \backsim \triangle AEF$;

also $AC.AD = AG.AF$;

folglich $CF \parallel DG$.

§. 39.

Lehrs. Wenn sich zwei Sehnen AB, CD, innerhalb oder aufserhalb des Kreises in E schneiden, so ist das Rect.

$$EA.EB = EC.ED.$$

Bew. Ziehe AC, BD, so ist $\triangle EAC \backsim \triangle EBD$, folglich sind jene Rect. einander gleich.

§. 40.

Lehrs. In jedem Vierseit ABCD, in welchem die Gegenwinkel sich zu 2R ergänzen, ist das Rect. aus den beiden Diago-

nalen gleich der Summe der Rect. aus den Gegenseiten, so dafs $AC.BD = AB.DC + AD.BC$. (§ 33.)

Bew. Aus den bekannten Eigenschaften dieses Vierseits folgt, dafs

$$n = m,\ p = q;$$

macht man also $y = x$, so ist

der $\triangle ABD \sim \triangle BCI$, daher $AD.BC = CI.BD$,

und der $\triangle ABI \sim \triangle DBC$, also auch $AB.CD = AI.BD$;

folglich $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Anmerk. Aus dem Bisherigen ist genugsam zu ersehen, dafs, wo sich gleichwinklige Triangel vorfinden, durch Anwendung meines Haupt-Lehrsatzes sich sogleich die gleichen Rect. ergeben, und dafs also eine grofse Anzahl von Lehrsätzen und Aufgaben, die man bisher nur nach erwiesener Aehnlichkeit der Triangel, also durch Proportionen, hat beweisen können, durchaus von dieser Lehre unabhängig sind, und hierein setze ich eben das Neue und das Vorzügliche meiner Beweise. — Jetzt sei es mir erlaubt, den Uebergang zu den Proportionen und der Aehnlichkeit der Figuren zu zeigen.

§. 41.

Erkl. Das Verhältnifs zweier Gröfsen A zu B beruht auf der Vorstellung, wie oft die erste A (das Vorderglied), oder ein bestimmter Theil derselben, in der zweiten B (dem Hintergliede) enthalten ist, also auf der Vorstellung durch einen Zahlenausdruck (der nach Umständen selbst irrational sein kann). — Jenes Zahlenverhältnifs ist es, an das man sich halten mufs, wenn man über Verhältnisse und Proportionen zwischen ausgedehnten Gröfsen sich richtige Begriffe machen will.

§. 42.

Lehrs. Zwei Prllgrm. von gleicher Höhe verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien. (Fig. 34.)

Bew. Es soll erwiesen werden, dafs

$$\frac{\text{Prllgr. } AF}{\text{Prllgr. } AC} = \frac{AE}{AB}.$$

Nehmen wir also erstens an, die Grundl. AB, AE sind commensurabel, so läfst sich ihr Verhältnifs in ein gleichgeltendes Zahlverhältnifs verwandeln. Dieses sei z.B. das Verhältnifs $\frac{n}{m}$; so mufs, wenn man AB

in m gleiche Theile theilt, AE genau n solcher Theile enthalten. Zieht man durch jeden der Theilungspuncte eine Parallele mit der Seite AD, so entstehn dadurch m kleine gleiche Prllgrm, wovon m im Prllgrm. AC, und n im Prllgrm. AF enthalten sind. Folglich verhalten sich diese beiden Prllgrm. zu einander wie m zu n, also wie die Grundl. AB, AE.

Gesetzt zweitens: die Grundl. AB, AE seien unter einander incommensurabel. — Wer läugnen wollte, dafs in diesem Falle dieselbe Proportionalität zwischen den Prllgrm. und den Grundl. nicht statt findet, der müfste behaupten, nicht AE, sondern irgend eine andre Linie AG, die gröfser oder kleiner als AE ist, sei die richtige vierte Proportionallinie zu den drei andern Gröfsen. Wir wollen also setzen, es sei AG um EG gröfser als AE, und es sei dann

$$\frac{\text{Prllgrm. AF}}{\text{Prllgrm. AC}} = \frac{AG}{AB}. \quad (I)$$

Theilt man nun die Grundl. AB in gleiche Theile, welche kleiner als EG sind, so mufs zwischen E und G wenigstens ein Theilpunct H fallen. Durch diesen ziehe man die HI ‖ AD, so entsteht ein Prllgrm. AI, dessen Grundl. AH mit AB commensurabel ist. Nach dem, was vorhin bewiesen ist, hätten wir also

$$\frac{\text{Prllgrm. AI}}{\text{Prllgrm. AC}} = \frac{AH}{AB}. \quad (II)$$

Dividiren wir den Zahlausdruck (I) mit dem Zahlausdruck (II), so müfste sein

$$\frac{\text{Prllgrm. AF}}{\text{Prllgrm. AI}} = \frac{AG}{AH};$$

aber $\frac{\text{Prllgrm. AF}}{\text{Prllgrm. AI}}$ ist ein ächter Bruch, und $\frac{AG}{AH}$ ein unächter Bruch, welches ein Widerspruch ist. Also kann keine Linie AG, welche gröfser als AE ist, die richtige vierte Proportionallinie zu den drei oben genannten Gröfsen sein.

Auf ganz ähnliche Weise beweifst man, dafs auch keine Linie, welche kleiner als AE ist, die richtige vierte Proportionalgröfse sein kann.

Nothwendig mufs dieses also AE selbst sein.

§. 43.

Lehrs. Zwei gleichwinklige Prllgrm. verhalten sich zu einander, wie die Producte aus zwei Seiten, die einen gleichen Winkel einschliefsen. (Fig. 35.)

Bew. Nach §. 42. hat man

$$\frac{\text{Prllgrm. AH}}{\text{Prllgrm. AC}} = \frac{\text{AE}}{\text{AB}}, \text{ und } \frac{\text{Prllgrm. AF}}{\text{Prllgrm. AH}} = \frac{\text{AG}}{\text{AD}}.$$

Beide Gleichungen, mit einander multiplicirt, geben

$$\frac{\text{Prllgrm. AF}}{\text{Prllgrm. AC}} = \frac{\text{AE} \cdot \text{AG}}{\text{AB} \cdot \text{AD}}$$

D. h. Das Verhältnifs zweier gleichwinkligen Prllgrm. ist aus dem Verhältnifs der beiden Seiten, die einen gleichen Winkel einschliefsen, zusammen gesetzt, oder, welches dasselbe sagt, diese Prllgrm. verhalten sich wie die Rect. aus den Seiten, die einen gleichen Winkel einschliefsen.

§. 44.

1. Zus. Zwei Rechtecke sind also den Producten aus ihren Grundl. und ihren Höhen proportional.

2. Zus. Sind zwei gleichwinklige Prllgr. einander gleich, so stehen ihre Seiten im umgekehrten Verhältnifs.

Bew. Es sei A.B = a.b. Es sind also auch die Rect. aus diesen Seiten einander gleich (§. 31.), und daher auch nach §. 43. die Producte aus den Zahlausdrücken dieser Seiten ebenfalls gleich, und folglich auch

A zu a wie b zu B.

3. Zus. Sind umgekehrt zweier gleichw. Prllgrm. Seiten verkehrt proportional, so sind diese gleichw. Prllgrm. gleich.

Denn, verhält sich A zu a wie b zu B,

so sind die Producte A.B und a.b gleich, daher auch die Rect. und folglich auch die gleichw. Prllgrm. aus diesen Seiten.

§. 45.

Die hier erwiesene Proportionalität zwischen den Flächenräumen der gleichw. Prllgrm. und den Producten aus ihren Seiten sichert uns das Recht, die Producte aus der Grundlinie in die Höhe eines jeden Rect. zum Maafs des Flächenraums der Rect. zu nehmen. Dafs hierbei nur von den Zahlausdrücken der Grundlinie und der Höhe, und von deren Producten die Rede ist; d. h. von Producten der Zahlen, welche angeben, wie viel Linieneinheiten die Grundlinie, und wie viel deren die Höhe enthält, versteht sich von selbst. — Eine weitere Ausführung dieser Elementarlehren gehört nicht hierher; genug, dafs wir nunmehr berechtiget

sind, das Zeichen A. B durch Prllgrm. oder durch Rect. aus den Linien A, B, zu übersetzen, und das ist der geometrische Sinn desselben. Dagegen brauchen wir es nur, nach seinem arithmetischen Sinn, als Product zweier Linien, A, B, zu nehmen, um uns unmittelbar in die rechnende Geometrie zu versetzen.

§. 46.

Lehrs. Aehnliche Triangel verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Bew. Es seien, A, B, die Seiten des einen, und a, b, die gleichnamigen Seiten des andern Tr., so ist $\frac{b}{B} = \frac{a}{A}$.

Das Verh. des ersten Tr. zum zweiten ist aber nach §. 43.

$\frac{a.b}{A.B} = \frac{a}{A}.\frac{b}{B}$, also auch gleich $\frac{a}{A}.\frac{a}{A} = \frac{a^2}{A^2}$.

Anmerk. Es sollen nun noch einige Anwendungen und Erweiterungen folgen.

§. 47.

Neuer allgemeiner Lehrsatz. Das Rect. aus einer Linie AB und der Projection cd einer zweiten Linie CD auf sie, ist gleich dem Rect. aus der zweiten Linie CD und der Projection ab der ersten auf sie. (Fig. 36.)

D. h. $AB.cd = ab.CD$.

Bew. Ziehe $CF \parallel cB$, und mache $CF = AB$, ziehe Ee auf CD perpendikular, so ist leicht einzusehen, dafs $Ce = ab$; $CF = cd$, und also nach §. 9. oder 15. sein mufs

$CE.CF = Ce.CD$, daher auch $AB.cd = ab.CD$.

Zusatz. Wenn also a und b zwei in einer Ebene beliebig der Gröfse und Lage nach gegebene grade Linien sind, so ist nach unserer in §. 13. vorgeschlagenen Bezeichnung im Allgemeinen

$a.b_a = b.a_b$ und in der trigonometrischen Sprache ist $b_a = b.\text{Cos.}(a,b)$ und $a_b = a.\text{Cos.}(a,b)$.

Anmerk. Es ist begreiflich, dafs, wenn wir eine gerade Linie a sich um einen ihrer Endpuncte in der Ebene herumdrehen lassen, und die damit verbundene Veränderung und Richtungen ihrer Projection auf irgend eine andere gerade Linie b in Betrachtung ziehen wollen, wir von einem festen

Anfangs-

Anfangspunct ausgehen müssen. — Dieser Punct sei die Projection vom Puncte, um welchen sich die Linie drehen soll. Die Projection einer Linie kann also in Betreff dieses Punctes der Lage nach positiv, oder auch negativ, und der Gröfse nach auch Null sein. Wenn von der Projection des Perimeters einer gradlinigen Figur die Rede ist, so versteht es sich, dafs, um die Richtung der Projection gehörig zu schätzen, man vom Anfange an der Richtung des Umfanges der Figur folgen mufs, dann ergiebt sich die Richtigkeit von No. 3 und 4 in §. 14. Die Winkel, welche die Seiten der Figur mit denjenigen Linien machen, auf welche sie projectirt werden, mufs man immer von dieser Linie an nach einerlei Seite herum in Rechnung bringen.

§. 48.

Lehrs. In jeder gradlinigen Figur ist jede Seite gleich der Summe aller andern Seiten, wenn man jede von diesen mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten bildet.

Bew. Dieser Fundamentalsatz der Polygonometrie ergiebt sich hier sogleich aus §. 14. No. 3.

Denn es seien a, b, c, d, . . . v, w, x die Seiten einer ganz beliebigen Figur, so ist nach §. 14. Nr. 3.

$$x = a_x + b_x + c_x + d_x + e_x \ldots + v_x + w_x$$

also auch nach §. 13.

$$x = a \,.\, \mathrm{Cos.}\,(a, x) + b \,.\, \mathrm{Cos.}\,(b, x) + \ldots + v \,.\, \mathrm{Cos.}\,(v, x) + w \,.\, \mathrm{Cos.}\,(w, x).$$

§. 49.

Lehrs. Die Summe der Seiten irgend eines Vielseits, von denen jede mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt ist, den ihre Richtung, im Sinne des Umfangs genommen, mit einer beliebigen in der Ebene der Lage nach gegebenen graden Linie macht, ist = o.

Bew. Es sei y die der Lage nach gegebene Linie, so ist nach §. 14. Nr. 4.

$$a_y + b_y + c_y \ldots + w_y + x_y = o$$

daher auch nach §. 13.

$$a \,.\, \mathrm{Cos.}\,(a, y) + b \,.\, \mathrm{Cos.}\,(b, y) + \ldots + x \,\mathrm{Cos.}\,(x, y) = o.$$

§. 50.

Neuer Lehrs. In jedem Vielseit ist die Summe der Quadrate

der Seiten gleich der doppelten algebraischen Summe der Rect. aus jeder dieser Seiten und der Projection aller hinter ihr folgenden Seiten auf sie.

Bew. Es ist
$$\left.\begin{aligned} a &= b_a + c_a + d_a + \ldots + x_a \\ b &= a_b + c_b + d_b + \ldots + x_b \\ c &= a_c + b_c + d_c + \ldots + x_c \\ &\vdots \\ x &= a_x + b_x + c_x + \ldots + w_x \end{aligned}\right\} \text{§. 14. No. 3.}$$

daher auch

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a.b_a + a.c_a + a.d_a + \ldots + a.x_a \\ b^2 &= b.a_b + b.c_b + \ldots\ldots + b.x_b \\ c^2 &= c.a_c + c.b_c + \ldots\ldots + c.x_c \\ &\vdots \\ x^2 &= x.a_x + x.b_x + \ldots\ldots + x.w_x \end{aligned}\right\} \text{§. 4.}$$

Da nun hier $a.b_a = b.a_b$; $a.c_a = c.a_c$, etc.
Eben so $b.c_b = c.b_c$ etc. } §. 47.

so ist jedes Rect. doppelt da, folglich:

$$a^2 + b^2 + \ldots + x^2 = 2\,[a.b_a + a.c_a + a.d_a + \ldots + b.c_b + \ldots + w.x_w]$$

1. Zus. Das obige Resultat, in die Trig. Sprache übersetzt, giebt

$$a^2 + b^2 \ldots + x^2 = 2[ab.\mathrm{Cos}(a,b) + ac.\mathrm{Cos}(a,c) + \ldots + bc.\mathrm{Cos}(b,c) + bd.\mathrm{Cos}(b,d) + \ldots + wx.\mathrm{Cos}(w,x)]$$

d. h. in jeder geradlinigen Figur ist die Summe der Quadrate dieser Seiten gleich der doppelten Summe der Producte der Seiten, zwei und zwei mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt.

2. Zus. $a^2 = b^2 + c^2 + \ldots + x^2 - 2\,[b.c_b + b.d_b + b.e_b + \ldots + w.x_w]$

d. h. In jedem Vielseit ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der übrigen, weniger der doppelten Summe der Rect. aus jeder dieser Seiten und der Projection aller hinter ihr folgenden Seiten auf sie. Also auch

$$a^2 = b^2 + c^2 + \ldots + x^2 - 2\,[bc\,\mathrm{Cos}(b,c) + bd\,\mathrm{Cos}(b,d) + \ldots + wx\,\mathrm{Cos}(w,x)]$$

oder In jeder geradlinigen Figur ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der übrigen, weniger der doppelten Summe der Producte dieser andern Seiten, zu

zweien mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt.

§. 51.

Erkl. Ein Punct innerhalb einer gradlinigen Figur, dessen Entfernung von einer beliebigen der Lage nach gegebenen Linie gleich dem arithmetischen Mittel von der algebraischen Summe aller Entfernungen der Winkelspitzen der Figur von dieser Linie ist, soll der Punct der mittlern Entfernungen, und jede durch diesen Punct gezogene grade Linie soll Axe oder Linie der mittlern Entfernungen dieser Puncte genannt werden. Dieser merkwürdige Punct wird künftig immer durch den Buchstaben $\mathfrak{P}$ angedeutet werden.

§. 52.

Aufg. Die Möglichkeit eines solchen Puncts darzuthun (Fig. 37.).

Aufl. Aus einem Punct $\mathfrak{P}$ ziehe man so viel grade Linien (Radien), als ein Vielseit Seiten hat, so dafs jede dieser Linien einer entsprechenden Seite des Vielseits gleich und parallel, und mit ihr gleiche Richtung im Sinne des Umfangs hat. Verbindet man die Endpuncte dieser Linien, so erhält man eine Figur, in welcher der gedachte Punct $\mathfrak{P}$ der Punct der mittlern Entfernungen ist.

Bew. Nach §. 14. No. 4. mufs die algebraische Summe der Projectionen dieser Radien auf eine beliebige durch $\mathfrak{P}$ gezogene Axe $\mathfrak{RQ} = 0$ sein.

Zieht man ferner $\mathfrak{LK}$ perpendikular auf $\mathfrak{RQ}$, so leuchtet es ein, dafs die Perpendikel von den Endp. dieser Radien auf $\mathfrak{LK}$ offenbar gleich den Projectionen dieser Radien auf $\mathfrak{RQ}$ sind. Es mufs ferner einleuchten, dafs, wenn für die Puncte A, B, C diese Perpendikel positiv, die von den Puncten D, E. F negativ gezeichnet werden müssen. Folglich ist die algebraische Summe sämmtlicher Perpendikel, die von den Winkelpuncten des Vielseits auf die Axe $\mathfrak{LK}$ gesenkt sind, $= 0$.

Nun sei irgend eine andere Linie $\mathfrak{MN}$ parallel mit $\mathfrak{LK}$, und aufserhalb des Vielseits gezogen, dann wird jeder Perpendikel, aus einem Winkel der Figur auf diese neue Linie gezogen, offenbar gleich $\mathfrak{PQ}$ mehr oder weniger dem Perpendikel, der aus demselben Winkel auf die Linie $\mathfrak{LK}$ gezogen wird, je nachdem dieser Punct unterhalb oder oberhalb der letzten Linie in Bezug auf $\mathfrak{MN}$ ist. Mithin ist die Summe aller Perpd. auf $\mathfrak{MN}$ gleich so viel mal $\mathfrak{PQ}$, als es Winkel giebt, wenn man dazu eine

Summe addirt, die, wie gezeigt worden, gleich o ist. Folglich ist $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ gleich der Summe der Perpendikel auf $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$, durch ihre Anzahl dividirt. $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ist also die mittlere Entfernung aller dieser Winkel von der Linie $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$, und da die Lage der Axe $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ durch den Punct $\mathfrak{P}$ willkührlich ist, so folgt, dafs die Entfernung des Puncts $\mathfrak{Q}$ von irgend einer Ebene gleich der mittlern Entfernung aller Puncte der Figur ist.

1. Zus. Da die Totalsumme der Perpd. von den Winkeln auf irgend einer Linie durch $\mathfrak{P} = o$ ist, so folgt, dafs die Summe der Entfernungen dieser Axe von den Winkeln, die sich an derselben Seite befinden, gleich ist der Summe der Entfernungen dieser Ebene von den Winkeln an der andern Seite.

2. Zus. Da die Lage eines Puncts in der Ebene durch seine Entfernungen von 2 der Lage nach gegebenen Linien ganz bestimmt wird, so giebt es in jeder Figur einen Punct der mittlern Entfernungen.

§. 53.

Lehrs. Denkt man sich durch den Punct der mittlern Entfernungen der Winkel einer Figur eine beliebige gerade Transversale gezogen, eben so von $\mathfrak{P}$ nach jedem Winkel der Figur einen Radius, so ist die algebraische Summe der Projectionen eines jeden dieser Radien auf dieser Transversale gleich Null.

Man kann auch sagen: so ist die Summe der Producte eines jeden dieser Radien mit dem Cosinus des Winkels, den er mit der Richtung der Transversale bildet, gleich Null.

Bew. Folgt unmittelbar aus §. 49. und §. 51.

§. 54.

Lehrs. In jeder geradlinigen Figur von n Seiten ist die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Winkel von einem beliebigen Punct gleich der Summe der Quadrate der Radien aus dem Puncte der mittlern Entfernungen plus dem n fachen Quadrate der Entfernung des P. d. m. E. vom angenommenen Punct.

Bew. Die Winkelpuncte der Figur seien A, B, C, D..., N.; ferner sei $\mathfrak{A}$ der beliebig angenommene Punct, von welchem nach allen Winkeln A, B, C, D, ... N gerade Linien gezogen werden, die wir der Reihe nach

mit A, B, C, D, . . . N bezeichnen wollen. $\mathfrak{P}$ bezeichne den P. d. m. E., und die aus diesem Punct nach den Winkeln A, B, C . . . N gezogenen Radien sollen der Reihe nach mit r, r', r'', . . . $r^{(n-1)}$ bezeichnet sein. Endlich sei e die Entfernung des Punctes $\mathfrak{P}$ von dem Puncte $\mathfrak{A}$.

Es ergeben sich hier n Triangel, die alle die gemeinschaftliche Seite e haben; von den beiden andern Seiten ist die eine immer ein Radius, und die andere eine aus $\mathfrak{A}$ gezogene Linie, daher haben wir hier aus §. 18 u. 19. folgende n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= r^2 + e^2 + 2e.r_e \\ B^2 &= r'^2 + e^2 + 2e.r'_e \\ C^2 &= r''^2 + e^2 + 2e.r''_e \\ &\vdots \\ N^2 &= r^{(n-1)2} + e^2 + 2e.r_e^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$

Anmerk. Dafs ich die doppelten Rect. aus e und der Projection des Radius auf sie immer positiv gezeichnet habe, darf keinen Anstofs finden, da das Zeichen + hier nur ein Operationszeichen ist; ob aber $2e.r_e$ addirt oder subtrahirt werden soll, hängt von der Lage, die r_e hat, ab.

Da nun $r_e + r'_e + \ldots + r_e^{(n-1)} = o$ (§. 53.)

so ist auch $2e.r_e + 2e.r'_e + \ldots + 2e.r_e^{(n-1)}$

$$= 2e.[r_e + r'_e + \ldots + r_e^{(n-1)}] = 2e.o = o$$

Folglich $A^2 + B^2 + \ldots + N^2 = r^2 + r'^2 + \ldots + r^{(n-1)2} + n.e^2$.

Anmerk. Dieser schöne allgemeine Lehrs. ist nirgend so leicht ganz rein geometrisch erwiesen worden.

1. Zus. Die Summe $A^2 + B^2 + \ldots + N^2$ ist am kleinsten, wenn $e = o$, folglich ist die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Winkel einer Figur vom Puncte $\mathfrak{P}$ ein Kleinstes.

2. Zus. Wenn der Punct $\mathfrak{A}$ in der Peripherie eines Kreises genommen wird, der aus $\mathfrak{P}$ mit der Entfernung e beschrieben ist, so ist $A^2 + B^2 + \ldots + N^2$ für jeden Punct $\mathfrak{A}$ in dieser Peripherie eine constante Gröfse. Dieses ist der 12te Satz von Huygens Horologium oscillatorium.

3. Zus. Ist die n seitige Figur regulär, so ist, wie sich leicht darthun läfst, $\mathfrak{P}$ der Mittelpunct dieses regul. Polygons, daher

$$A^2 + B^2 + \ldots + N^2 = n.r^2 + n.e^2 = n[r^2 + e^2]$$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Win-

kel eines regul. Polygons von einem beliebigen Puncte $\mathfrak{A}$ eines Kreises, der mit dem Polygon einerlei Mittelpunct hat, ist gleich der n fachen Summe des Quadrats vom Halbmesser des Polygons und des Quadrats vom Halbmesser des Kreises.

Wenn $n=3$ und $e=r$, so ist $A^2+B^2+C^2=6r^2$

für $n=6$ und $e=r$, wäre $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2=12r^2$.

4. Zus. Nimmt man im 3. Zus. $e=r$ und $n=2$, so ist

$A^2+B^2=4r^2=$ dem Quadrat des Durchmessers, welches wiederum der Pythag. Lehrs. ist

§ 55.

Lehrs. Verbindet man n in einer Ebene liegende Puncte, je zwei und zwei durch gerade Linien, so ist die Summe der Quadrate aller dieser Linien gleich der n fachen Summe der Quadrate der Entfernungen aller Puncte des Systems vom Puncte $\mathfrak{P}$.

Bew. Man denke sich den in §. 54. genannten Punct $\mathfrak{A}$ nach und nach in jedem der n Puncte des zu betrachtenden Systems, so gehen von diesem Punct $\mathfrak{A}$ nach den übrigen $n-1$ Puncten $n-1$ Linien.

Es ergeben sich also hier n Gleichungen, deren eine Hälfte aus der Summe von $n-1$ Quadraten, nämlich der Summe der Quadrate von Linien, die aus $\mathfrak{A}$ nach allen übrigen Puncten gezogen werden, besteht, und deren andere Hälfte aus der Summe der Quadrate aller n Radien aus $\mathfrak{P}$ bestehen, die wir durch Σr^2 angeben wollen, und aus dem n fachen Quadrat der jedesmaligen Entfernung des Puncts $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{A}$.

In allen n Gleichungen zusammen stehen also in der Hälfte linker Hand $n.(n-1)$ Quadrate. Bei einiger Aufmerksamkeit dürfte es nicht entgehen, dafs jedes Quadrat zweimal da ist, und also nur $\frac{n.(n-1)}{2}$ verschiedene Quadrate linker Hand doppelt genommen wirklich vorhanden sind. Die Summen von der Hälfte rechter Hand der n Gleichungen geben, wie zu übersehen,

$$n\Sigma r^2 + n.r^2 + n.r'^2 + n.r''^2 + \ldots + n.r^{(n-1)2}$$
$$= n\Sigma r^2 + n[r^2 + r'^2 + \ldots + r^{(n-1)2}] = n\Sigma r^2 + n\Sigma r^2$$
$$= 2n\Sigma r^2$$

Folglich ist $n\Sigma r^2$ gleich der Summe aller Quadrate von allen Linien, die je zwei Puncte des Systems verbinden.

§. 56.

Aufg. Es sei gegeben S_2 die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punctes von jedem der $n-1$ andern, und Σ_2 die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Puncte des Systems, je zwei und zwei. Man soll hieraus das Quadrat der Entfernung eines unter ihnen vom allgemeinen Punct $\mathfrak{P}$ finden.

Aufl. Die zu findende Entfernung sei r,

so ist nach §. 54. $S_2 = \Sigma r^2 + n \cdot r^2$ also $\Sigma r^2 = S_2 - n \cdot r^2$;

nach dem vorhergehenden §. ist $n\Sigma r^2 = \Sigma_2$, also auch $\Sigma r^2 = \frac{\Sigma_2}{n}$,

folglich $r^2 = \frac{n \cdot S_2 - \Sigma_2}{n^2}$.

d. h. In einem System gegebener n Puncte ist das Quadrat der Entfernung eines unter ihnen vom allgemeinen Puncte der mittlern Entfernungen gleich der n fachen Summe der Quadrate der Entfernungen dieses Puncts von allen andern, wenn man hievon die Summe der Quadrate der Entfernungen je zweier Puncte abzieht, und diese Differenz durch das Quadrat der Zahl der Puncte dividirt.

§. 57.

Anmerk. Hat irgend eine Figur von 2 n Scheitelpuncten einen Mittelpunct der Figur, d. h. einen Punct, in welchem alle durch ihn gelegten Diagonalen halbirt werden, so ist dieser Punct auch zugleich der Punct $\mathfrak{P}$. Bezeichnen wir nun die Summe der Quadrate der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Diagonalen mit A, die Summe der Quadrate aller übrigen Diagonalen und Seiten mit B, so ist $A = 2\Sigma r^2$ (§. 55.);

$2n \cdot \Sigma r^2 = A + B$ (§. 55.),

also $n \cdot A = A + B$,

folgl. $(n-1)\,A = B$.

So ist bei einem Parallelogramm $n = 2$; A = der Summe der Quadrate beider Diagonalen, und B die Summe der Quadrate von allen 4 Seiten,

also $A = B$, wie in §. 23.

§. 58.

Neuer Lehrs. Wenn man aus irgend einem Punct $\mathfrak{A}$ in jeder geradlinigen Figur ABCD...N, deren Seiten AB, BC, CD ...MN wir in der Ordnung, wie sie folgen, mit a, b, c, d ...n bezeichnen wollen, aus diesem Punct $\mathfrak{A}$ nach allen Winkeln A, B, C..N Linien $\mathfrak{A}$A, $\mathfrak{A}$B,..$\mathfrak{A}$N ziehen, die wir in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, mit r, r', r''... $r^{(n-1)}$ bezeichnen wollen, so ist

$$a.r_a + b.r'_b + c.r''_c \ldots + n.r_n^{(n-1)} = a.r'_a + b.r''_b + c.r'''_c + \ldots + n.r_n$$

Bew. Nach §. 18. 19. ist

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= a^2 + r'^2 + 2a.r'_a \\ r'^2 &= b^2 + r''^2 + 2b.r''_b \\ r''^2 &= c^2 + r'''^2 + 2c.r'''_c \\ &\vdots \\ r^{(n-1)2} &= n^2 + r^2 + 2n.r_n \end{aligned}\right\} = A$$

und

$$\left.\begin{aligned} r'^2 &= a^2 + r^2 + 2a.r_a \\ r''^2 &= b^2 + r'^2 + 2b.r'_b \\ r'''^2 &= c^2 + r''^2 + 2c.r'' \\ &\vdots \\ r^2 &= n^2 + r^{(n-1)2} + 2n.r_n^{(n-1)} \end{aligned}\right\} = B$$

Zieht man B von A ab, so reducirt sich die erste Hälfte der Gleichung zu Null, d. h. alle vorhandenen Quadrate vernichten sich gegenseitig, und die Differenz von der Summe aller Rect. in A und der Summe aller Rect. in B ist Null, d. h. wenn die Hälfte genommen wird,

$$a.r_a + b.r'_b + \ldots + n.r_n^{(n-1)} = a.r'_a + b.r''_b + \ldots + n.r_n.$$

§. 59.

Lehrs. Unter eben der Voraussetzung, wie in §. 58., ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + n^2 = 2\,[a.r'_a + b.r''_b + c.r'''_c + \ldots n.r_n]$$

oder $= 2\,[a.r_a + b.r'_b + c.r''_c + \ldots + n.r_n^{(n-1)}]$

Bew. Wir haben aus §. 58.

$$a.r_a + b.r'_b + c.r''_c + \ldots + n.r_n^{(n-1)} = a.r'_a + b.r''_b + c.r'''_c + \ldots + n.r_n$$

da nun $a.r'_a + b.r''_b + c.r'''_c + \ldots + n.r_n = a.r'_a + b.r''_b + c.r'''_c + \ldots + n.r_n$

so ist $a(r_a + r'_a) + b(r'_b + r''_b) + \ldots + n(r_n^{(n-1)} + r_n) = 2\,[a.r'_a + b.r''_b + \ldots + n.r_n]$

Es ist aber $r_a + r'_a = a$; $r'_b + r''_b = b$; ... $r_n^{(n-1)} + r_n = n$ (§. 14.),

so ist $a^2 + q^2 + c^2 + .. + n^2 = 2[a.r'_a + b.r''_b + c.r'''_c + ... + n.r_n]$,

also auch $a^2 + b^2 + c^2 + .. + n^2 = 2[a.r_a + b.r'_b + c.r''_c + ... + n.r_n^{(n-1)}]$

§. 60.

In die Trigonometrische Sprache übersetzt, steht der Lehrsatz in §. 58. so:

$$a.r.\,\mathrm{Cos}\,(a,r) + b.r'\,\mathrm{Cos}\,(b,r') + \ldots + n.r^{(n-1)}\,\mathrm{Cos}\,(n,r^{(n-1)})$$
$$= a.r'\,\mathrm{Cos}\,(a,r') + b.r'\,\mathrm{Cos}\,(b,r') + \ldots + n.r.\,\mathrm{Cos}\,(n,r)$$

und der Lehrsatz in §. 59. steht so:

$$a^2 + b^2 + \ldots + n^2 = 2[a.r\,\mathrm{Cos}\,(a,r) + b.r'\,\mathrm{Cos}\,(b.r') + .. + n.r\,\mathrm{Cos}\,(n,r^{(n-1)})$$
$$= 2[a.r'\,\mathrm{Cos}\,(a,r') + b.r''\,\mathrm{Cos}\,(b,r'') + \ldots + n.r\,\mathrm{Cos}\,(n,r).$$

Anmerk. Die Lehrsätze in §. 58. und 59. sind wegen ihrer Allgemeinheit sehr merkwürdig, und nur die Furcht, diese Abhandlung über Gebühr auszudehnen, kann mich bestimmen, die schönen Folgerungen, z. B. bei den Curven, zu welchen sie Veranlassung geben, zu übergehen; ich erlaube mir nur, zu mehrerer Versinnlichung des Satzes zu sagen, dafs wenn man über allen Seiten irgend einer n seitigen gradlinigen Figur Quadrate zeichnet, und man fällt von einem beliebigen Punct Perpendikel auf die Seiten, so werden die Quadrate durch diese Perpendikel in zwei Rect. zerlegt.

So ist irgend ein Rect., als erstes gezählt, die Summe des 1sten, 3ten, 5ten, 7ten .... 2nten gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten ... 2nten.

So ist bei einem Triangel $n = 3$

und also allgemein $a.r_a + b.r'_b + c.r''_c = a.r'_a + b.r''_b + c.r_c$

Zieht man nun die Radien r, r', r'' aus einem merkwürdigen Puncte des Δs, z. B. wo sich die 3 Perpd. aus den Spitzen schneiden, oder aus dem Mittelpunct der ein und umschriebenen Kreise, dem Punct $\mathfrak{P}$ etc., so ergeben sich sehr schöne Relationen. Nimmt man z. E. gedachten Punct in einem rechtwinklichen Triangel im Scheitel eines spitzen Winkels, so ergiebt sich abermals sofort der Pytag. Lehrs. — Die Ausführung davon behalte ich mir noch vor. — Ich werde nun noch einige andere nicht minder schöne Sätze kurz darstellen.

§. 61.

Lehrs. Wenn man aus einem angenommenen Punct $\mathfrak{P}$ n Radien $r, r', r', r'', r''' \ldots r^{(n-1)}$ zieht, von welchen jeder einer andern

Seite einer beliebigen gradlinigen Figur gleich, und im Sinne des Umfanges parallel gezogen sind, und man aus irgend einem andern angenommenen Punct $\mathfrak{A}$, dessen Entfernung von $\mathfrak{P}$ E sein mag, ein Perpendikel auf jeden dieser Radien fällt, so wird die Summe der Rect.

$$r.e_r + r'.e_{r'} + r''.e_{r''} + \ldots + r^{(n-1)}.e_{r^{(n-1)}} = o,$$

wenn man die Projectionen von e, die nicht auf die Radien selbst, sondern auf ihre Verlängerung fallen, negativ nimmt. Eben so ist, wenn wir die aus $\mathfrak{A}$ auf die Radien $r, r', r'' \ldots r^{(n-1)}$ gefällten Perpendikel durch $p, p', p'' \ldots p^{(n-1)}$ angegeben, die Summe der Rect.

$$r.p + r'.p' + r''.p'' + \ldots + r^{(n-1)}.p^{(n-1)} = o.$$

Bew. Nach §. 15. haben wir folgende Rect. gleich

$$\left.\begin{array}{l} r.e_r = e.r \\ r'.e_{r'} = e.r' \\ r''.e_{r''} = e.r''_e \\ \vdots \\ r^{(n-1)}.e_{r^{(n-1)}} = e.r_e^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

Mithin auch $r.e_r + r'.e_{r'} + \ldots + r^{(n-1)}.e_{r^{(n-1)}} = e[r_e + r'_e + \ldots + r_e^{(n-1)}]$

Da nun nach §. 14. 4. $r_e + r'_e + \ldots + r_e^{(n-1)} = o$,

so ist $r.e_r + r'.e_{r'} + \ldots + r^{(n-1)}.e_{r^{(n-1)}} = o$.

Um den zweiten Theil zu beweisen, so denke man sich von den Endpuncten der Radien $r, r' \ldots r^{(n-1)}$ Perpendicularen auf die Linie $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, und bezeichne diese Perpend. mit $\pi, \pi', \pi'' \ldots \pi^{(n-1)}$, so sind nach §. 10. folgende Rect. gleich

$$\left.\begin{array}{l} r.p = e.\pi \\ r'.p' = e.\pi' \\ r''.p'' = e.\pi'' \\ \vdots \\ r^{(n-1)}.p^{(n-1)} = e.\pi^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

Mithin $r.p + r'p' + r''p'' + \ldots + r^{(n-1)}.p^{(n-1)} = e.[\pi + \pi' + \ldots + \pi^{(n-1)}]$

Nun ist $\pi + \pi' + \pi'' + \ldots + \pi^{(n-1)} = o$. (§. 14. 4.)

(Die $\pi, \pi' \ldots \pi^{(n-1)}$ können nämlich als die Projectionen der Radien $r, r', r' \ldots r^{(n-1)}$ auf eine Linie, die in $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ perpendikular ist, angesehen werden.)

In der trigonometrischen Sprache stehen die obigen Sätze so:

$$r \cdot e \cdot \cos(e, r) + r' \cdot e \cdot \cos(e, r') + \ldots + r^{(n-1)} e \cdot \cos(e, r^{(n-1)}) = 0$$

$$r \cdot e \cdot \sin(e, r) + r' \cdot e \cdot \sin(e, r') + \ldots + r^{(n-1)} e \cdot \sin(e, r^{(n-1)}) = 0$$

Anmerk. Für den Geometer braucht es kaum erinnert zu werden, dafs dieser §. die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht von Kräften, die um einen Punct wirken, und das Princip von der Theorie der Momente enthält. Noch mufs ich bemerken, dafs die in §. 24, 25, 48 bis 50, 53 bis 61. geführten Beweise so allgemein sind, dafs sie auch für Polygone gelten, die nicht in einer Ebene liegen. — Aus dem Beigebrachten erhellet genugsam, dafs die Euklidische Geometrie durch die Einführung meiner Sätze ungemein erleichtert und erweitert werden würde, meine äufserst beschränkte Zeit mag entschuldigen, dafs ich jetzt nicht die weitere Ausführung hier gebe.

Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi.

Auctore J. F. Pfaff *).

§. 1.

Inter insignia inventa, quibus sagacissimus La Grange Analysin auxit, referenda est methodus generalis, aequationes differentiarum partialium inter tres variabiles integrandi. Cujus integrationis investigationem difficultate haud caruisse, vel exinde intelligere licet, quod Eulerus, peritissimus calculi artifex, in longa harum aequationum pertractatione (Calc. Integr. Vol. III. p. 37 — 178.) casus tantum particulares, non ratione uniformi, sed variis artificiis usus, solutos dederit, ipse confessus (p. 132.): „se longissime adhuc a solutione problematis generalis distare." Quum quidem Eulerus notionem haud satis generalem genuinae harum aequationum indolis mente concepisse videatur, La Grangius methodum suam exinde deduxit, quod easdem ex principio uniformi et generali contemplatus fuerit. Sit nimirum z functio variabilium x et y, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, tum vulgo constat, aequationem differentiarum partialium inter tres variabiles nil aliud esse, quam relationem datam inter p, q, x, y, z, ex qua quaeritur relatio inter x, y, z. Jam cum sit $dz = pdx + qdy$, La Grange considerat hanc aequationem ceu aequationem differentialem inter tres quantitates x, y, z, quae praeterea quantitatem p tanquam functionem indeterminatam ipsarum trium variabilium invol-

*) In Conventu acad. d. 11. Maji 1815 exhibita.

vit. At vero constat, ut talis aequatio integrabilis sit, seu certam inter tres variabiles aequationem finitam inferat, illius coefficientes non ad lubitum assumi posse, sed certam inter eos relationem requiri. Ex hoc criterio integrabilitatis sive realitatis (Euler l. c. p. 5. 6.) petenda est determinatio coefficientis p, tanquam functionis τῶν x, y, z. Quo coefficiente rite determinato ipsa deinceps integratio aequationis $dz = pdx + qdy$, secundum regulas aliunde cognitas, praebet relationem quaesitam inter x, y, z. Quod nunc determinationem τῦ p attinet, praedicta conditio integrabilitatis denuo deducit ad aequationem differentiarum partialium inter quatuor variabiles, quae autem est linearis, quotientes differentiales in prima tantum dimensione continens, quamque igitur ex principiis aliunde a La Grangio demonstratis (Mémoires de l'Acad. de Berlin 1774. 1779.) integrare licet. In hac solutione restabat difficultas, a qua diu se vexatum fuisse, ipse La Grangius confitetur [a]). Cum nimirum p ceu functio trium variabilium x, y, z, detur per aequationem differentiarum partialium, hujus integratio ex lege nota involvit functionem arbitrariam duarum quantitatum: quum tamen determinatio τῦ z, tanquam functionis duarum variabilium x et y, functionem arbitrariam unius tantum quantitatis admittat. Hanc ipsam difficultatem atque contraditionem apparentem feliciter tandem enodavit La Grange, ostenditque ratiociniis ingeniosis, quomodo functio ista duarum quantitatum, quae natura sua infinities latior est quam functio arbitraria unius quantitatis, ad hujusmodi functionem unius variabilis revocetur.

Ceterum alii Analystae, qui methodum La Grangianam applicationibus illustrarunt, veluti celeberr. Le Gendre (Mémoires de l'Acad. de Paris Année 1787. p. 557.), praedictam difficultatem haud animadverterunt [b]), vel silentio praetermiserunt, forte, quoniam eadem defectus minus essentialis methodi ipsius videri poterat, quippe in applicatione methodi non necesse erat, aequationis auxiliaris pro p integrale completum invenire, (quod functionem arbitrariam duarum quantitatum involvisset), verum valor particularis τῦ p vel ad complete integrandam aequationem ipsam propositam sufficere jam poterat.

Quum praedicta ratione integratio aequationum differentiarum par-

a) Leçons sur le Calcul des fonctions. Nouv. édit. 8. Paris 1806. p. 390. „Cette difficulté, je l'avoue, m'a long-temps tourmenté." cf. p. 386.

b) Quod ipsum observat La Grange (Leçons p. 386.)

tialium primi ordinis inter tres variabiles pro confecta et omnibus numeris absoluta sit habenda, aliter res se habet, si quaestio agitur de quatuor vel pluribus variabilibus. Eulerus, qui aequationes inter tres variabiles, sive, quod perinde est, investigationem functionem duarum variabilium, ample pertractaverat, pro quatuor variabilibus pauca tantum exempla resolvit (l. c. p. 423 — 41), in quibus ipse non nisi prima elementa hujus scientiae contineri observat, et casum quinque variabilium ob penuriam materiae quae sunt viri summi verba p. 457.), ne attingere quidem voluit. Ipse deinceps La Grange (Mém. de Berl. 1774. 79.), aliique Analystae, veluti Monge (Mém. de Paris 1784, p. 556.), et le Gendre (l. c.), casus duntaxat valde limitatos in hoc genere contemplati sunt, qui quidem facile vel ad aequationes inter tres variabiles vel ad aequationes lineares reduci possunt, quam formam simplicissimam pro quotcunque variabilibus integrare docuerat La Grange (Mém. l. c.).

Quod si quidem methodum modo antea laudatum La Grangianam, aequationes differentiarum partialium inter tres variabiles generatim et complete integrandi, ad plures variabiles extendere conemur, mox ad inextricabiles difficultates delabimur: unde forte accidit, ut Analystae hactenus (quantum equidem sciam) hanc applicationem nondum tentaverint. Quibus permotus difficultatibus equidem satius duxi, totam aequationes differentiarum partialium considerandi rationem, ex qua methodus La Grangiana originem duxit, deserere, atque aliud principium in auxilium vocare, ex quo, etiam si per se simplicissimo, hactenus tamen istae aequationes nondum consideratae fuerunt, quodque revera, nisi cum aliis subsidiis jungeretur, parum esset frugiferum. Aequationes nimirum differentiarum partialium contemplari licet tanquam aequationes differentiales vulgaris generis truncatas inter plures variabiles, quam quae principaliter occurrunt, ipsis scilicet quotientibus differentialibus (p, q, etc.) variabilium loco habitis, quarum differentialia (dp, dq, ..) ideo desunt, quoniam ea in zero ducta esse censentur. Ita aequatio $dz = pdx + qdy = pdx + qdy + o.dp$ est aequatio inter quatuor variabiles x, y, z, p; q enim est quantitas a reliquis quatuor quantitatibus, ex hypothesi, data ratione dependens. Sic in genere aequatio differentiarum partialium inter m variabiles considerari potest tanquam aequatio differentialis vulgaris inter $2m - 2$ variabiles, si m variabilibus principalibus (z, x, y, ...) adjiciantur $m - 2$ variabiles accessoriae (p, q, ...), cum oc-

currant $m-1$ quotientes differentiales, quorum autem unus, per reliquos quantitates datus, non in computum venit. Jam vero Mongius (l. c) jam pridem docuit, contra opinionem antea vulgo receptam, aequationes differentiales, quae criteriis sic dictis integrabilitatis haud satisfaciant, haud pro absurdis habendas esse, sed potius easdem revera integrationem admittere, modo non per unam aequationem finitam, verum per systema plurium aequationum *). Quae egregia observatio si in nostro problemate adhibeatur, considerandum est, quod solutio aequationis differentiarum partialium essentialiter exigat expressionem unius variabilium principalium per reliquas. Quare variabiles accessoriae (p, q, etc.) in computum ingressae iterum sunt eliminandae: quarum numerus cum sit $m-2$, numerus aequationum, quarum systemate integratio continetur, non major esse debet quam $m-1$; quod cum ita fuerit, ex his $m-1$ aequationibus eliminando variabiles accessorias remanet aequatio finalis inter ipsas variabiles principales. At in hoc ipso cardo difficultatis versatur. Namque sicuti evidens est, aequationem differentialem inter tres variabiles per systema duarum aequationum finitarum semper esse integrabilem, ita haud difficulter intelligitur, idemque a Mongio explicatum est (l. c. p. 533, 34.), aequationem differentialem inter n variabiles regulariter, salvis exceptionibus singularibus, per systema $n-1$ aequationum integrari posse. Itaque in nostro casu loco desideratarum $m-1$ aequationum nanciscemur $2m-3$ aequationes integrales, i. e. justo plures, quibus finem propositum neutiquam assequi liceret. Sic igitur nostra aequationes differentiarum partialium considerandi ratio sterilis omnino foret, neque aliud quidquam suppeditare videretur, quam reductionem problematis simplicioris ad problema magis complicatum. Etenim quanquam aequationes differentiarum partialium rite considerentur tanquam aequationes differentiales vulgares, ex altera tamen parte hae posteriores longe latius patent, et contra illae harum formam tantum simplicissimam ostendunt. Quare opinio veri aliqua specie haud carere videretur, quod forma simplicissima seu casus singularis exceptus per systema pauciorum aequationum integrari

*) Haud congrua sunt, quae Eulerus de aequationibus differentialibus inter tres variabiles criterio integrabilitatis non respondentibus statuit, „quod eae sint absurdae, nihil plane significantes, quodque de earum integratione ne cogitari quidem possit (l. c. p. 7. 8.). Acute observat Monge (Mem. de Paris 1784. p. 535.): Ce qu'il y avoit d'absurde, c'étoit que leurs intégrales pussent être exprimées par une seule équation."

queat, quam forma generalis [d]). Attamen rem secus se habere, accuratior consideratio aequationum differentialium vulgarium inter quotcunque variabiles me docuit, sicque perveni ad propositionem novam et mihi quidem inexpectatam, quod quaevis aequatio differentialis vulgaris primi ordinis inter $2n$ et $2n-1$ variabiles semper per systema n aequationum (vel pauciorum) integrari possit. Ex qua propositione generali, quae naturam istarum aequationum hactenus etiam post laudatam Mongii observationem haud satis perspectam magis illustrare videtur, sponte quoque consequitur ceu corollarium particulare, solutio aequationum differentiarum partialium inter quotcunque variabiles completa.

Quae hactenus universe adumbrata clariorem lucem accipient, si ea primum ad casum simplicissimum, scilicet aequationes differentiarum partialium inter tres variabiles, applicemus. Et enim quanquam hoc problema jam a La Grangio solutum sit, ipsa tamen expositio inventoris (Leçons l. c.) a dubiis non omnino libera, novaque egregiae hujus solutionis deductio et illustratio haud prorsus superflua esse videtur, quae quidem abstrahendo a criterio sic dicto integrabilitatis, nec aliunde supposita jam integratione aequationum linearium, transformatione tantum simplici aequationis propositae generalis breviter absolvitur: in qua porro deductione phaenomenon singulare, La Grangii sagacitate detectum, ab ipso tantum ad enodandam difficultatem solutioni adhaerentem in auxilium vocatum, quodque accessorium ac veluti accidentale videri poterat, jam directe et principaliter investigatum, atque ex ipsis calculi fontibus haustum pro fundamento totius solutionis aequationum differentiarum partialium inter tres variabiles ponitur.

§. 2.

Priusquam autem rem ipsam aggrediamur, praemonendum est, in omni hac disquisitione supponi tanquam cognitam integrationem aequationum differentialium inter duas variabiles, quam saltem per approximationem ope serierum in potestate esse constat. Quae quidem integratio ab omnibus Analystis, qui aequationes differentiarum partialium tractarunt, postulatur [e]). At vero

d) Dari casus exceptos, ipse Mongius observat l. c. p. 534. „Le nombre des équations intégrales n'est pas toujours, comme dans le cas précédent, égal au nombre des variables diminué d'une unité.

e) Euler Calc. Integr. Vol. III. p. 54. „in hoc negotio, quoties resolutionem ad aequationem differentialem inter duas variabiles reducere licet, problema pro resoluto erit habendum" cf. p. 67. Idem observat La Grange Mém. de Berlin 1779. p. 153.

vero huc non tantum pertinet casus vulgo notus, quo datur una aequatio inter duas variabiles, verum etiam casus complicatior, quo duae, tres etc. in genere n aequationes conjunctim integrandae inter tres, quatuor . . vel $n+1$ variabiles dantur. Nota sunt, quae Alembertus aliique Analystae de hujusmodi integrationibus docuerunt. Sufficiat, hic breviter ostendere, id, quod alii auctores non satis generaliter illustrarunt, cujusque in sequentibus frequens erit usus, quod tales integrationes semper ad integrationem unius aequationis inter duas variabiles revocari possint.

Sint propositae n aequationes differentiales primi ordinis inter $n+1$ variabiles $z, \overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{n}{x}$ sub hac forma, ad quam semper eas revocare licet:

1) $d\overset{1}{x} = \overset{1}{X}dz$

2) $d\overset{2}{x} = \overset{2}{X}dz$

3) $d\overset{3}{x} = \overset{3}{X}dz$

. . . . . .

n) $d\overset{n}{x} = \overset{n}{X}dz,$

ubi quantitates $\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \ldots \overset{n}{X}$ dato utcunque modo pendent ab ipsis variabilibus $z, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x}$; tum his aequationibus inferuntur relationes inter istas $n+1$ variabiles, ex quibus una variabili pro principali assumta, reliquas ab illa dependentes tanquam ejusdem functiones considerare licet. Differentiando aequationem primam, dz tanquam differentiale constans assumendo, prodit $d^2\overset{1}{x} = d\overset{1}{X}.dz$. Est autem differentiale completum $\tau\tilde{\eta}\varsigma\ \overset{1}{X}$, tanquam functionis explicitae plurium quantitatum, hujus formae: $d\overset{1}{X} = M d\overset{1}{x} + N d\overset{2}{x} + \ldots$, quod, substituendo valores $\tau\tilde{\omega}\nu\ d\overset{1}{x}, d\overset{2}{x}, d\overset{3}{x}, \ldots$ ex ipsis aequationibus datis, praebet $d\overset{1}{X} = P dz$, unde fit $d^2\overset{1}{x} = P dz^2$, ubi P itidem est functio data variabilium $z, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x}$. Simili modo hanc aequationem rursus differentiando, provenit $d^3\overset{1}{x} = Q dz^3$; quas differentiationes continuando tandem

differentiale n^{tum} prodit $d^n \overset{1}{x} = S dz^n$. Quod si nunc concipiatur, ex his n aequationibus

1) $d\overset{1}{x} = \overset{1}{X} dz$

2) $d^2\overset{1}{x} = P dz^2$

3) $d^3\overset{1}{x} = Q dz^3$

n) $d^n\overset{1}{x} = S dz^n$

n — 1 variabiles $\overset{2}{x}, \overset{3}{x}, \ldots \overset{n}{x}$ eliminatas esse, prodibit aequatio differentialis n^{ti} gradus, quae tantum duas variabiles $\overset{1}{x}$ et z involvit. Cujus integratio completa praebet $\overset{1}{x}$ tanquam functionem cognitam variabilis z, in quam ingredientur praeterea n constantes arbitrariae a, b, c, ... Ipsas deinceps reliquas variabiles $\overset{2}{x}, \overset{3}{x}, \ldots \overset{n}{x}$, tanquam functiones itidem cognitas variabilis z, earundemque constantium a, b, c, ... , considerari posse, ex ipsa praedicta eliminatione, valores istarum variabilium suppeditante, manifestum est.

Ceterum dantur casus, quibus integratio plurium aequationum differentialium, conjunctim locum habentium, facilius, quam modo generali hic breviter adumbrato, perfici potest.

§. 3.

Problema I.

Aequationem differentiarum partialium inter tres variabiles complete integrare.

Solutio.

Cum in aequatione $dz = p\,dx + q\,dy$, relatione data inter q, p, x, y, z, nil inferatur quam determinatio $\tau\tilde{\eta}$ q per p, x, y, z, quantitas p restat indeterminata, hincque istam aequationem seu aequationem differentialem inter quatuor variabiles z, x, y, et p considerare licet. Jam loco quantitatum z, x, p, alias tres quantitates a, b, c, introducere licet, dum pro z, x, p pro lubitu assumantur functiones $\tau\tilde{\omega}\nu$ y, a, b, c. Quomodocunque enim se habeant quantitates z, x et p; (quarum relatio adhuc incognita est), et qualitercunque acci-

piantur praedictae functiones, semper concipi possunt tres valores $\tau\tilde{\omega}\nu$ a, b, c, qui assumtis tribus aequationibus valores $\tau\tilde{\omega}\nu$ z, x, p per y, a, b, c exprimentibus satisfaciant. Qua quidem ratione aequatio proposita $dz = pdx + qdy$ generatim transformabitur in aliam aequationem inter quatuor variabiles y, a, b, c. Jam vero istae functiones substituendae ita sunt definiendae, ut tam y, quam dy ex calculo exeant: tum enim prodibit aequatio inter tres variabiles a, b, c, quam sponte per systema duarum aequationum integrare, sicque (uti in introductione §. 1. observatum est), finem propositum assequi licet.

Cum x, z, et p concipiantur esse functiones $\tau\tilde{\omega}\nu$ y, a, b, c, earum differentialia sequenti modo exprimi possunt:

$$dx = Xdy + \chi da + \chi' db + \chi'' dc,$$
$$dz = Zdy + \zeta da + \zeta' db + \zeta'' dc,$$
$$dp = Pdy + \pi da + \pi' db + \pi'' dc;$$

ubi perinde est, sive X, χ, χ', χ''; Z, ... ζ''; P, ... π'', explicite ab y, a, b, c sive implicite ab y, x, z, p pendere censeantur. Cum porro detur relatio inter q, p, x, y, z, concipi potest quantitas q expressa per p, x, y, z, quo facto ejus differentiale hanc nanciscetur formam: $dq = q'dx + q''dy + q'''dz + q''''dp$, ubi q', q'', q''', q'''', pro datis functionibus $\tau\tilde{\omega}\nu$ x, y, z, p haberi possunt.

Quibus praemissis aequatio proposita

$$dz = pdx + qdy$$

hanc induit formam:

$$o = \begin{array}{l|l|l|l|l} Z & dy + \zeta & da + \zeta' & db + \zeta'' & dc. \\ -pX & -p\chi & -p\chi' & -p\chi'' & \\ -q & & & & \end{array}$$

Jam ut dy ex haec aequatione exeat, ponendum est

1) $Z = pX + q$

tum superest aequatio:

$$o = da + \frac{\zeta' - p\chi'}{\zeta - p\chi} db + \frac{\zeta'' - p\chi''}{\zeta - p\chi} dc.$$

Deinde ut haec aequatio etiam ab ipsa quantitate y libera fiat, coefficientes $\frac{\zeta' - p\chi'}{\zeta - p\chi}$, $\frac{\zeta'' - p\chi''}{\zeta - p\chi}$, qui generatim ab y, a, b, c, pendent, respectu $\tau\tilde{o}$ y constantes esse debent, hincque tales, ut eorum differentialia secundum y accepta

evanescant [f]). Quod si autem $d^\gamma\left(\frac{M}{N}\right)$ ponatur $= o$, erit $N d^\gamma M - M d^\gamma N = o$, sive $\frac{d^\gamma M}{M} = \frac{d^\gamma N}{N}$. Hinc esse debet

$$\frac{d^\gamma(\zeta - p\chi)}{\zeta - p\chi} = \frac{d^\gamma(\zeta' - p\chi')}{\zeta' - p\chi'} = \frac{d^\gamma(\zeta'' - p\chi'')}{\zeta'' - p\chi''}.$$

Est autem $d^\gamma(\zeta - p\chi) = d^\gamma\zeta - p\,d^\gamma\chi - \chi\,d^\gamma p$; porro ex theoremate notissimo de differentialibus functionum plurium variabilium, cum sint x, et z functiones $\tau\tilde{\omega}\nu$ y, a, b, c, erit $d^\gamma\zeta = d^a Z$, $d^\gamma\chi = d^a X$; hinc

$$\begin{aligned} d^\gamma\zeta - p\,d^\gamma\chi &= d^a Z - p\,d^a X = d^a(Z - pX) + X d^a p \\ &= d^a q + X d^a p, \text{ ob } Z - pX = q. \end{aligned}$$

Inde prodit $d^\gamma(\zeta - p\chi) = d^a q + X d^a p - \chi d^\gamma p$.

Jam vero est $d^a q = q' d^a x + q'' d^a y + q''' d^a z + q'''' d^a p$, vel ob $d^a x = \chi$, $d^a y = o$, $d^a z = \zeta$, $d^a p = \pi$, erit $d^a q = q'\chi + q'''\zeta + q''''\pi$; cum praeterea sit $d^\gamma p = P$, prodit $d^\gamma(\zeta - p\chi) =$

$$\begin{vmatrix} q' & \chi + q'''\zeta + q'''' \\ -P & +X \end{vmatrix} \pi, \text{ vel } \frac{d^\gamma(\zeta - p\chi)}{\zeta - p\chi} = \frac{\begin{vmatrix} q'''\zeta + q' & \chi + q'''' \\ -P & +X \end{vmatrix} \pi}{\zeta - p\chi}.$$

Simili modo prodeunt quotientes $\frac{d^\gamma(\zeta' - p\chi')}{\zeta' - p\chi'}$, $\frac{d^\gamma(\zeta'' - p\chi'')}{\zeta'' - p\chi''}$, permutando tantum in expressione inventa ζ, X cum ζ', χ'; ζ'', χ''. Jam evidens est, conditionem praedictam adimpleri, sive tres quotientes aequales fieri, si ponatur

2) $q'''' + X = o$

3) $q' - P = -pq'''$;

tum enim tres isti quotientes abeunt in q'.

Hinc prodit $X = -q''''$

$$P = q' + pq'''$$

Unde invenitur ex aequatione (1)

$$Z = pX + q = q - pq''.$$

f) Si quantitas ω a pluribus aliis pendens, secundum unam earum e, g, y differentietur, ceteris constantium instar habitis, tum $\frac{d\omega}{dy}$ brevitatis caussa designo per $d^y\omega$.

Quibus igitur valoribus pro X, Z, P suppositis, aequatio transformata tres tantum variabiles a, b, c cum earundem differentialibus continebit. Ita quidem X, Z, P per x, z, p, y dantur, quoniam q, q', q'', q''', datae sunt functiones harum quantitatum. Quare si in formulis supra assumtis pro dx, dz, dp, quantitates a, b, c constantium instar tractentur, ex tribus aequationibus differentialibus:

$$dx = Xdy = -q''dy$$
$$dz = Zdy = (q - pq'')dy$$
$$dp = Pdy = (q' + pq'')dy$$

valores τῶν x, z, p, per y integrando exprimi poterunt (§. 2.). Quae expressiones cum ex supra (§. 2.) demonstratis tres quantitates constantes arbitrarias α, β, γ, involvant, quantitates x, z, p etiam ceu functiones τῶν α, β, γ praeter y considerare licet; tumque differentialia completa dx, dz, dp, dum quoque α, β, γ, variabilium instar tractantur, sponte ipsas formas assumtas induent: ubi nunc pro α, β, γ poni posse a, b, c evidens est. Sic igitur tres illas aequationes differentiales integrando revera pro x, z, p, tales functiones τῶν y, a, b, c inventae sunt, quibus substitutis aequatio proposita $dz = pdx + qdy$ transformatur in aequationem tres tantum variabiles a, b, c involventem hujus formae: $da + Bdb = Cdc$, ubi jam B, C pro functionibus cognitis τῶν a, b, c, habenda sunt.

Restat nunc, ut ostendatur, quomodo haec aequatio per systema duarum aequationum integrari possit. Considerata c tanquam constante, integretur aequatio $da + Bdb = o$, sive, (quod concessa hac integratione semper in potestate esse facile demonstratur), inveniatur multiplicator M, qui formulam $da + Bdb$ aequalem faciat differentiali functionis duarum variabilium a, b. Sit porro haec functio $= N$, tum erit

1) $N = \varphi c$

denotante φc functionem arbitrariam quantitatis c, quae functio, si c est constans, ipsa etiam constantis locum sustinet. At cum tam multiplicator M, quam integrale N praeter a, b etiam contineat quantitatem c, constantis instar habitam, erit completum differentiale τῆ N, c etiam tanquam variabilem tractando, $dN = Mda + MBdb + \frac{dN}{dc} \cdot dc$, ubi cum N sit functio cognita τῶν a, b, c, etiam $\frac{dN}{dc} = N'$ talis erit functio. Inde complete dif-

ferentiando aequationem $N = \varphi c$, prodit

$$Mda + MBdb + N'dc = dc.\varphi' c.$$

Est autem $Mda + MBdb = MCdc$, hinc fit

$$2)\ MC + N' = \varphi' c.$$

Haec igitur aequatio combinata cum priore (1) praebet integrale completum aequationis inter tres variabiles $da + Bdb = Cdc$.

Quae jam facile ad integrationem aequationis nostrae differentiarum partialium transferri possunt. Quum nimirum z, x, p dentur per y, a, b, c, ope trium aequationum differentialium auxiliarium, vice versa a, b, c considerari possunt tanquam functiones datae $\tau\tilde{\omega}\nu$ z, x, p, y; sicque etiam M et N tales erunt functiones. Hinc aequationes (1) et (2) duas relationes inferunt inter quatuor quantitates z, x, p, y; unde, si concipiatur eliminata quantitas p, prodit relatio quaesita inter z, x, y. Haec integratio pro completa est habenda, cum ea complectatur functionem arbitrariam signo φ denotatam.

Denotemus hic et in sequentibus signis $F, \overset{1}{F}, \overset{2}{F}, \overset{3}{F}, \ldots$; porro $f, \overset{1}{f}, \overset{2}{f}, \overset{3}{f} \ldots$ functiones cognitas unius vel plurium variabilium; signo ψ autem (vel φ) functionem arbitrariam; porro exprimamus $\frac{dfx}{dx}$ per $f'x$, et pro functionibus plurium variabilium, $\frac{df(x,y,z,..)}{dx}$ vel $d^x f(x, y, z..)$ per $f'x$; $d^y f(x, y, z...)$ per $f'y$; $d^z f(x, y, z...)$ per $f'z$, etc. quam quidem commodam notationem La Grangius in Lectionibus adhibuit (p. 53.).

Quibus praemissis integratio inventa semper sub hac forma exhiberi poterit: 1) $F(z, y, x, p) = \psi[f(z, y, x, p)]$

$$2)\ \overset{1}{F}(z, y, x, p) = \psi[f(z, y, x, p)];$$

ubi vix opus est ut moneam, sub signo ψ, functionem signo f denotatam unius quantitatis vicem sustinere, et hoc sensu signum ψ intelligendum esse.

§. 4.

Aequatio generalis inter quatuor variabiles z, x, y, p haec est:

$$dz = Pdx + Qdy + Rdp,$$

ubi P, Q, R quascumque functiones datas ipsarum variabilium z, x, y, p denotant. Hujus formae, aequatio priori §. considerata casum tantum particularem sistit, duplici respectu limitatum, primo quod sit $R = 0$, deinde quod functio P, generatim per quatuor variabiles utcunque data, uni variabili p

aequalis sumatur. Nihilominus tamen forma etiam ista generalis ad tres variabiles revocari, sicque per systema simile duarum aequationum integrari potest. Quod quidem sequenti problemate ostendetur.

Problema II.

Aequationem differentialem primi ordinis quamcunque inter quatuor variabiles z, x, y, p, $dz = Pdx + Qdy + Rdp$, denotantibus P, Q, R quascunque functiones datas istarum variabilium, in aequationem inter tres variabiles transformare, eandemque per systema duarum aequationum integrare.

Solutio.

Ad analogiam praecedentis solutionis substituere licet pro x, y, p functiones variabilis z et aliarum trium quantitatum a, b, c. Sic aequatio transformatur in aliam inter z, a, b, c. Jam istae functiones hac lege sunt definiendae, ut ex aequatione hac transformata exeant z et dz.

Differentialia quantitatum x, y, p, tanquam functionum $\tau\tilde{\omega}\nu$ z, a, b, c, sequenti ratione exprimantur:

$$dx = Xdz + \chi da + \chi' db + \chi'' dc$$
$$dy = Ydz + \eta da + \eta' db + \eta'' dc$$
$$dp = \Pi dz + \pi da + \pi' db + \pi'' dc.$$

Porro cum sint P, Q, R, functiones datae $\tau\tilde{\omega}\nu$ z, x, y, p, earum differentialia hanc formam habebunt:

$$dP = P'dx + P''dy + P'''dp + P''''dz$$
$$dQ = Q'dx + Q''dy + Q'''dp + Q''''dz$$
$$dR = R'dx + R''dy + R'''dp + R''''dz,$$

ubi $P', \ldots P''''$; $Q', \ldots Q''''$; $R', \ldots R''''$; itidem sunt functiones datae praedictarum quantitatum. Jam aequatio proposita in hanc abit:

$0 = PX$	$dz + P\chi$	$da + P\chi'$	$db + P\chi'$	dc
$+ QY$	$+ Q\eta$	$+ Q\eta'$	$+ Q\eta''$	
$+ R\Pi$	$+ R\pi$	$+ R\pi'$	$+ R\pi''$	
$- 1$				

Hinc cofficientem $\tau\tilde{\varepsilon}$ $dz = 0$ posito prodit:

1) $1 = PX + QY + R\Pi$

Restat igitur aequatio:

$$0 = da + \frac{P\chi' + Q\eta' + R\pi'}{P\chi + Q\eta + R\pi} db + \frac{P\chi'' + Q\eta'' + R\pi''}{P\chi + Q\eta + R\pi} dc.$$

Jam ut coefficientes $\tau\tilde{\omega}\nu$ db, dc, a z liberi fiant, eorundem differentialia secun-

dum z accepta, quantitatibus a, b, c, constantium instar habitis, = o ponenda sunt. Hinc uti §. praecedente debet esse

$$\frac{d^2(P\chi+Q\eta+R\pi)}{P\chi+Q\eta+R\pi} = \frac{d^2(P\chi'+Q\eta'+R\pi')}{P\chi'+Q\eta'+R\pi'} = \frac{d^2(P\chi''+Q\eta''+R\pi'')}{P\chi''+Q\eta''+R\pi''}.$$

Est autem $d^2(P\chi+Q\eta+R\pi) = \begin{cases} P\,d^2\chi+Q\,d^2\eta+R\,d^2\pi \\ +\chi\,d^2P+\eta\,d^2Q+\pi\,d^2R \end{cases}$

At vero ex nota differentiationis functionum lege est

$d^2\eta = d^2Y$, $d^2\chi = d^2X$, $d^2\pi = d^2\Pi$, hinc

$$P\,d^2\chi+Q\,d^2\eta+R\,d^2\pi = P\,d^2X+Q\,d^2Y+R\,d^2\Pi =$$
$$d^2(PX+QY+R\Pi)-X\,d^2P-Y\,d^2Q-\Pi\,d^2R = -X\,d^2P-Y\,d^2Q-\Pi\,d^2R,$$

ob $PX+QY+R\Pi = 1$. Inde fit

$$d^2(P\chi+Q\eta+R\pi) = -X\,d^2P-Y\,d^2R-\Pi\,d^2R+\chi\,d^2P+\eta\,d^2Q+\pi\,d^2R.$$

Est porro $d^2P = P'd^2x+P''d^2y+P'''d^2p+P''''d^2z = P'\chi+P''\eta+P'''\pi$; simili modo $d^2Q = Q'\chi+Q''\eta+Q'''\pi$; $d^2R = R'\chi+R''\eta+R'''\pi$; praeterea est $d^2P = P'd^2x+P''d^2y+P'''d^2p+P''''=$
$P'X+P''Y+P'''\pi+P''''$; et $d^2Q = Q'X+Q''Y+Q'''\pi+Q''''$,
$d^2R = R'X+R''Y+R'''\Pi+R''''$.

Quibus substitutis prodit $d^2(P\chi+Q\eta+R\pi) =$

$$\begin{array}{l|l|l|l} & \chi & \eta & \pi, \\ +P'X & +Q'X & +R'X & \\ +P''Y & +Q''Y & +R''Y & \\ +P'''\Pi & +Q'''\Pi & +R'''\Pi & \\ +P'''' & +Q'''' & +R'''' & \\ -XP' & -XP'' & -XP''' & \\ -YQ' & -YQ'' & -YQ''' & \\ -\Pi R' & -\Pi R'' & -\Pi R''' & \end{array}$$

et $\dfrac{d^2(P\chi+Q\eta+R\pi)}{P\chi+Q\eta+R\pi} =$

$$\frac{\begin{array}{l|l|l|l} & \chi & \eta & \pi \\ (P''-Q')Y & +(Q'-P')X & +(R'-P'')X & \\ +(P'''-R')\Pi & +(Q'''-R'')\Pi & +(R''-Q''')Y & \\ +P'''' & +Q'''' & +R'''' & \end{array}}{P\chi+Q\eta+R\pi.}$$

Hinc

Hinc permutando χ, η, π cum χ', η', π'; χ'', η'', π'', prodeunt reliqui duo quotientes $\frac{d^z(P\chi'+Q\eta'+R\pi')}{P\chi'+Q\eta'+R\pi'}$, $\frac{d^z(P\chi''+Q\eta''+R\pi'')}{P\chi''+Q\eta''+R\pi''}$.

Qui tres quotientes invicem erunt aequales, quippe a χ, η, π independentes, si ponatur 2) $Q[(P'-Q')Y+(P'''-R')\Pi+P''''] = P[(Q'-P'')X+(Q'''-R')\Pi+Q'''']$

3) $R[(P'-Q')Y+(P'''-R')\Pi+P''''] = P[(R'-P''')X+(R''-Q''')Y+R''''].$

Inde tres quantitates incognitae X, Y, Π his tribus aequationibus definiuntur:

1) $1 = PX+QY+R\Pi$

2) $PQ''''-QP''''+P(Q'-P')X-Q(P'-Q')Y+\left(\begin{matrix}PQ'''-PR'\\-QP'''+QR'\end{matrix}\right)\Pi=0$

3) $PR''''-RP''''+P(R'-P''')X+\left(\begin{matrix}PR''-PQ'''\\-RP''+RQ''\end{matrix}\right)Y-R(P'''-R)\Pi=0$

Sumendo ex (1) $PX = 1-QY-R\Pi$, et substituendo in (2), (3), prodit

1) $\left\{\begin{matrix}PQ''''-QP''''+\\+Q'-P'\end{matrix}\right.\left(\begin{matrix}PQ'''+QR'+RP'\\-QP'''-RQ'-PR''\end{matrix}\right)\Pi=0$

2) $\left\{\begin{matrix}PR''''-RP''''+\\+R'-P'''\end{matrix}\right.\left(\begin{matrix}PR''+QR+P'''Q\\-RP''-R'Q-PQ'''\end{matrix}\right)Y=0.$

Hinc tandem sequitur

$$\Pi = \frac{QP''''-PQ''''+P'-Q'}{PQ'''-QP'''+QR'-RQ'+RP'-PR''},$$

$$Y = \frac{PR''''-RP''''+R'-P'''}{PQ'''-P'''Q+QR'-Q'R+RP''-PR''}.$$

Quibus valoribus substitutis, calculis rite subductis, fit

$$X = \frac{1-QY-R\Pi}{P} = \frac{RQ''''-QR''''+Q'''-R''}{PQ'''-P'''Q+QR'-RQ'+RP'-PR''}$$

Sic itaque X, Y, Π per functiones datas $\tau\tilde{\omega}\nu$ x, y, z, p exprimuntur.

Quod si jam, uti in praecedenti problemate (§. 5.), in formulis as-

sumtis pro dx, dy, dp, quantitates a, b, c tanquam constantes considerentur, ex aequationibus $dx = Xdz$
$dy = Ydz$
$dp = \Pi dz$
x, y, p per z et tres constantes arbitrarias a, b, c integrando exprimere licet (§. 2.); earundemque deinde expressionum differentialia completa, dum etiam a, b, c variant, sponte in formas assumtas pro dx, dy, dp, abeunt. Sic igitur tres functiones desideratae $\tau\tilde{\omega}\nu$ z, a, b, c inventae sunt, quas pro x, y, q substituendo, aequatio differentialis proposita transformatur in novam aequationem inter tres tantum variabiles a, b, c. Quo autem pacto haec aequatio per systema duarum aequationum integrari possit, in praecedenti solutione (§. 3.) satis declaratum est.

Ceterum cum rursus, sicuti x, z, p per y, a, b, c dantur, ita vice versa a, b, c pro functionibus datis $\tau\tilde{\omega}\nu$ x, y, z, p haberi possint, sponte apparet, integrationem aequationis propositae $dz = Pdx + Qdy + Rdp$ per duas aequationes hujus formae exprimi:

1) $F(x, y, p, z) = \psi[f(x, y, p, z)]$

2) $\overset{1}{F}(x, y, p, z) = \psi[\overset{1}{f}(x, y, p, z)]$

ubi signa functionalia significatu supra explicato accipienda sunt.

§. 5.

Problema III.

Aequationem differentialem vulgarem primi ordinis inter quinque variabiles per systema trium aequationum integrare.

Solutio.

Sit aequatio proposita inter quinque variabiles u, x, y, z, p, haec:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdp,$$

existentibus P, Q, R, S functionibus datis $\tau\tilde{\omega}\nu$ u, x, y, z, p. Fingamus, p esse constantem, tum aequatio abit in hanc: $du = Pdx + Qdy + Rdz$; quam tanquam aequationem inter quatuor variabiles[g]) per systema duarum aequationum ex praecedenti problemate (§. 4.) integrare licet. Quae integratio praebet:

g) Haec aequatio non tantum est quatuor terminorum, verum etiam consideranda est tanquam aequatio inter quatuor variabiles. Ceterum in omni hac disquisitione aequationes n terminorum, et n variabilium invicem distinguendae sunt.

1) $F(x, y, z, u) = \psi[f(x, y, z, u)]$

2) $\overset{I}{F}(x, y, z, u) = \psi[f(x, y, z, u)]$

At cum in hac integratione supponatur quantitas p constans, eademque in coefficientibus P, Q, R occurrat, haec quantitas etiam in expressiones ab illis coefficientibus pendentes, signis F, $\overset{I}{F}$, f denotatas, praeter x, y, z, u determinato modo ingredietur, sicque loco F (x, y, z, u) poni debet F (x, y, z, u, p), idemque de functionibus per signa $\overset{I}{F}$ et f notatis valet, quae erunt expressiones data ratione quinque quantitates x, y, z, u, p involventes. Porro cum functio signo ψ designata sit functio arbitraria, ea utcunque etiam quantitatem p involvere potest. Etenim functio f (x, y, z, u, p) tanquam expressio analytica ex quantitatibus x, y, z, u, p dato modo composita, brevitatis gratia exprimatur una littera f, tum functionis arbitrariae ψf hanc formam fingere licet: $\psi f = \mathfrak{A} f^{\alpha} + \mathfrak{B} f^{\beta} + \mathfrak{C} f^{\gamma} + \ldots$ ubi coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. quaecunque constantes sunt, hincque praeter numeros absolutos sive revera constantes etiam quantitate ficta constante p quocunque modo affectae esse possunt. Sic autem expressio haec pro ψf nil aliud est quam forma generalis functionis duarum quantitatum f et p, indeque loco ψf poni debet ψ(f, p). Quare praedictae duae aequationes casu a nobis supposito in has abeunt:

1) $F(x, y, z, u, p) = \psi[f(x, y, z, u, p), p]$

2) $\overset{I}{F}(x, y, z, u, p) = \psi'[f(x, y, z, u, p)]$

ubi signum ψ' secundum notationem La Grangianam supra §. 3. memoratam accipiendum est.

Quae binae aequationes necessariae quidem sunt ad integrationem completam aequationis differentialis propositae, cum haec sine ulla limitatione, hincque etiam pro constante p, valeat: at eaedem non solae sufficiunt, cum aequatio differentialis non tantum pro constante p obtinere debeat. Ad inveniendam tertiam aequationem, qua cum illis combinata integrale completum exhibeatur, prima aequatio differentianda est, ita ut etiam p instar variabilis tractetur. Tum fit, secundum notationem modo laudatam,

$$F'x \cdot dx + F'y \cdot dy + F'z \cdot dz + F'u \cdot du + F'p \cdot dp = \psi' f \cdot df + \psi' p \cdot dp,$$

litteram f brevitatis gratia, uti antea dictum, adhibendo: inde ob

$$df = f'x \cdot dx + f'y \cdot dy + f'z \cdot dz + f'u \cdot du + f'p \cdot dp,$$

et substituendo $\psi' f = F'(x, y, z, u, p)$ ex aequatione (2), fit

$$\begin{cases} F'x \,.\, dx + F'y \,.\, dy + F'z \,.\, dz + F'u \,.\, du + F'p \,.\, dp = \\ \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) \,.\, (fx \,.\, dx + fy \,.\, dy + fz \,.\, dz + fu \,.\, du + fp \,.\, dp) + \psi' p \,.\, dp \end{cases}$$

vel $du = \mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{Q}\,dy + \mathfrak{R}\,dz + \mathfrak{S}\,dp$, ubi

$$\mathfrak{P} = \frac{F'x - \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) \,.\, fx}{fu \,.\, \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) - F'u},$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{F'y - \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) \,.\, fy}{fu \,.\, \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) - F'u},$$

$$\mathfrak{R} = \frac{F'z - \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) \,.\, fz}{fu \,.\, \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) - F'u},$$

$$\mathfrak{S} = \frac{F'p - \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) \,.\, fp - \psi' p}{fu \,.\, \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) - F'u}.$$

Functiones litteris F', f' denotatas itidem pro functionibus datis τῶν x, y, z, u, p, habendas esse, in aperto est. Jam vi integrationis ope praecedentis problematis inventae, posito p constante vel $dp = 0$, aequatio $du = \mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{Q}\,dy + \mathfrak{R}\,dz$ consentire debet cum aequatione proposita $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Inde aequationes $\mathfrak{P} = P$, $\mathfrak{Q} = Q$, $\mathfrak{R} = R$, identicae esse et pro quovis valore constantis arbitrariae p valere debent: ubi nunc perinde est, sive haec quantitas indeterminata tanquam variabilis, sive tanquam constans consideretur. Quare ut aequatio $du = \mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{Q}\,dy + \mathfrak{R}\,dz + \mathfrak{S}\,dp$ cum aequatione proposita $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp$ ex omni parte conspiret, nil aliud requiritur, quam ut sit insuper $\mathfrak{S} = S$: unde prodit $F'p - \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) \,.\, fp - \psi p = S \,.\, [fu \,.\, \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) - F'u)$, vel $\psi p = F'p - \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) \,.\, fp - S \,.\, fu \,.\, \overset{I}{F}(x, y, z, u, p) + S \,.\, F'u$.

Sic igitur etiam $\psi' p$ aequalis reperitur functioni datae τῶν x, y, z, u, p, quam littera $\overset{2}{F}$ notemus. Quare tandem integratio completa aequationis propositae systemate harum trium aequationum comprehenditur:

1) $F(x, y, z, u, p) = \psi[f(x, y, z, u, p), p]$

2) $\overset{1}{F}(x, y, z, u, p) = \psi[f(x, y, z, u, p)]$

3) $\overset{2}{F}(x, y, z, u, p) = \psi p.$

§. 6.

Problema IV.

Aequationem differentiarum partialium inter quatuor variabiles u, z, x, y, complete integrare.

Solutio.

Sit $du = pdx + qdy + rdz$, tum data supponitur relatio inter tres quotientes differentiales $p = \frac{du}{dx}$, $q = \frac{du}{dy}$, $r = \frac{du}{dz}$, et quatuor variabiles u, x, y, z, ex qua quaeritur relatio inter has ipsas quatuor quantitates. Jam aequationem praedictam considerare licet tanquam aequationem inter sex variabiles u, x, y, z, p, q, per quas ipsas etiam r datur. Quam aequationem differentialem per systema trium aequationum finitarum integrare oportet, ex quibus deinceps eliminando p, q sponte prodit aequatio quaesita inter u, x, y, z. Quum vero in praecedenti problemate (§. 5.) ostensum sit, quomodo aequatio differentialis vulgaris inter quinque variabiles per systema trium aequationum integrari queat, nil aliud nunc requiritur, quam ut aequatio proposita differentiarum partialium in aequationem differentialem vulgarem inter quinque variabiles transformetur. Quem in finem ponamus, uti supra §. 3. 4, pro u, x, y, p, q, substitui functiones quantitatis z, aliarumque quinque quantitatum a, b, c, e, f, quarum functionum differentialia hanc formam habebunt:

$$dx = Xdz + \chi da + \chi' db + \chi'' dc + \chi''' de + \chi'''' df$$
$$dy = Ydz + \eta da + \eta' db + \eta'' dc + \eta''' de + \eta'''' df$$
$$du = Udz + \upsilon da + \upsilon' db + \upsilon'' dc + \upsilon''' de + \upsilon'''' df$$
$$dp = Pdz + \pi da + \pi' db + \pi'' dc + \pi''' de + \pi'''' df$$
$$dq = Qdz + qda + q' db + q'' dc + q''' de + q'''' df.$$

Cum porro ex relatione data p exprimere liceat per x, y, z, u, p, q, ejus differentiale hanc formam induet:

$$dr = r'dx + r''dy + r'''dz + r^{IV}du + r^{V}dp + r^{VI}dq,$$

ubi $r', r'', \ldots r^{VI}$ sunt functiones datae illarum sex quantitatum. Quibus praemissis aequatio proposita $du = pdx + qdy + rdz$ in hanc abit:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
o = pX & dz + p\chi & da + p\chi' & db + p\chi'' & dc + p\chi''' & de + p\chi^{IV} \\
+ qY & + q\eta & + q\eta' & + q\eta'' & + q\eta''' & + q\eta^{IV} \\
+ r & - \upsilon & - \upsilon' & - \upsilon'' & - \upsilon''' & - \upsilon^{IV} \\
- U & & & & &
\end{array} \quad df.$$

Quo nunc ex hac aequatione tam dz quam z exeant, ponendum est

1) $U = pX + qY + r;$

deinde esse debet $\frac{d^z(p\chi + qy - \upsilon)}{p\chi + qy - \upsilon} = \frac{d^z(p\chi' + qy' - \upsilon')}{p\chi' + qy' - \upsilon'} = \frac{d^z(p\chi'' + qy'' - \upsilon')}{p\chi'' + qy'' - \upsilon}$

$$= \frac{d^z(p\chi''' + qy''' - \upsilon''')}{p\chi''' + py''' - \upsilon'''} = \frac{d^z(p\chi^{IV} + qy^{IV} - \upsilon^{IV})}{p\chi^{IV} + qy^{IV} - \upsilon^{IV}}.$$

Evolvere igitur oportet $d^z(p\chi + qy - \upsilon)$, ita ut in differentiatione sola z ceu variabilis tractetur, a, b, c, e, f pro constantibus habitis. Est autem

$d^z(p\chi + qy - \upsilon) = p\,d^z\chi + q\,d^z y - d^z\upsilon + \chi\,d^z p + y\,d^z q$

Pars prior $p\,d^z\chi + q\,d^z y - d^z\upsilon$ est

$= p\,d^a X + q\,d^a Y - d^a U = d^a(pX + qY - U) - X\,d^a p - Y\,d^a q$

$= - d^a\upsilon - X\,d^a p - Y\,d^a q$, vi aequationis (1). At vero est $d^a p = \pi$, $d^a q = \varrho$, $d^a r = r'\,d^a x + r''\,d^a y + r^{IV}\,d^a u + r^V\,d^a p + r^{VI}\,d\,q$

$= r'\chi + r''\eta + r^{IV}\upsilon + r^V p + r^{VI} q$; $d^z p = P$, $d^z q = Q$. Hinc fit

$d^z(p\chi + q\eta - \upsilon)$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|}
- r' & \chi - r'' & \eta - r^{IV} & \upsilon - r^V & \pi - r^{VI} \\
+ P & + Q & - X & - Y &
\end{array} q,$$

$$\text{et } \frac{d^z(p\chi + q\eta - \upsilon}{p\chi + q\eta - \upsilon} = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|}
r^{IV}.\upsilon + r' & \chi + r'' & \eta + r^V & \pi + r^{VI} \\
- P & - Q & + X & + Y
\end{array} q}{\upsilon - p\chi - q\eta}.$$

Permutando χ, η, υ, cum χ' η' υ'; χ'', η'', υ''; χ''', η''', υ'''; χ^{IV}, η^{IV}, υ^{IV}, reliqui quatuor quotientes prodeunt. Qui omnes erunt inter se et primo aequales, quippe a υ, χ, η independentes, si ponatur

2) $r^V + X = o$

3) $r^{VI} + Y = o$

4) $r' - P = - p r^{IV}$

5) $r'' - Q = - q r^{IV}$

Hinc prodit 1) $X = - r^V$;

2) $Y = - r^{VI}$

3) $P = r' + pr^{IV}$

4) $Q = r'' + qr^{IV}$

Unde tandem sequitur 5) $U = pX + qY + r$
$= r - pr^{V} - qr^{VI}$

Sic igitur quantitates X, Y, U, P, Q pro functionibus datis τῶν x, y, z, u, p, q haberi possunt. Quod si nunc in formulis differentialibus assumtis a, b, c, e, f, constantium instar tractentur, ex aequationibus differentialibus auxiliaribus:

1) $dx = -r^{V}dz$
2) $dy = -r^{VI}dz$
3) $du = (r - pr^{V} - qr^{VI})dz$
4) $dp = (r' + pr^{IV})dz$
5) $dq = (r'' + pr^{IV})dz$

ope integrationis (§. 2.) x, y, u, p, q, per z et quinque quantitates constantes arbitrarias a, b, c, e, f exprimere licet: quarum deinceps expressionum differentialia completa, ipsas has quantitates pro variabilibus habendo, formas assumtas sponte recipient. Quos itaque valores pro x, y, u, p, q in aequatione proposita $du = pdx + qdy + rdz$ substituendo, ea abibit in aequationem, quae, exclusa z, quinque tantum quantitates a, b, c, e, f, earumque differentialia continebit. Hujus autem aequationis transformatae integratio ex problemate praecedente (§. 5.) his tribus aequationibus comprehenditur:

1) $F(a, b, c, e, f) = \psi[f(a, b, c, e f), f]$
2) $\overset{1}{F}(a, b, c, e, f) = \psi'[f(a, b, c, e, f)]$
3) $\overset{2}{F}(a, b, c, e, f) = \psi f.$

Jam vero, sicuti x, y, u, p, q dato modo a z, a, b, c, e, f pendent, ita vice versa quantitates a, b, c, e, f, per z, x, y, u, p, q expressas esse concipere licet. Quare functiones F, $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, et f ceu functiones datae τῶν z, x, y, u, p, q considerandae sunt, nec non ipsa quantitas f talis erit functio, quam signo functionali $\overset{1}{f}$ notemus. Sic igitur integratio completa aequationis propositae differentiarum partialium inter quatuor variabiles systemate trium aequationum hujus formae exhibebitur:

1) $F(x, y, z, u, p, q) = \psi[f(x, y, z, u, p, q), \overset{1}{f}(x, y, z, u, p, q)]$

2) $\overset{1}{F}(x, y, z, u, p, q) = \psi[\overset{2}{f}(x, y, z, u, p, q)]$

3) $\overset{2}{F}(x, y, z, u, p, q) = \psi[\overset{1}{f}(x, y, z, u, p, q)]$;

ex quibus, si concipiantur eliminatae quantitates p, q, prodit aequatio quaesita inter x, y, z, u. Quae porro integratio, cum functionem arbitrariam duarum quantitatum complectatur, pro completa est habenda.

§. 7.

Problema V.

Aequationem differentialem vulgarem inter sex variabiles per systema trium aequationum finitarum integrare.

Solutio.

Cum aequatio differentialis inter quinque variabiles ex problemate tertio per systema trium aequationum integrabilis sit, ostendendum est, aequationem differentialem inter sex variabiles in aliam transformari posse, quae quinque tantum variabiles earumque differentialia comprehendat. Sit aequatio proposita inter sex variabiles u, x, y, z, p, q haec:

$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq$, ubi P, Q, R, S, T sunt functiones datae earundem variabilium. Quare earum differentialia sic exprimentur:

$$dP = P'dx + P''dy + P'''dz + P^{IV}dp + P^{V}dq + P^{VI}du$$
$$dQ = Q'dx + Q''dy + Q'''dz + Q^{IV}dp + Q^{V}dq + Q^{VI}du$$
$$dR = R'dx + R''dy + R'''dz + R^{IV}dp + R^{V}dq + R^{VI}du$$
$$dS = S'dx + S''dy + S'''dz + S^{IV}dp + S^{V}dq + S^{VI}du$$
$$dT = T'dx + T''dy + T'''dz + T^{IV}dp + T^{V}dq + T^{VI}du$$

existentibus $P', \ldots P^{VI}$; $Q' \ldots Q^{VI}$; $\ldots\ldots T', \ldots T^{VI}$, itidem functionibus datis istarum variabilium. Jam ponamus, loco x, y, z, p, q, substitui functiones quantitatis u, et quinque novorum quantitatum a, b, c, e, f: tum illarum differentialia ita exprimere licet:

$$dx = X\,du + \chi\,da + \chi'db + \chi''dc + \chi'''de + \chi''''df$$
$$dy = Y\,du + \eta\,da + \eta'db + \eta''dc + \eta'''de + \eta''''df$$
$$dz = Z\,du + \zeta\,da + \zeta'db + \zeta''dc + \zeta'''de + \zeta''''df$$
$$dp = P\,du + \pi\,da + \pi'db + \pi''dc + \pi'''de + \pi''''df$$
$$dq = Q\,du + q\,da + q'db + q''dc + q'''de + q''''df$$

Quae substituendo aequatio proposita in hanc abit:

$0 =$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
0 = & PX & du + P\chi & da + P\chi' & db + \ldots + P\chi^{IV} \\
& + QY & + Q\eta & + Q\eta' & + Q\eta^{IV} \\
& + RZ & + R\zeta & + R\zeta' & + R\zeta^{IV} \\
& + S\mathfrak{P} & + S\pi & + S\pi' & + S\pi^{IV} \\
& + T\mathfrak{Q} & + Tq & + Tq' & + Tq^{IV} \\
& - 1 & & &
\end{array} \quad \left| \; df \right.$$

Quo jam haec aequatio a du libera fiat, ponendum est

$$1)\ PX + QY + RZ + S\mathfrak{P} + T\mathfrak{Q} = 1.$$

Deinde ut eadem etiam ab u liberetur, debet esse, uti supra (§. 6.)

$$\frac{d^n(P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + Tq)}{P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + Tq} = \frac{d^n(P\chi' + Q\eta' + R\zeta' + S\pi' + Tq')}{P\chi' + Q\eta' + R\zeta' + S\pi' + Tq'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{d^n(P\chi^{IV} + Q\eta^{IV} + R\zeta^{IV} + S\pi^{IV} + Tq^{IV})}{P\chi^{IV} + Q\eta^{IV} + R\zeta^{IV} + S\pi^{IV} + Tq^{IV}}$$

Quare methodo hactenus adhibita evolvendae sunt differentialia in numeratoribus harum quinque fractionum occurrentia. Est autem

$$\begin{aligned}
& d^n(P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + Tq) \\
= & \left\{ \begin{array}{l} \chi d^nP + \eta d^nQ + \zeta d^nR + \pi d^nS + q d^nT \\ + P d^n\chi + Q d^n\eta + R d^n\zeta + S d^n\pi + T d^nq \end{array} \right. \\
= & \left\{ \begin{array}{l} \chi d^nP + \eta d^nQ + \zeta d^nR + \pi d^nS + q d^nT \\ + P d^aX + Q d^aY + R d^aZ + S d^a\mathfrak{P} + T d^a\mathfrak{Q} \end{array} \right. \\
= & \left\{ \begin{array}{l} \chi d^nP + \eta d^nQ + \zeta d^nR + \pi d^nS + q d^nT \\ + d^a(PX + QY + RZ + S\mathfrak{P} + T\mathfrak{Q}) \\ - X d^aP - Y d^aQ - Z d^aR - \mathfrak{P} d^aS - \mathfrak{Q} d^aT \end{array} \right.
\end{aligned}$$

vel ex aequatione (1),

$$= \left\{ \begin{array}{l} \chi d^nP + \eta d^nQ + \zeta d^nR + \pi d^nS + q d^nT \\ - X d^aP - Y d^aQ - Z d^aR - \mathfrak{P} d^aS - \mathfrak{Q} d^aT. \end{array} \right.$$

At vero est $d^aP = P' d^ax + P'' d^ay + P''' d^az + P^{IV} d^ap + P^V d^aq$

$$= P'\chi + P''\eta + P'''\zeta + P^{IV}\pi + P^V q.$$

$$d^u P = P' d^u x + P'' d^u y + P''' d^u z + P^{iv} d^u p + P^v d^u q + P^{vi}$$
$$= P' X + P'' Y + P''' Z + P^{iv} \mathfrak{P} + P^v \mathfrak{Q} + P^{vi}$$

Simili modo expressis differentialibus $\tau\tilde{\omega}\nu$ Q, R, S, T, secundum a et u, fit

$$d^u (P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + Tq)$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
= & P' X & \chi + Q' X & \eta + R' X & \zeta + S' X & \pi + T' X \\
+ & P'' Y & + Q'' Y & + R'' Y & + S'' Y & + T'' Y \\
+ & P''' Z & + Q''' Z & + R''' Z & + S''' Z & + T''' Z \\
+ & P^{iv} \mathfrak{P} & + Q^{iv} \mathfrak{P} & + R^{iv} \mathfrak{P} & + S^{iv} \mathfrak{P} & + T^{iv} \mathfrak{P} \\
+ & P^v \mathfrak{Q} & + Q^v \mathfrak{Q} & + R^v \mathfrak{Q} & + S^v \mathfrak{Q} & + T^v \mathfrak{Q} \\
+ & P^{vi} & + Q^{vi} & + R^{vi} & + S^{vi} & + T^{vi} \\
- & X P' & - X P'' & - X P''' & - X P^{iv} & - X P^v \\
- & Y Q' & - Y Q'' & - Y Q''' & - Y Q^{iv} & - Y Q^v \\
- & Z R' & - Z R'' & - Z R''' & - Z R^{iv} & - Z R^v \\
- & \mathfrak{P} S' & - \mathfrak{P} S'' & - \mathfrak{P} S''' & - \mathfrak{P} S^{iv} & - \mathfrak{P} S^v \\
- & \mathfrak{Q} T' & - \mathfrak{Q} T'' & - \mathfrak{Q} T''' & - \mathfrak{Q} T^{iv} & - \mathfrak{Q} T^v
\end{array} \quad | \; q$$

Jam quotiens $\dfrac{d^u (P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + Tq)}{P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + Tq}$

eundem valorem servabit, permutando χ, η, ζ, π, q cum χ', η', ζ', π', q'; χ'', η'', ζ'', π'', q''; . . . χ^{iv}, η^{iv}, η^{iv}, π^{iv}, q^{iv}; si numeratorem ad formam $MP\chi + MQ\eta + MR\zeta + MS\pi + MTq$ revocare licet: quippe tum quoque quotientes abeunt in M. Illud autem locum habebit, si hae supponantur aequationes:

2) $Q[P^{vi} + (P'' - Q')Y + (P''' - R')Z + (P^{iv} - S')\mathfrak{P} + (P^v - T')\mathfrak{Q}]$
$= P[Q^{vi} + (Q' - P'')X + (Q''' - R'')Z + (Q^{iv} - S'')\mathfrak{P} + (Q^v - T'')\mathfrak{Q}]$

3) $R[P^{vi} + (P'' - Q')Y + (P''' - R')Z + (P^{iv} - S')\mathfrak{P} + (P^v - T')\mathfrak{Q}]$
$= P[R^{vi} + (R' - P''')X + (R'' - Q''')Y + (R^{iv} - S''')\mathfrak{P} + (R^v - T''')\mathfrak{Q}]$

4) $S[P^{vi} + (P'' - Q')Y + (P''' - R')Z + (P^{iv} - S')\mathfrak{P} + (P^v - T')\mathfrak{Q}]$
$= P[S^{vi} + (S' - P^{iv})X + (S'' - Q^{iv})Y + (S''' - R^{iv})Z + (S^v - T^{iv})\mathfrak{Q}]$

5) $T[P^{vi} + (P'' - Q')Y + (P''' - R')Z + (P^{iv} - S')\mathfrak{P} + (P^v - T')Q]$
$= P[T^{vi} + (T' - P^v)X + (T'' - Q^v)Y + (T''' - R^v)Z + (T^{iv} - S^v)\mathfrak{P}]$

Ex quibus quatuor aequationibus, junctis cum prima

1) $PX + QY + RZ + S\mathfrak{P} + T\mathfrak{Q} = 1$

quinque quantitates X, Y, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, determinare oportet. Calculis rite subductis, prodit $Y = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, existente

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} (PR^{v} - RP^{v} + RT' - TR' + TP''' - PT''')\,(SP^{vi} - PS^{vi} + P^{iv} - S') \\ -(PR^{iv} - RP^{iv} + RS' - SR' + SP'' - PS'')\,(TP^{vi} - PT^{vi} + P^{v} - T'); \\ -(PS^{v} - SP^{v} + ST' - TS' + TP^{iv} - PT^{iv})\,(RP^{vi} - PR^{vi} + P''' - R'); \end{cases}$$

$$\mathfrak{N} = \begin{cases} (PR^{iv} - RP^{iv} + RS' - SR' + SP''' - PS''')\,(PQ^{v} - QP^{v} + QT' - TQ' + TP'' - PT'') \\ -(PR^{v} - RP^{v} + RT' - TR' + TP''' - PT''')\,(PQ^{iv} - QP^{iv} + QS' - SQ' + SP'' - PS'') \\ +(PS^{v} - SP^{v} + ST' - TS' + TP^{iv} - PT^{iv})\,(PQ''' - QP''' + QR' - RQ' + RP'' - PR'') \end{cases}$$

Ex Y prodit Z, permutando invicem litteras Q et R, atque indices $''$ et $'''$; simili modo ex Y prodit $\mathfrak{P}$ vel $\mathfrak{Q}$, permutando in expressione pro Y litteras Q et S, vel Q et T, nec non indices $''$ et ^{iv}, vel $''$ et ^{v}. Sic denominator S 2 invariatus manet, nisi quod signa mutet. Quod ad X attinet, inventis Y, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, est $X = \frac{1 - QY - RZ - S\mathfrak{P} - T\mathfrak{Q}}{P}$, vel etiam X prodit ex Y, permutando invicem litteras P et Q, indices $'$ et $''$.

Qua ratione determinatis X, Y, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, si fingendo a, b, c, e, f esse constantes, ex aequationibus

$$dx = X\,du$$
$$dy = Y\,du$$
$$dz = Z\,du$$
$$dp = \mathfrak{P}\,du$$
$$dq = \mathfrak{Q}\,du$$

secundum §. 2. exprimantur x, y, z, p, q per u et quinque constantes arbitrarias a, b, c, e, f ex ipsa integratione ingressas, eaedem expressiones, suppositis deinceps a, b, c, e, f, variabilibus praebebunt functiones $\tau\tilde{\omega}\nu$ u, a, b, c, e, f, ita comparatas, ut eas pro x, y, z, p, q substituendo aequatio differentialis proposita abeat in aequationem inter quinque quantitates a, b, c, e, f, earumque differentialia. Jam vero ex problemate (3) integratio hujus aequationis transformatae his comprehenditur tribus aequationibus:

1) $F(a, b, c, e, f) = \psi[f(a, b, c, e, f), f]$

2) $\overset{1}{F}(a, b, c, e, f) = \psi'[f(a, b, c, e, f)]$

3) $\overset{2}{F}(a, b, c, e, f) = \psi' f.$

Cum autem singulas quantitates a, b, c, e, f per x, y, z, p, q et u expressas concipere liceat, functiones litteris F, $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, f insignitae, nec non ipsa quantitas f, tanquam functiones datae $\pi\tilde{\omega}\nu$ x, y, z, p, q, u considerari possunt. Itaque integratio aequationis propositae his tandem absolvitur aequationibus:

$$1)\ F(x,y,z,p,q,u) = \psi[f(x,y,z,p,q,u), \overset{1}{f}(x,y,z,p,q,u)]$$

$$2)\ \overset{1}{F}(x,y,z,p,q,u) = \psi'[f(x,y,z,p,q,u)]$$

$$3)\ \overset{2}{F}(x,y,z\,p,q,u) = \psi[\overset{1}{f}(x,y,z,p,q,u)].$$

§. 8.

Si in praecedente solutione numerator et denominator formulae pro Y evolvuntur, multiplicatione actu instituta, illius termini 72 ad 36, hujus termini 108 ad 60 reducuntur, reliquis se mutuo destruentibus, sicque diviso numeratore et denominatore per communem factorem P, et ponendo $\frac{\mathfrak{M}}{P} = \mathfrak{M}'$, $\frac{\mathfrak{N}}{P} = \mathfrak{N}'$, prodit $Y = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{N}'}$, existente

$$\mathfrak{M}' = \begin{cases} P(T'''S^{VI} - T^{VI}S''' + R^{VI}S^{V} - R^{V}S^{VI} + T^{VI}R^{IV} - T^{IV}R^{VI}) \\ + R(S'T^{VI} - S^{VI}T' + P^{V}S^{VI} - P^{VI}S^{V} + T^{IV}P^{VI} - T^{VI}P^{IV}) \\ + S(R^{V}P^{VI} - R^{VI}P^{V} + T^{VI}P''' - T'''P^{VI} + R^{VI}T' - R'T^{VI}) \\ + T(R'S^{VI} - R^{VI}S' + S'''P^{VI} - S^{VI}P''' + R^{VI}P^{IV} - R^{IV}P^{VI}) \\ + R^{V}P^{IV} - R^{IV}P^{V} + R'S^{V} - R^{V}S' + T^{IV}P''' - T'''P^{IV} \\ + S'''P^{V} - S^{V}P''' + S'T''' - S'''T' + R^{IV}T' - R'T^{IV}; \end{cases}$$

porro

$$\mathfrak{N}' = \begin{cases} P\begin{pmatrix} S^{V}Q''' - S'''Q^{V} + S'''T'' - S''T''' + R^{IV}Q^{V} - R^{V}Q^{IV} + R''T^{IV} - R^{IV}T'' \\ + R^{V}S'' - R''S^{V} + T'''Q^{IV} - T^{IV}Q''' \end{pmatrix} \\ + Q\begin{pmatrix} S'T''' - S'''T' + S'''P^{V} - P'''S^{V} + R^{IV}T' - R'T^{IV} + R^{V}P^{IV} - R^{IV}P^{V} \\ + R'S^{V} - R^{V}S' + P'''T^{IV} - T'''P^{IV} \end{pmatrix} \\ + R\begin{pmatrix} S'Q^{V} - S^{V}Q' + T'S'' - S'T'' + P^{V}Q^{IV} - P^{IV}Q^{V} + P^{IV}T'' - P''T^{IV} \\ + Q'T^{IV} - T'Q^{IV} + P''S^{V} - P^{V}S'' \end{pmatrix} \\ + S\begin{pmatrix} Q'R^{V} - R'Q^{V} + R'T'' - R''T' + P'''Q^{V} - P^{V}Q''' + P''T''' - P'''T'' \\ + R''P^{V} - R^{V}P'' + Q'''T' - Q'T''' \end{pmatrix} \\ + T\begin{pmatrix} S'''Q' - S'Q''' + S''P''' - S'''P'' + R'Q^{IV} - R^{IV}Q' + R^{IV}P' - R''P^{IV} \\ + R''S' - R'S'' + P^{IV}Q''' - P'''Q^{IV} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ex Y reliquae quatuor quantitates X, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, modo praedicto (§. 7.) facile deducuntur. Ceterum ex hac transformatione denominator omnibus quinque quantitatibus communis est, quod de denominatore formulae praecedenti §. pro Y inventae quoad X non valet.

§. 9.

Problema VI.

Aequationem differentialem vulgarem inter septem variabiles per systema quatuor aequationum integrare.

Solutio.

Sit proposita aequatio differentialis inter septem variabiles u, x, y, z, t, p, q, haec:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdt + Tdp + Udq,$$

existentibus P, Q, R S, T, U, datis quibuscunque functionibus earundem variabilium. Jam fingendo quantitatem q esse constantem, aequatio abit in aequationem inter sex variabiles, eademque ex problemate praecedente (§. 8.) integrari poterit per systema trium aequationum hujus formae:

1) $F(u, x, y, z\ t, p) = \psi[f(u, x, y, z, t, p), \overset{1}{f}(u, x, y, z, t, p)]$

2) $\overset{1}{F}(u, x, y, z, t, p) = \psi'[f(u, x, y, z, t, p)]$

3) $\overset{2}{F}(u, x, y, z, t, p) = \psi'[\overset{1}{f}(u, x, y, z, t, p)]$

Hae autem aequationes adhibitis iisdem ratiociniis, quae supra §. 5. explicata sunt, abeunt in has:

1) $F(u, x, y, z, p, q) = \psi[f(u, x, y, z, t, p, q), \overset{1}{f}(u, x, y, z, t, p, q), q]$

2) $\overset{1}{F}(u, x, y, z, t, p, q) = \psi'[f(u, x, y, z, t, p, q)]$

3) $\overset{2}{F}(u, x, y, z, t, p, q) = \psi'[\overset{1}{f}(u, x, y, z, t, p, q)]$

Deinde, sumendo primae aequationis differentiale completum, quantitate q etiam instar variabilis tractata, ac substituendo pro $\psi' f$, $\psi' \overset{1}{f}$ expressiones aequationum (2) et (3), tribus illis aequationibus accedit quarta, hujus formae:

4) $\overset{3}{F}(u, x, y, z, t, p, q) = \psi' q.$

Haec quidem iisdem omnino ratiociniis nituntur, quae supra §. 5. amplius demonstravimus, quaeque repetere superfluum est. Quibus igitur quatuor aequationibus absolvitur integratio aequationis propositae. Signis $F, \overset{1}{F}, \overset{2}{F}, \overset{3}{F}, \overset{r}{F}, f, \overset{1}{f}$ functiones datas, signo ψ functionem arbitrariam exprimi, ex superioribus constat (§. 3.).

§. 10.

Problema VII.

Aequationem differentiarum partialium inter quinque variabiles u, x, y, z, t complete integrare.

Solutio.

Sit $du = pdx + qdy + rdz + sdt$, tum datur relatio inter quatuor quotientes differentiales p, q, r, s, et quinque variabiles, ex qua quaeritur relatio inter has ipsas variabiles. Jam aequationem istam considerare licet, tanquam aequationem differentialem vulgarem inter octo variabiles u, x, y, z, t, p, q, r, exclusa quantitate s, quippe per reliquas data. Quae aequatio integranda est per systema quatuor aequationum, ex quibus deinceps eliminando p, q, r, prodit ipsa aequatio quaesita inter u, x, y, z, t. At vero ex praecedenti problemate constat, aequationem differentialem vulgarem inter septem variabiles integrari per systema quatuor aequationum: inde id agitur, ut aequatio nostra proposita transformetur in aequationem differentialem inter septem variabiles.

Quem in finem concipiamus, substitui pro x, y, z, u, p, q, r functiones quantitatis t et septem novarum quantitatum a, b, c, e, f, g, h; sitque

$$dx = Xdt + \chi da + \chi' db + \chi'' dt + \chi''' de + \chi^{iv} df + \chi^{v} dg + \chi^{vi} dh$$
$$dy = Ydt + \eta da + \eta' db \quad \ldots\ldots\ldots\ldots + \eta^{vi} dh$$
$$dz = Zdt + \zeta da + \zeta' db \quad \ldots\ldots\ldots\ldots + \zeta^{vi} dh$$
$$du = Udt + \upsilon da + \upsilon' db \quad \ldots\ldots\ldots\ldots + \upsilon^{vi} dh$$
$$dp = \mathfrak{P}dt + \pi da + \pi' db \quad \ldots\ldots\ldots\ldots + \pi^{vi} dh$$
$$dq = \mathfrak{Q}dt + q da + q' db \quad \ldots\ldots\ldots\ldots + q^{vi} dh$$
$$dr = \mathfrak{R}dt + r da + r' db \quad \ldots\ldots\ldots\ldots + r^{vi} dh$$

Sit porro $ds =$

$$s'dx + s''dy + s'''dz + s^{iv}dt + s^{v}du + s^{vi}dp + s^{vii}dq + s^{viii}dr,$$

ubi $s', s'', s''', \ldots s^{viii}$, sicuti ipsa s, sunt functiones datae $\tau\tilde{\omega}\nu$ x, y, z, t, u, p, q, r.

Jam aequatio $du = pdx + qdy + rdz + sdt$ in hanc transmutatur:

$o = pX$	$dt + p\chi$	$da + p\chi'$	$db + \ldots\ldots + p\chi^{vi}$	$dh.$
$+ qY$	$+ q\eta$	$+ q\eta'$	$+ q\eta^{vi}$	
$+ rZ$	$+ r\zeta$	$+ r\zeta'$	$+ r\zeta^{vi}$	
$+ s$				
$- U$	$- \upsilon$	$- \upsilon'$	$- \upsilon^{vi}$	

Ex hac eliminare oportet dt et t. Quare ponendum est

1) $U = pX + qY + rZ + s$.

Deinde quotiens $\dfrac{dt(\upsilon - p\chi - q\eta - r\zeta)}{\upsilon - p\chi - q\eta - r\zeta}$

valorem eundem servare debet, si loco litterarum $\upsilon, \chi, \eta, \zeta$, eaedem indicibus I, II, ... VI, notatae supponantur.

Est autem $d^t(\upsilon - p\chi - q\eta - r\zeta) =$

$$d^t\upsilon - pd^t\chi - qd^t\eta - rd^t\zeta - \chi d^tp - \eta d^tq - \zeta d^tr$$
$$= d^aU - pd^aX - qd^aY - rd^aZ - \chi d^tp - \eta d^tq - \zeta d^tr$$
$$= \begin{cases} d^a(U - pX - qY - rZ) \\ + Xd^ap + Yd^aq + Zd^ar \end{cases} - \chi d^tp - \eta d^tq - \zeta d^tr$$
$$= d^as + Xd^ap + Yd^aq + Zd^ar - \chi d^tp - \eta d^tq - \zeta d^tr.$$

Est autem $d^ap = \pi$, $d^aq = q$, $d^ar = r$,

$$d^as = s'd^ax + s''d^ay + s'''d^az + s^{v}d^au + s^{vi}d^ap + s^{vii}d^aq + s^{viii}d^ar$$
$$= s'\chi + s''\eta + s'''\zeta + s^{v}\upsilon + s^{vi}\pi + s^{vii}q + s^{viii}r;$$

porro $d^tp = \mathfrak{P}$, $d^tq = \mathfrak{Q}$, $d^tr = \mathfrak{R}$.

Hinc fit $\dfrac{d^t(\upsilon - p\chi - q\eta - r\zeta)}{\upsilon - p\chi - q\eta - r\zeta}$

$$= \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} s' & \chi + s'' & \eta + s''' & \zeta + s^{v}.\upsilon + s^{vi} & \pi + s^{vii} & q + s^{viii} & r \\ -\mathfrak{P} & -\mathfrak{Q} & -\mathfrak{R} & +X & +Y & +Z & \end{array}}{\upsilon - p\chi - q\eta - r\zeta}$$

ex qua fractione exeunt litterae $\chi, \eta, \zeta, \upsilon$, nec non π, q, r, si hae assumantur aequationes:

2) $s' - \mathfrak{P} = -s^{v}.p$
3) $s'' - \mathfrak{Q} = -s^{v}.q$
4) $s''' = \mathfrak{R} = -s^{v}.r$

$$5)\ s^{vi} + X = o$$
$$6)\ s^{vii} + Y = o$$
$$7)\ s^{viii} + Z = o$$

Hinc fit
$$X = -s^{vi}$$
$$Y = -s^{vii}$$
$$Z = -s^{viii}$$
$$\mathfrak{P} = s' + s^{v}.p$$
$$\mathfrak{Q} = s'' + s^{v}.q$$
$$\mathfrak{R} = s''' + s^{v}.r$$

Tandem prodit ex (1) $U = pX + qY + rZ + s$
$$= s - ps^{vi} - qs^{vii} - rs^{viii}$$

Qua igitur ratione septem quantitates X, Y, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, U, tanquam functiones datae τῶν x, y, z, u, p, q, r, t, expressae sunt.

Quodsi nunc, suppositis a, b, c, e, f, g, h constantibus, ex aequationibus auxiliaribus

$$dx = Xdt$$
$$dy = Ydt$$
$$dz = Zdt$$
$$du = Udt$$
$$dq = \mathfrak{P}dt$$
$$dq = \mathfrak{Q}dt$$
$$dr = \mathfrak{R}dt$$

quaerantur valores τῶν x, y, z, u, p, q, r per t et septem constantes arbitrarias integratione ingressas a, b, c, e, f, g, h, expressi (§. 2.): tum hic ipsi valores, sumtis eorum differentialibus completis, tractando constantes praedictas tanquam variabiles, conditionem praescriptam adimplebunt, i. e. iisdem pro x, y, z, u, p, q, r, substitutis aequatio proposita

$$du = pdx + qdy + rdz + sdt$$

abitum est in aequationem, quae exclusis t et dt, tantum septem quantitates a, b, c, e, f, g, h, earumque differentialia comprehendet. Jam hujus aequationis transformatae integratio ex praecedenti problemate (§. 9.) his quatuor aequationibus absolvitur:

1) $F(a, b, c, e, f, g, h) = \psi[f(a, \ldots h), \overset{1}{f}(a, \ldots, h), h]$

2) $\overset{1}{F}(a, \ldots . h) = \psi[f(a, \ldots h)]$

3) $\overset{2}{F}(a, \ldots . h) = \psi[\overset{1}{f}(a, \ldots h)]$

4) $\overset{3}{F}(a, \ldots . h) = \psi h.$

Quod si nunc quantitates a, b, c, e, f, g, h per x, y, z, u, p, q, r et per t expressae concipiantur, hae quatuor aequationes has formas induent:

1) $F(x, y, z, t, u, p, q, r) = \psi[f(x, \ldots r), \overset{1}{f}(x, \ldots r), \overset{2}{f}(x, \ldots, r)]$

2) $\overset{1}{F}(x, \ldots r) = \psi[f(x, \ldots r)]$

3) $\overset{2}{F}(x, \ldots r) = \psi[\overset{1}{f}(x, \ldots r)]$

4) $\overset{3}{F}(x, \ldots r) = \psi(\overset{2}{f}(x, \ldots r)]$

ex quibus, tres quotientes differentiales p, q, r, eliminatos concipiendo, prodit aequatio inter ipsas variabiles x, y, z, t, u; quae est ipsa integratio desiderata, et quidem completa, ob functionem arbitrariam trium quantitatum.

§. 11.

Problema VIII.

Aequationem differentialem vulgarem quamcunque inter octo variabiles per systema quatuor aequationum integrare.

Solutio.

Sit aequatio proposita inter octo variabiles u, x, y, z, t, p, q, r, haec:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdt + Tdp + Udq + Wdr.$$

Cum P, Q, ... W sint functiones datae τῶν x, y, ... r, ponendum est

$$dP = P'dx + P''dy + P'''dz + P^{iv}dt + P^{v}dp + P^{vi}dq + P^{vii}dr + P^{viii}du;$$

et simili modo dQ, dR, ... dW exprimere licet, ubi

$$P', P'', \ldots P^{viii}; \quad Q', \ldots Q^{viii}; \quad R', \ldots R^{viii}; \quad \ldots . \quad W', \ldots W^{viii}$$

functiones sunt itidem datae. Jam cum ex problemate (6) §. 9. aequatio differentialis inter septem variabiles per systema quatuor aequationum integrabilis sit, nil aliud requiritur, quam transformatio aequationis propositae in aequationem inter septem variabiles, quae sint a, b, ... h. Quem in finem ponamus, more hactenus servato,

$$dx = Xdu + \chi da + \chi' db + \ldots . + \chi^{vi}dh$$

$$dy = Ydu + \eta da + \ldots . \ldots .$$

$$dz = Zdu + \zeta da + \ldots . \ldots .$$

$$dt = \mathfrak{T}du + \tau da + \ldots$$
$$dp = \mathfrak{P}du + \pi da + \ldots$$
$$dq = \mathfrak{Q}du + qda + \ldots$$
$$dr = \mathfrak{R}du + rda + \ldots$$

Tum aequatio proposita in hanc abit:

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
o = PX & du + P\chi & da + P\chi' & db \ldots + P\chi^{vi} & dh \\
+QY & +Q\eta & +Q\eta' & +Q\eta^{vi} & \\
+RZ & +R\zeta & +R\zeta' & +R\zeta^{vi} & \\
+S\mathfrak{T} & +S\tau & +S\tau' & +S\tau^{vi} & \\
+T\mathfrak{P} & +T\pi & +T\pi' & +T\pi^{vi} & \\
+U\mathfrak{Q} & +Uq & +Uq' & +Uq^{vi} & \\
+W\mathfrak{R} & +Wr & +Wr' & +Wr^{vi} & \\
-1 & & & &
\end{array}$$

Quae aequatio ut a du et u liberetur, ponendum est

$$1) \quad 1 = PX + QY + RZ + S\mathfrak{T} + T\mathfrak{P} + U\mathfrak{Q} + W\mathfrak{R}$$

Deinde quotiens $\dfrac{d^n(P\chi + Q\eta + R\zeta + S\tau + T\pi + Uq + Wr)}{P\chi + Q\eta + R\zeta + S\tau + T\pi + Uq + Wr}$

valorem eundem servare debet, ponendo

$\chi', \eta', \ldots r; \ldots \chi^{vi}, \eta^{vi}, \ldots r^{vi}$ pro $\chi, \eta, \ldots r$.

Est autem numerator

$$= \begin{cases} Pd^n\chi + Qd^n\eta + Rd^n\zeta + Sd^n\tau + Td^n\pi + Ud^nq + Wd^nr \\ +\chi d^nP + \eta d^nQ + \zeta d^nR + \tau d^nS + \pi d^nT + qd^nU + rd^nW \end{cases}$$

$$= \begin{cases} Pd^nX + Qd^nY + Rd^nZ + Sd^n\mathfrak{T} + Td^n\mathfrak{P} + Ud^n\mathfrak{Q} + Wd^n\mathfrak{R} \\ +\chi d^nP + \eta d^nQ + \zeta d^nR + \tau d^nS + \pi d^nT + qd^nU + rd^nW \end{cases}$$

$$= \begin{cases} d^n(PX + QY + RZ + S\mathfrak{T} + T\mathfrak{P} + U\mathfrak{Q} + W\mathfrak{R}) \\ -Xd^nP - Yd^nQ - Zd^nR - \mathfrak{T}d^nS - \mathfrak{P}d^nT - \mathfrak{Q}d^nU - \mathfrak{R}d^nW \\ +\chi d^nP + \eta d^nQ + \zeta d^nR + \tau d^nS + \pi d^nT + qd^nU + rd^nW, \end{cases}$$

ubi prima pars ex aequatione (1) evanescit. Et porro

$$d^nP = P'd^nx + P''d^ny + P'''d^nz + P^{iv}d^nt + P^vd^np + P^{vi}d^nq + P^{vii}d^nr$$
$$= P'\chi + P''\eta + P'''\zeta + P^{iv}\tau + P^v\pi + P^{vi}q + P^{vii}r;$$

$$d^nP = P'd^nx + P''d^ny + P'''d^nz + P^{iv}d^nt + P^vd^np + P^{vi}d^nq + P^{vii}d^nr + P^{viii}$$
$$= PX + P'Y + P''Z + P'''\mathfrak{T} + P^{iv}\mathfrak{P} + P^v\mathfrak{Q} + P^{vi}\mathfrak{R} + P^{vii};$$

simili modo exprimuntur d^aQ, d^aR, ... d^aW, nec non d^uQ, d^uR, ... d^uW. Hinc numerator praedictus fit

$$
\begin{array}{l|l|l|l|}
= P'X - XP' & \chi + Q'X - XP'' & \eta + R'X - XP''' & \zeta + S'X - XP^{IV} \\
+ P''Y - YQ' & + Q''Y - YQ'' & + R''Y - YQ''' & + S''Y - YQ^{IV} \\
+ P'''Z - ZR' & + Q'''Z - ZR'' & + R'''Z - ZR'''' & + S'''Z - ZR^{IV} \\
+ P^{IV}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}S' & + Q^{IV}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}S'' & + R^{IV}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}S''' & + S^{IV}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}S^{IV} \\
+ P^{V}\mathfrak{P} - \mathfrak{P}T' & + Q^{V}\mathfrak{P} - \mathfrak{P}T'' & + R^{V}\mathfrak{P} - \mathfrak{P}T''' & + S^{V}\mathfrak{P} - \mathfrak{P}T^{IV} \\
+ P^{VI}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}U' & + Q^{VI}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}U'' & + R^{VI}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}U''' & + S^{VI}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}U^{IV} \\
+ P^{VII}\mathfrak{R} - \mathfrak{R}W' & + Q^{VII}\mathfrak{R} - \mathfrak{R}W'' & + R^{VII}\mathfrak{R} - \mathfrak{R}W''' & + S^{VII}\mathfrak{R} - \mathfrak{R}W^{IV} \\
+ P^{VIII} & + Q^{VIII} & + R^{VIII} & + S^{VIII}
\end{array} \Big| \tau
$$

$$
\begin{array}{l|l|l|}
+ T'X - XP^{V} & \pi + U'X - YP^{VI} & \varrho + W'X - XP^{VII} \\
+ T''Y - YQ^{V} & + U''Y - YQ^{VI} & + W''Y - YQ^{VII} \\
+ T'''Z - ZR^{V} & + U'''Z - ZR^{VI} & + W'''Z - ZR^{VII} \\
+ T^{IV}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}S^{V} & + U^{IV}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}S^{VI} & + W^{IV}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}S^{VII} \\
+ T^{V}\mathfrak{P} - \mathfrak{P}T^{V} & + U^{V}\mathfrak{P} - \mathfrak{P}T^{VI} & + W^{V}\mathfrak{P} - \mathfrak{P}T^{VII} \\
+ T^{VI}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}U^{V} & + U^{VI}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}U^{VI} & + W^{VI}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}U^{VII} \\
+ T^{VII}\mathfrak{R} - \mathfrak{R}W^{V} & + U^{VII}\mathfrak{R} - \mathfrak{R}W^{VI} & + W^{VII}\mathfrak{R} - \mathfrak{R}W^{VII} \\
+ T^{VIII} & + U^{VIII} & + W^{VIII}
\end{array} \Big| \sigma
$$

Qui numerator si ad formam

$$M\,(P\chi + Q\eta + R\zeta + S\tau + T\pi + Uq + Wr)$$

revocetur, eraditio praedicta adimplebitur. Inde autem haec sequuntur sex aequationes:

2) $o =$

$$
\left\{
\begin{array}{l|l|l|}
P^{VIII}Q - P(Q' - P'')X + Q(P'' - Q')Y + Q(P''' - R') & Z + Q(P^{IV} - S') & \\
- PQ^{VIII} \qquad\qquad - P(Q''' - R'') & - P(Q^{IV} - S'') & \mathfrak{T} \\
\hline
+ Q(P^{V} - T') & \mathfrak{P} + Q(P^{VI} - U') & \mathfrak{Q} + Q(P^{VII} - W') \\
- P(Q^{V} - T'') & - P(Q^{VI} - U'') & - P(Q^{VII} - W'') \\
\end{array} \Big| \mathfrak{R}
\right.
$$

3) $o =$

$$
\left\{
\begin{array}{l|l|l|}
RP^{VIII} - P(R' - P''')X + R(P'' - Q) & Y + R(P''' - R'')Z + R(P^{IV} - S') & \\
- PR^{VIII} \qquad\qquad - P(R'' - Q''') & \qquad\qquad - P(R^{IV} - S'') & \mathfrak{T} \\
\hline
+ R(P^{V} - T') & \mathfrak{P} + R(P^{VI} - U') & \mathfrak{Q} + R(P^{VII} - W') \\
- P(R^{V} - T'') & - P(R^{VI} - U'') & - P(R^{VII} - W'') \\
\end{array} \Big| \mathfrak{R}
\right.
$$

4) $o =$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l} SP^{viii} - P(S' - P^{iv})X + S(P'' - Q') & Y + S(P''' - R') & Z + S(P^{iv} - S') & \mathfrak{T} \\ -PS^{viii} \qquad\qquad -P(S'' - Q^{iv}) & -P(S''' - R^{iv}) & & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l} +S(P^{v} - T') & \mathfrak{P} + S(P^{vi} - U') & \mathfrak{Q} + S(P^{vii} - W') & \mathfrak{R} \\ -P(S^{v} - T^{iv}) & -P(S^{vi} - U^{iv}) & -P(S^{vii} - W^{iv}) & \end{array}\right.$$

5) $o =$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l} TP^{viii} - P(T' - P^{v})X + T(P'' - Q') & Y + T(P''' - R') & Z + T(P^{iv} - S') & \mathfrak{T} \\ -PT^{viii} \qquad\qquad -P(T'' - Q^{v}) & -P(T''' - R^{v}) & -P(T^{iv} - S^{v}) & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l} +T(P^{v} - T')\,\mathfrak{P} + T(P^{vi} - U') & \mathfrak{Q} + T(P^{vii} - W') & \mathfrak{R} \\ -P(T^{vi} - U^{v}) & -P(T^{vii} - W^{v}) & \end{array}\right.$$

6) $o =$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l} UP^{viii} - P(U' - P^{vi})X + U(P'' - Q') & Y + U(P''' - R') & Z + U(P^{iv} - S') & \mathfrak{T} \\ -PU^{viii} \qquad\qquad -P(U'' - Q^{vi}) & -P(U''' - R^{vi}) & -P(U^{iv} - S^{vi}) & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l} +U(P^{v} - T') & \mathfrak{P} + U(P^{vi} - U')\,\mathfrak{Q} + U(P^{vii} - W' & \mathfrak{R} \\ -P(U^{v} - T^{vi}) & -P(U^{vii} - W^{vi}) & \end{array}\right.$$

7) $o =$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l} WP^{viii} - P(W' - P^{vii})X + W(P'' - Q') & Y + W(P''' - R') & Z + W(P^{iv} - S') & \mathfrak{T} \\ -PW^{viii} \qquad\qquad -P(W'' - Q^{vii}) & -P(W''' - R^{vii}) & -P(W^{iv} - S^{vii}) & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l|l|l} +W(P^{v} - T') & \mathfrak{P} + W(P^{vi} - U') & \mathfrak{Q} + W(P^{vii} - W')\,\mathfrak{R} \\ -PW^{v} - T^{viii}) & -P(W^{vi} - U^{viii}) & \end{array}\right.$$

Ex his sex aequationibus, junctis cum prima (1), determinandae sunt septem quantitates X, Y, Z, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$. Qua determinatione supposita, (quae quidem ex regulis eliminationis vulgaribus calculos admodum longos poscit, de quorum compendiis infra sermo erit), istae quantitates habendae sunt pro functionibus datis octo nostrarum variabilium. Quod si nunc, suppositis a, b, c, ... h constantibus, ex septem aequationibus auxiliaribus:

$$dx = X\,du$$
$$dy = Y\,du$$
$$dz = Z\,du$$
$$dt = \mathfrak{T}\,du$$

$$dp = \mathfrak{P}\,du$$
$$dq = \mathfrak{Q}\,du$$
$$dr = \mathfrak{R}\,du$$

variabiles x, y, z, t, p, q, r per u et septem constantes arbitrarias a, b, c, ... h integratione ingressas exprimantur (§. 11.), tum hae ipsae expressiones ita erunt comparatae, ut eas earumque differentialia completa, quantitatibus a, b, ... h, etiam instar variabilium habitis, in aequatione proposita substituendo, haec in aequationem inter septem variabiles a, b, c, ... h transformetur. Jam vero ex supra demonstratis hujus aequationis integratio quatuor aequationibus hujus formae absolvitur:

1) $F(a, b, \ldots h) = \psi[f(a, b, \ldots h), \overset{1}{f}(a, b, \ldots h), h]$
2) $\overset{1}{F}(a, b, \ldots h) = \psi'[f(a, b, \ldots h)]$
3) $\overset{2}{F}(a, b, \ldots h) = \psi'[\overset{1}{f}(a, b, \ldots h)]$.
4) $\overset{3}{F}(a, b, \ldots h) = \psi h$.

Quod si deinde a, b, ... h per octo variabiles x, y, ... n exprimantur, hae aequationes in has abiturae sunt:

1) $F(x, y, z, t, u, p, q, r) = \psi[f(x, \ldots r), \overset{1}{f}(x, \ldots r), \overset{2}{f}(x, \ldots r)]$
2) $\overset{1}{F}(x, \ldots r) = \psi'[f(x, \ldots r)]$
3) $\overset{2}{F}(x, \ldots r) = \psi'[\overset{1}{f}(x, \ldots r)]$
4) $\overset{3}{F}(x, \ldots r) = \psi'[\overset{2}{f}(x, \ldots r)]$

quarum systemate integratio completa aequationis propositae inter octo variabiles exhibetur.

§. 12.

Problema IX.

Aequationem differentialem vulgarem inter novem variabiles per systema quinque aequationum integrare.

Solutio.

Sit aequatio proposita inter novem variabiles u, x, y, z, t, p, q, r, s, haec:

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dt + T\,dp + U\,dq + W\,dr + \mathfrak{X}\,ds.$$

Considerando unam harum quantitatum, veluti s, tanquam constantem, aequa-

tio abit in aequationem inter octo variabiles, eademque ex §. praecedente per systema quatuor aequationum integrabilis est. Quae aequationes ex ratiociniis supra §. 5 et 9 adhibitis et explicatis, has formas recipient:

1) $F(x, y, z, t, p, q, r, u, s) = \psi[f(x, y, \ldots s), \overset{1}{f}(x, \ldots s), \overset{2}{f}(x, \ldots s), s]$

2) $\overset{1}{F}(x, \ldots s) = \psi'[f(x, \ldots s)]$

3) $\overset{2}{F}(x, \ldots s) = \psi'[\overset{1}{f}(x, \ldots s)]$

4) $\overset{3}{F}(x, \ldots s) = \psi'[\overset{2}{f}(x, \ldots s)]$

Sumatur jam aequationis (1) differentiale completum, habita etiam s variabili, idque differentiale, substitutis pro ψf, $\psi \overset{1}{f}$, $\psi \overset{2}{f}$, valoribus ex aequationibus (2), (3), (4) cognitis, comparetur cum aequatione differentiali proposita, quacum illud identicum esse debet. Quibus rite observatis aequationibus quatuor prioribus accedet aequatio quinta hujus formae:

5) $\overset{4}{F}(x, \ldots s) = \psi s.$

Quarum quinque aequationum combinatione absolvitur integratio aequationis propositae.

§. 13.

Problema X.

Aequationem differentiarum partialium inter sex variabiles complete integrare.

Solutio.

Sit $du = pdx + qdy + rdz + sdt + wdv$, atque detur relatio inter quotientes differentiales p, q, r, s, w, et variabiles u, x, y, z, t, v, ex qua quaeritur relatio inter has ipsas variabiles. Quem ad finem nil aliud requiritur, quam ut aequatio proposita, considerata tanquam aequatio differentialis vulgaris inter decem variabiles, transformetur in aequationem inter novem variabiles, quippe cujus integratio completa per quinque aequationes praecedenti §. inventa est. Ad hanc transformationem obtinendam, in calculum introductis novem quantitatibus notis a, b, c, ... h, i, k, more hactenus servato ponamus:

$$dx = Xdv + \chi da + \ldots\ldots + \chi^{(m)} dk,$$
$$dy = Ydv + \eta da + \ldots\ldots$$

$$dz = Z dv + \zeta da + \ldots$$
$$dt = \mathfrak{T} dv + \tau da + \ldots$$
$$du = U dv + u da + \ldots$$
$$dp = \mathfrak{P} dv + \pi da + \ldots$$
$$dq = \Omega dv + q da + \ldots$$
$$dr = \mathfrak{R} dv + r da + \ldots$$
$$ds = \mathfrak{S} dv + s da + \ldots$$

Sit porro, w considerando tanquam functionem datam variabilium et reliquorum quotientium differentialium,

$$dw = \begin{cases} w' dx + w'' dy + w''' dz + w^{iv} dt + w^{v} dv + w^{vi} du + w^{vii} dp \\ + w^{viii} dq + w^{ix} dr + w^{x} ds. \end{cases}$$

Tum aequatio $dv = p dx + q dy + r dz + s dt + w dv$, in hanc abit:

$$\begin{array}{rl|l|l|l} o = & pX & dv + p\chi & da + p\chi' & db + \ldots \\ & + qY & + q\eta & + q\eta' & \\ & + rZ & + r\zeta & + r\zeta' & \\ & + s\mathfrak{T} & + s\tau & + r\tau' & \\ & + w & & & \\ & - U & - u & - u' & \end{array}$$

Quo nunc ex haec aequatione dv et v exeant, ponendum est

1) $pX + qY + rZ + rZ + s\mathfrak{T} + w = U$

Deinde debet esse $\dfrac{d^{v}(p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - u)}{p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - u}$

$$= \frac{d^{v}(p\chi' + q\eta' + r\zeta' + s\tau' - u')}{p\chi' + q\eta' + r\zeta' + s\tau' - u'} = \text{etc.} \ldots$$

Est autem $d^{v}(p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - u)$

$$= p d^{v}\chi + q d^{v}\eta + r d^{v}\zeta + s d^{v}\tau - d^{v}u + \chi d^{v}p + \eta d^{v}q + \zeta d^{v}r + \tau d^{v}s$$
$$= p d^{v}X + q d^{v}Y + r d^{v}Z + s d^{v}\mathfrak{T} - d^{v}U + \chi d^{v}p + \eta d^{v}q + \zeta d^{v}r + \tau d^{v}s$$
$$= \begin{cases} d^{v}(pX + qY + rZ + s\mathfrak{T} - U) \\ - X d^{v}p - Y d^{v}q - Z d^{v}r - \mathfrak{T} d^{v}s + \chi d^{v}p + \eta d^{v}q + \zeta d^{v}r + \tau d^{v}s \end{cases}$$
$$= d^{v}w - X d^{v}p - Y d^{v}q - Z d^{v}r - T d^{v}s + \chi d^{v}p + \eta d^{v}q + \zeta d^{v}r + \tau d^{v}s$$

Est porro $d^{v}p = \pi$, $d^{v}q = q$, $d^{v}r = r$, $d^{v}s = s$;

$$d^{v}w = \begin{cases} w' d^{v}x + w'' d^{v}y + w''' d^{v}z + w^{iv} d^{v}t + w^{v} d^{v}u + w^{vi} d^{v}p \\ + w^{vii} d^{v}q + w^{ix} d^{v}r + w^{x} d^{v}s \end{cases}$$

$= w'\chi + w''\eta + w'''\zeta + w^{iv}\tau + w^{v}\upsilon + w^{vi}\pi + w^{vii}q + w^{viii}r + w^{ix}s;$
$d^{v}p = \mathfrak{P},\ d^{v}q = \mathfrak{Q},\ d^{v}r = \mathfrak{R},\ d^{v}s = \mathfrak{S}.$

Hinc fit $d^{v}(p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - u)$

$$= \left\{ \begin{array}{llllll} -w' & \chi - w'' & \eta - w''' & \zeta - w^{iv} & \tau - w^{vi}, & u - w^{vii} \\ +\mathfrak{P} & +\mathfrak{Q} & +\mathfrak{R} & +\mathfrak{S} & & -X \end{array} \right| \begin{array}{l} \pi \\ \\ \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{lll} -w^{viii} & q - w^{ix} & r - w^{x} \\ -Y & -Z & -\mathfrak{T} \end{array} \right| s$$

Quod ponendo $= M(p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - u)$, hae prodeunt aequationes:

2) $X + w^{vii} = 0$
3) $Y + w^{viii} = 0$
4) $Z + w^{ix} = 0$
5) $\mathfrak{T} + w^{x} = 0$
6) $\mathfrak{P} - w' = p w^{vii}$
7) $\mathfrak{Q} - w'' = q w^{vii}$
8) $\mathfrak{R} - w''' = r w^{vii}$
9) $\mathfrak{S} - w^{iv} = s w^{vii}$

Quibus aequationibus junctis cum prima (1) hi prodeunt valores novem quantitatum X, Y, Z, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, U,

1) $X = -w^{vii}$
2) $Y = -w^{viii}$
3) $Z = -w^{ix}$
4) $\mathfrak{T} = -w^{x}$
5) $\mathfrak{P} = w' + p w^{vii}$
6) $\mathfrak{Q} = w'' + q w^{vii}$
7) $\mathfrak{R} = w''' + r w^{vii}$
8) $\mathfrak{S} = w^{iv} + s w^{vii}$
9) $U = w - p w^{vii} - q w^{viii} - r w^{ix} - s w^{x}.$

Jam ex aequationibus auxiliaribus

$dx = X dv$
$dy = Y dv$
$dz = Z dv$
$dt = \mathfrak{T} dv$
$du = U dv$

dp

$$dp = \mathfrak{P}\,dv$$
$$dq = \mathfrak{Q}\,dv$$
$$dr = \mathfrak{R}\,dv$$
$$ds = \mathfrak{S}\,dv$$

definiendi sunt valores $\tau\tilde{\omega}\nu$ x, y, z, t, u, p, q, r, s per v et novem constantes arbitrarias a, b, ... k expressi. Quas deinceps expressiones complete differentiando, ipsis etiam constantibus variabilium instar habitis, substitutione quantitatum et differentialium facta aequatio proposita transformabitur in aequationem inter novem variabiles a, b, c, ... k. Hujus autem aequationis integrale completum ex problemate (IX) derivandum est. Tumque quantitates a, b, c, ... k per variabiles x, y, z, t, u, p, q, r, s, v, exprimendo, integratio quinque aequationibus hujus formae exhibebitur:

1) $F(x, y, z, t, u, v, p, q, r, s) = \psi[f(x, \ldots s), \overset{1}{f}(x, \ldots s), \overset{2}{f}(x, \ldots s), \overset{3}{f}(x, \ldots s)]$,
2) $\overset{1}{F}(x, \ldots s) = \psi[f(x, \ldots s)]$
3) $\overset{2}{F}(x, \ldots s) = \psi[\overset{1}{f}(x, \ldots s)]$
4) $\overset{3}{F}(x, \ldots s) = \psi[\overset{2}{f}(x, \ldots s)]$
5) $\overset{4}{F}(x, \ldots s) = \psi[\overset{3}{f}(x, \ldots s)]$

ex quibus, quotientes differentiales p, q, r, s, eliminatos concipiendo, prodit aequatio quaesita inter ipsas variabiles x, y, z, t, u, v.

§. 14.

Problema XI.

Aequationem differentialem inter decem variabiles per systema quinque aequationum integrare.

Solutio.

Sit aequatio proposita inter decem variabiles u, x, y, z, t, p, q, r, v, w, haec:

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dt + T\,dp + U\,dq + W\,dr + \mathfrak{X}\,dv + \mathfrak{Y}\,dw.$$

Ad quam per systema quinque aequationum integrandum requiritur, ut eadem transformetur in aequationem inter novem variabiles, quippe quam per tale systema integrabilem esse ex §. 12. constat. Haec transformatio eadem methodo perficitur, qua hactenus usi sumus. Ponatur nimirum

$$dx = Xdu + \chi da + \ldots + \chi^{viii} dk$$
$$dy = Ydu + \eta da + \ldots\ldots$$
$$dz = Zdu + \zeta da + \ldots\ldots$$
$$dt = \mathfrak{T}du + \tau da + \ldots\ldots$$
$$dp = \mathfrak{P}du + \pi da + \ldots\ldots$$
$$dq = \mathfrak{Q}du + qda + \ldots\ldots$$
$$dr = \mathfrak{R}du + rda + \ldots\ldots$$
$$dv = \mathfrak{V}du + \upsilon da + \ldots\ldots$$
$$dw = \mathfrak{W}du + \omega da + \ldots\ldots$$

Iis valoribus in aequatione proposita substitutis, prodit aequatio inter u et novem quantitates in calculum introductas a, b, ..., k. Quae nunc aequatio ab u et du liberanda est. Quem in finem formentur ratione hactenus adhibita novem aequationes conditionales, ex quibus quantitates X, Y, Z, ... $\mathfrak{W}$ tanquam functiones quantitatum x, y, ... w, u determinare licet. Qua determinatione inventa formentur hae aequationes auxiliares

$$dx = Xdu$$
$$dy = Ydu$$
$$\ldots\ldots$$
$$dw = \mathfrak{W}du$$

ex iisque x, y, ... w per u et novem constantes arbitrarias a, b, c, ... k exprimantur; tumque his expressionibus complete differentiatis, constantibus etiam variatis, per substitutionem aequatio proposita transformabitur in aequationem differentialem inter novem quantitates a, b, ... k. Quam ex problemate (IX) §. 12. integrando, tumque loco quantitatum a, b, ... k earundem expressiones per ipsas decem variabiles x, y, ... w, u substituendo, integratio aequationis propositae quinque aequationibus hujus formae absolvetur:

1) $F(x,y,z,t,p,q,r,v,w,u) = \psi[f(x,\ldots u), \overset{1}{f}(x,\ldots u), \overset{2}{f}(x,\ldots u), \overset{3}{f}(x,\ldots u)]$

2) $\overset{1}{F}(x,\ldots u) = \psi'[f(x,\ldots u)]$

3) $\overset{2}{F}(x,\ldots u) = \psi'[\overset{1}{f}(x,\ldots u)]$

4) $\overset{3}{F}(x,\ldots u) = \psi'[\overset{2}{f}(x,\ldots u)]$

5) $\overset{4}{F}(x,\ldots u) = \psi'[\overset{3}{f}(x,\ldots u)]$

ubi signis $F, \overset{1}{F}, \ldots \overset{4}{F}, f, \overset{2}{f}, \ldots \overset{3}{f}$, functiones notas, signo ψ functionem arbitrariam designari, nec non quomodo signum ψ' in quavis aequationum (2) — (5) accipiendum sit, ex §. 3. constat.

§. 15.

Ex casibus hactenus expositis progressus ulterior ad quotcunque variabiles satis superque manifestus est; indeque sequitur integratio completa aequationum differentiarum partialium primi ordinis inter quotcunque variabiles; nec minus evidens est, eadem methodo aequationes differentiales vulgares itidem primi ordinis inter $2m$ et $2m-1$ variabiles per systema m aequationum integrabiles esse.

Cum vero haec solutio poscat transformationem aequationis differentialis inter $2m$ variabiles in aequationem inter $2m+1$ variabiles, ostendendum restat, qua lege haec transformatio generaliter sit instituenda. Duo hic problemata discernenda videntur, alterum speciale, alterum generale. Primo quidem aequatio differentiarum partialium inter m variabiles, considerata tanquam aequatio differentialis vulgaris inter $2m-2$ variabiles ad aequationem inter $2m-3$ variabiles revocanda est. Deinde generaliter aequatio quaecunque differentialis primi ordinis inter $2m$ variabiles in aequationem inter $2m-1$ variabiles transformanda est. Priorem reductionem seorsim exponere convenit, quoniam ea calculo satis compendioso per formulas simplicissimas peragitur. Transformatio contra generalior calculos complicatiores postulat, quorum legem magis absconditam illustrare operae pretium esse videtur.

Quae modo dicta problematis duobus sequentibus absolvuntur.

§. 16.

Problema XII.

Aequationem differentiarum partialium inter $n+1$ variabiles ad aequationem differentialem vulgarem inter $2n-1$ variabiles reducere.

Solutio.

Designentur n variabiles literis $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \overset{3}{x}, \ldots \overset{n}{x}$, et $n+1^{ta}$, quae tanquam harum functio consideratur, littera z. Sint porro quotientes differentiales $\tau\tilde{\varepsilon}\ z$, secundum istas variabiles accepti, $= \overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p} \ldots \overset{n}{p}$, eritque

$$dz = \overset{1}{p}d\overset{1}{x} + \overset{2}{p}d\overset{2}{x} + \overset{3}{p}d\overset{3}{x} \ldots + \overset{n}{p}d\overset{n}{x}.$$

Jam cum detur relatio inter quotientes differentiales et ipsas variabiles, assumere licet $\overset{n}{p}$ tanquam functionem datam $\tau\tilde{\omega}\nu$

$$\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots, \overset{n}{x}, z, \text{ et } \overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \ldots \overset{n-1}{p}.$$

Sit igitur $\overset{n}{p} = \varphi\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \overset{3}{x}, \ldots \overset{n}{x}, z, \overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \ldots \overset{n-1}{p}\right)$,

tum erit ex La Grangii notandi ratione

$$\overset{n}{dp} = \varphi'\overset{1}{x}.\overset{1}{dx} + \varphi'\overset{2}{x}.\overset{2}{dx} \ldots + \varphi'\overset{n}{x}.\overset{n}{dx} + \varphi' z.dz + \varphi'\overset{1}{p}.\overset{1}{dp} \ldots + \varphi'\overset{n-1}{p}.\overset{n-1}{dp},$$

ubi $\varphi'\overset{1}{x}, \varphi'\overset{2}{x} \ldots$ itidem sunt functiones datae.

Ponamus nunc more hactenus servato

$$\begin{aligned}
\overset{1}{dx} &= \overset{1}{X}\overset{n}{dx} + \overset{1}{A}da + \overset{1}{B}db + \overset{1}{C}dc + \ldots + \overset{1}{M}dm \\
\overset{2}{dx} &= \overset{2}{X}\overset{n}{dx} + \overset{2}{A}da + \overset{2}{B}db + \overset{2}{C}dc + \ldots \\
\overset{3}{dx} &= \overset{3}{X}\overset{n}{dx} + \overset{3}{A}da + \overset{3}{B}db + \overset{3}{C}dc + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overset{n-1}{dx} &= \overset{n-1}{X}\,dx + \overset{n-1}{A}\,da + \overset{n-1}{B}\,db + \overset{n-1}{C}\,dc + \ldots \\
dz &= Z\overset{n}{dx} + \overset{2}{\zeta}da + \overset{2}{\zeta}db + \overset{3}{\zeta}dc + \ldots \\
\overset{1}{dp} &= \overset{1}{P}\overset{n}{dx} + \overset{1}{\mathfrak{A}}da + \overset{1}{\mathfrak{B}}db + \overset{1}{\mathfrak{C}}dc + \ldots \\
\overset{2}{dp} &= \overset{2}{P}\overset{n}{dx} + \overset{2}{\mathfrak{A}}da + \overset{2}{\mathfrak{B}}db + \overset{2}{\mathfrak{C}}dc + \ldots \\
\overset{3}{dp} &= \overset{3}{P}\overset{n}{dx} + \overset{3}{\mathfrak{A}}da + \overset{3}{\mathfrak{B}}db + \overset{3}{\mathfrak{C}}dc + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overset{n-1}{dp} &= \overset{n-1}{P}\,dx + \overset{n-1}{\mathfrak{A}}\,da + \overset{n-1}{\mathfrak{B}}\,db + \overset{n-1}{\mathfrak{C}}\,dc + \ldots
\end{aligned}$$

tum aequatio proposita in hanc abit:

$$\begin{aligned}
0 = {} & \overset{1}{p}\overset{1}{X}\,\overset{n}{dx} + \overset{1}{p}\overset{1}{A}\,da + \overset{1}{p}\overset{1}{B}\,db + \overset{1}{p}\overset{1}{C}\,dc + \ldots \\
& + \overset{2}{p}\overset{1}{X}\,\overset{n}{dx} + \overset{2}{p}\overset{2}{A}\,da + \overset{2}{p}\overset{1}{B}\,db + \overset{2}{p}\overset{2}{C}\,dc \\
& + \overset{3}{p}\overset{3}{X}\,\overset{n}{dx} + \overset{3}{p}\overset{1}{A}\,da + \overset{3}{p}\overset{1}{B}\,db + \overset{3}{p}\overset{3}{C}\,dc \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \overset{n-1}{p}\overset{n-1}{X}\,\overset{n}{dx} + \overset{n-1}{p}\overset{n-1}{A}\,da + \overset{n-1}{p}\overset{n-1}{B}\,db + \overset{n-1}{p}\overset{n-1}{C}\,dc \\
& + \overset{n}{p}\,dx - Z\,\overset{n}{dx} - \overset{2}{\zeta}da - \overset{2}{\zeta}db - \overset{3}{\zeta}dc + \ldots
\end{aligned}$$

Quo nunc haec aequatio a dx et ab x liberetur, poni debet primo

$$Z = {}^{1}_{1}p{}^{1}_{1}X + {}^{2}_{2}p{}^{2}_{2}X + {}^{3}_{3}p{}^{3}_{3}X \ldots + {}^{n-1}_{n-1}p{}^{n-1}_{n-1}X + {}^{n}_{n}p.$$

Deinde quotiens $\dfrac{dx({}^{1}_{1}pA + {}^{2}_{2}pA \ldots + {}^{n-1}_{n-1}p{}^{n-1}_{n-1}A - \zeta)}{{}^{1}_{1}pA + {}^{2}_{2}pA \ldots + {}^{n-1}_{n-1}p{}^{n-1}_{n-1}A - \zeta}$

invariatus manere debet, litteram A cum B, C, D, ... nec non ζ cum $\zeta, \zeta, \zeta, \zeta$ etc. permutando. Est autem, brevitatis caussa differentialia secundum x simpliciter littera d designando,

$$d({}^{1}_{1}pA + {}^{2}_{2}pA \ldots + {}^{n-1}_{n-1}p{}^{n-1}_{n-1}A - \zeta)$$

$$= {}^{1}_{1}pd{}^{1}_{1}A + {}^{2}_{2}pd{}^{2}_{2}A \ldots + {}^{n-1}_{n-1}p{}^{n-1}_{n-1}dA - d\zeta + {}^{1}_{1}Adp + {}^{2}_{2}Adp \ldots + {}^{n-1}_{n-1}Adp$$

$$= {}^{1}_{1}pd{}^{1}_{1}X + {}^{2}_{2}pd{}^{2}_{2}X \ldots + {}^{n-1}_{n-1}p{}^{n-1}_{n-1}dX - dZ + {}^{1}_{1}Adp + {}^{2}_{2}Adp \ldots + {}^{n-1}_{n-1}Adp$$

$$= \left\{\begin{array}{l} d({}^{1}_{1}Xp + {}^{2}_{2}Xp \ldots + {}^{n-1}_{n-1}X{}^{n-1}_{n-1}p - Z) \\ -{}^{1}_{1}Xdp - {}^{2}_{2}Xdp \ldots - {}^{n-1}_{n-1}Xdp + {}^{1}_{1}Adp + {}^{2}_{2}Adp \ldots + {}^{n-1}_{n-1}Adp \end{array}\right.$$

$$= -d{}^{n}_{n}p - {}^{1}_{1}Xdp - {}^{2}_{2}Xdp \ldots - {}^{n-1}_{n-1}Xdp + {}^{1}_{1}Adp + {}^{2}_{2}Adp \ldots + {}^{n-1}_{n-1}Adp.$$

Est autem $d{}^{1}_{1}p = {}^{1}_{1}\mathfrak{A}$, $d{}^{2}_{2}p = {}^{2}_{2}\mathfrak{A}$, ... $d{}^{n-1}_{n-1}p = {}^{n-1}_{n-1}\mathfrak{A}$;

$$d{}^{n}_{n}p = \left\{\begin{array}{l} {}^{1}_{1}\varphi x.d{}^{1}_{1}x + {}^{2}_{2}\varphi x.d{}^{2}_{2}x \ldots + {}^{n-1}_{n-1}\varphi x.d{}^{n-1}_{n-1}x + \varphi z.dz \\ + {}^{1}_{1}\varphi p.d{}^{1}_{1}p + {}^{2}_{2}\varphi p.d{}^{2}_{2}p \ldots + {}^{n-1}_{n-1}\varphi p.d{}^{n-1}_{n-1}p \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} {}^{1}_{1}\varphi x.{}^{1}_{1}A + {}^{2}_{2}\varphi x.{}^{2}_{2}A \ldots + {}^{n-1}_{n-1}\varphi x.{}^{n-1}_{n-1}A + \varphi z.\zeta \\ {}^{1}_{1}\varphi p.{}^{1}_{1}\mathfrak{A} + {}^{2}_{2}\varphi p.{}^{2}_{2}\mathfrak{A} \ldots + {}^{n-1}_{n-1}\varphi p.{}^{n-1}_{n-1}\mathfrak{A}; \end{array}\right.$$

porro $d{}^{1}_{1}p = {}^{1}_{1}P$, $d{}^{2}_{2}p = {}^{2}_{2}P$, $d{}^{3}_{3}p = {}^{3}_{3}P$, ... $d{}^{n-1}_{n-1}p = {}^{n-1}_{n-1}P$.

Hinc fit $d({}^{1}_{1}pA + {}^{2}_{2}pA + \ldots + {}^{n-1}_{n-1}p{}^{n-1}_{n-1}A - \zeta) =$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l|l|l|l} -{}^{1}_{1}\varphi x & {}^{1}_{1}A - {}^{2}_{2}\varphi x & {}^{2}_{2}A \ldots - {}^{n-1}_{n-1}\varphi x & {}^{n-1}_{n-1}A - \varphi z.\zeta \\ +{}^{1}_{1}P & +{}^{2}_{2}P & +{}^{n-1}_{n-1}P & \end{array}\right| \\ \left.\begin{array}{l|l|l|l} -{}^{1}_{1}\varphi p & {}^{1}_{1}\mathfrak{A} - {}^{2}_{2}\varphi p & {}^{2}_{2}\mathfrak{A} \ldots - {}^{n-1}_{n-1}\varphi p & {}^{n-1}_{n-1}\mathfrak{A} \\ -{}^{1}_{1}X & -{}^{2}_{2}X & -{}^{n-1}_{n-1}X & \end{array}\right| \end{array}\right.$$

Conditio igitur quoad praedictum quotientem adimplebitur, si ponatur:

1) $X = -\varphi' p$

2) $X = -\varphi' p$

$n-1)$ $X = -\varphi' p$

$n)$ $P - \varphi' x = \varphi z \,.\, p$

sive $P = \varphi' x + p \,.\, \varphi z$

$n+1)$ $P = \varphi' x + p\varphi' z$

$n+2)$ $P = \varphi' x + p\varphi' z$

$2n-1)$ $P = \varphi' x + p \,.\, \varphi' z.$

Hinc fit ex aequatione priori

$$2n-1)\; Z = p - p\varphi' p - p\varphi' p \ldots - p\varphi' p .$$

Quare aequationes differentiales auxiliares hae sunt:

1) $dx = -\varphi' p \,.\, dx$

2) $dx = -\varphi' p \,.\, dx$

3) $dx = -\varphi' p \,.\, dx$

$n-1)$ $dx = -\varphi' p \,.\, dx$

$n)$ $dz = p - p\varphi' p - p\varphi' p \ldots - p\varphi' p) \,.\, dx$

$n+1)$ $dp = (\varphi' x + p\varphi' z)\, dx$

$n+2)$ $dp = (\varphi' x + p\varphi' z)\, dx$

$2n-1)$ $dp = (\varphi' x + p\varphi' z)\, dx$

Ex quibus integrando $x, x, \ldots x$, $z, p, p, \ldots p$ per x et $2n-1$ constantes arbitrarias a, b, c, e, ... exprimi debent (§. 2.). Quas deinceps expressiones

complete differentiando, (constantibus etiam variabilium instar habitis), et in aequatione proposita substituendo, haec in aequationem differentialem vulgarem inter praedictas $2n-1$ quantitates a, b, c, ... e, abit.

§. 17.

Problema XIII.

Aequationem differentialem vulgarem primi ordinis inter $2m$ variabiles in aequationem similem inter $2m-1$ variabiles transformare.

Solutio.

Ex solutionibus supra pro 4, 6, 8, 10 variabilibus traditis constat, $2m-1$ variabiles aequationis differentialis propositae tanquam functiones $2m^{tae}$ et $2m-1$ novarum quantitatum, illarum loco introducendarum, exprimendas esse. Quas quidem novas quantitates pro constantibus habendo, prodeunt $2m-1$ aequationes differentiales auxiliares, quarum integratio completa ipsas functiones desideratas suppeditat. At vero ad formandas hasce aequationes auxiliares requiruntur $2m-1$ quantitates, quarum valores per totidem aequationes conditionales determinantur. Haec determinatio, si consueta eliminandi methodo tractetur, calculos nimium complicatos et operosos postulat; ipsaque praecepta generalia, quae Bezout et Cramer de eliminatione tradiderunt, in casu substrato parum commodi afferre videntur. Accuratius vero considerando praedictas aequationes conditionales et formulas ex earum solutione actu evolutas, ad duas leges satis simplices easque generales perveni, quas hic breviter exponere sufficiat [h]).

Lex prima formationis aequationum differentialium auxiliarium

Inchoemus a casu primo quatuor variabilium, seu ab aequatione $dz = Pdx + Qdy + Rdp$, pro qua supra §. 4. evolvimus has aequationes auxiliares:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{PR^{IV} - RP^{IV} + R' - P'''}{PQ''' - P'''Q + QR' - Q'R + RP' - PR''},$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{QP^{IV} - PQ^{IV} + P'' - Q'}{PQ''' - P'''Q + QR' - Q'R + RP' - PR''},$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{RQ^{IV} - QR^{IV} + Q''' - R'}{PQ''' - P'''Q + QR' - Q'R + RP' - PR''}.$$

h) Harum legum, calculis haud parum molestis confirmatarum, demonstrationem nimis quidem prolixam hic omitto, quanquam breviorem eam reddi posse haud dubito.

Quo lex generalis evidentior fiat, aequatio differentialis propositi sub hac forma exhibeatur: $o = Ada + Bdb + Cdc + Ede$, ubi litterae a, b, c, e cum iis, per quas supra constantes ex integratione aequationum auxiliarium ingressas notavimus, haud permiscendae, indeque hae constantes aliis litteris e.g. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ vel $a, b, c, \ldots$ designandae sunt. Tum erunt $x, y, p, z = a, b, c, e$;

$$P = -\frac{A}{E},\ Q = -\frac{B}{E},\ R = -\frac{C}{E};$$

$$\text{hinc } PQ''' - P'''Q = \frac{PdQ - QdP}{dp} = \frac{P^2 d\frac{Q}{P}}{dp} = \frac{A^2}{E^2} \cdot \frac{d\frac{B}{A}}{dc} = \frac{AdB - BdA}{E^2 dc};$$

$$\text{simili modo est } QR' - Q'R = \frac{BdC - CdB}{E^2 da};$$

$$RP'' - PR'' = \frac{CdA - AdC}{E^2 db};\ PR^{IV} - RP^{IV} = \frac{AdC - CdA}{E^2 de};$$

$$R' - P''' = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dp} = \frac{-EdC + CdE}{E^2 da} + \frac{EdA - AdE}{E^2 dc}.$$

$$\text{Hinc fit } \frac{db}{de} = \frac{\frac{AdC - CdA}{de} + \frac{CdE - EdC}{da} + \frac{EdA - AdE}{dc}}{\frac{AdB - BdA}{de} + \frac{BdC - CdB}{da} + \frac{CdA - AdC}{db}}.$$

Simili modo exprimere licet $\frac{dc}{de}$ et $\frac{da}{de}$. Quod si nunc omisso termino Bdb fingatur aequatio: $o = Ada + Cdc + Ede$, notum est, conditionem integrabilitatis hujus aequationis, tanquam aequationis inter tres variabiles, duas independentes supponendo, hac aequatione exprimi: (Euler Calc. Integr. Vol. III. p. 6.)

$$o = \frac{AdC - CdA}{de} + \frac{CdE - EdC}{da} + \frac{EdA - AdE}{dc}$$

Hanc formulam integrabilitatis (quam hoc loco tantum compendii caussa in auxilium vocamus, tanquam expressionem analyticam notam et formatu facilem), designemus hoc charactere: (ACE). ubi ad ordinem litterarum A, C, E, respi-

respiciendum est, ita quidem ut sit

$$(AEC) = \frac{AdE - EdA}{dc} + \frac{EdC - CdE}{da} + \frac{CdA - AdC}{de} = -(ACE),$$

$$\text{et } (ECA) = \frac{EdC - CdE}{da} + \frac{CdA - AdC}{dc} + \frac{AdE - EdA}{dc} = -(ACE).$$

Simili modo denominator fractionis, qua $\frac{db}{de}$ exprimitur, signo (ABC) notandus est; indeque prodit $\frac{db}{dc} = \frac{(ACE)}{(ABC)}$, sive $o = \frac{db}{(ACE)} + \frac{de}{(ACB)}$.

In hac aequatione permutando invicem e et c, E et C (quoniam termini aequationis differentialis propositae ad lubitum transponi possunt), erit

$$o = \frac{db}{(AEC)} + \frac{dc}{(AEB)}, \text{ sive } o = \frac{db}{(ACE)} + \frac{dc}{(ABE)};$$

deinde in priori aequatione permutando e et a, E et A, fit

$$o = \frac{db}{(ECA)} + \frac{da}{(ECB)}, \text{ sive } o = \frac{db}{(ACE)} + \frac{da}{(BCE)}.$$

Inde aequationes tres auxiliares hanc formam induunt:

1) $o = \frac{db}{(ACE)} + \frac{dc}{(ABE)}$

2) $o = \frac{db}{(ACE)} + \frac{de}{(ACB)}$

3) $o = \frac{db}{(ACE)} + \frac{da}{(BCE)}$,

ubi observare licet, quod ex denominatore τῷ db, oriantur denominatores τῶν dc; de; et da; ponendo B pro C; E; A. Eaedem aequationes sub hac forma etiam exhiberi possunt:

1) $o = \frac{da}{(BCE)} + \frac{dc}{(BAE)}$

2) $o = \frac{da}{(BCE)} + \frac{dc}{(BCA)}$

3) $o = \frac{da}{(BCE)} + \frac{db}{(ACE)}$.

ubi nunc ex denominatore $\pi\bar{a}$ da prodeunt denominatores $\pi\hat{\omega}$ dc; de; db, ponendo A pro C; E; B.

Transeamus nunc ad aequationem inter sex variabiles hanc:

$$o = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg,$$

ex supra §. 8. demonstratis sponte sequitur aequatio auxiliaris inter db et dg haec:

$$\frac{db}{dg} = \frac{(ACE).(AFG) - (ACF).(AEG) + (ACG).(AEF)}{(ABC).(AEF) - (ABE).(ACF) + (ABF).(ACE)}$$

$$\text{sive } \left\{ \frac{db}{(ACE)(AFG) - (ACF)(AEG) + (ACG)(AEF)} + \frac{dg}{(ACE)(AFB) - (ACF).(AEB) + (ACB)(AEF)} \right.$$

Permutando invicem a et b, A et B, fit

$$o = \left\{ \frac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} + \frac{dg}{(BCE)(BFA) - (BCF)(BEA) + (BCA)(BEF)} \right.$$

Permutando hîc invicem c et g, C et G, fit

$$o = \left\{ \frac{da}{(BGE)(BFC) - (BGF)(BEC) + (BGC)(BEF)} + \frac{dc}{(BGE)(BFA) - (BGF)(BEA) + (BCA)(BEF)} \right.$$

$$\text{sive } o = \left\{ \frac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} + \frac{dc}{(BAE)(BFG) - (BAF)(BEG) + (BAG)(BEF)} \right.$$

Simili modo aequatio inter da, de; et da, df reperitur. Quare hae quatuor aequationes auxiliares prodeunt:

$$1)\ o = \left\{ \frac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} + \frac{dc}{(BAE)(BFG) - (BAF)(BEG) + (BAG)(BEF)} \right.$$

$$2)\ o = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{de}{(BCA)(BFG) - (BCF)(BAG) + (BCG)(BAF)} \end{array} \right.$$

$$3)\ o = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{df}{(BCE)(BAG) - (BCA)(BEG) + (BCG)(BEA)} \end{array} \right.$$

$$4)\ o = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{dg}{(BCE)(BFA) - (BCF)(BEA) + (BCA)(BEF)} \end{array} \right.$$

ubi ex denominatore τῷ da prodeunt denominatores τῶν dc; de; df; dg, ponendo A pro C; E; F; G. Haec lex exceptionem patitur pro aequatione differentiali inter da et db; quae ipsa autem aequatio sponte derivatur ex qualibet quatuor praecedentium, e. g. ex prima, si c et b, C et B inter se invicem permutentur, unde fit

$$5)\ o = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(CBE)(CFG) - (CBF)(CEG) + (CBG)(CEF)} \\ + \dfrac{db}{(CAE)(CFG) - (CAF)(CEG) + (CAG)(CEF)} \end{array} \right.$$

Simili quidem ratione etiam aequationes (2), (3), (4) ex (1) derivare licet, verum ratio differentiae in eo cernitur, quod permutando c cum e, f, g; C cum E, F, G, denominator τῷ da signum tantum mutet, permutando autem c et b, ipse denominator immutetur. Quare modus supra dictus deducendi aequationes (2), (3), (4) simplicior videtur.

Progrediamur ad aequationem inter octo variabiles hanc:

$$o = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg + Hdh + Idi,$$

tum erunt aequationes auxiliares hae:

$$1)\ o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dc}{\mathfrak{C}},$$

$$2)\ o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{de}{\mathfrak{E}},$$

$$5)\quad o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{df}{\mathfrak{F}},$$

$$4)\quad o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dg}{\mathfrak{G}},$$

$$5)\quad o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dh}{\mathfrak{H}},$$

$$6)\quad o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{di}{\mathfrak{J}},$$

$$7)\quad o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{db}{\mathfrak{B}},$$

Lex supra expressa hic etiam observatur, ut nimirum denominatores τῶν dc, de, df, dg, dh, di, sive $\mathfrak{C}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{J}$, ex denominatore $\mathfrak{A}$ τῆ da oriantur, ponendo A pro C, E, F, G, H, I. Septima autem aequatio ex prima oritur, permutando in hac inter se invicem c et b, C et B. Restat igitur tantum, ut determinetur denominator $\mathfrak{A}$, ejusque fomandi lex eruatur. Reperitur autem, calculis rite subductis, factores communes aequationum auxiliarium omittendo, et terminos se mutuo destruentes delendo,

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} (BCE)(BFG)(BHI) - (BCE)(BFH)(BGI) + (BCE)(BFI)(BGH) \\ -(BCF)(BEG)(BHI) + (BCF)(BEH)(BGI) - (BCF)(BEI)(BGH) \\ +(BCG)(BEF)(BHI) - (BCG)(BEH)(BFI) + (BCG)(BEI)(BFH) \\ -(BCH)(BEF)(BGI) + (BCH)(BEG)(BFI) - (BCH)(BEI)(BFG) \\ +(BCI)(BEF)(BGH) - (BCI)(BEG)(BFH) + (BCI)(BEH)(BFG). \end{cases}$$

Separando litteram B, termini hujus expressionis complectuntur permutationes litterarum reliquarum C, E, F, G, H, I, (exclusa prima A), quae sub hac restrictione fieri possunt, ut litterae in quavis complexione (ex. gr. C, G, E, H, F, I in termino octavo τῆ $\mathfrak{A}$) prima, tertia, quinta (e. gr. C, E, F), in genere imparem locum obtinentes inter sé rite sint ordinatae, et litterarum quaevis pari loco constituta (G, H, I) sit ordine alphabetico posterior littera in loco impari proxime praecedente (C, E, F). His formis rite inter se ordinatis, i. e. secundum ordinem lexicographicum (e. g. C, G, E, H, F, I ante C, G, E, I, F, H) terminorum signa alternant. Haec lex restrictiva permutationum etiam sic enuntiari potest, ut singulas complexiones dispertiendo in dyades, sive clas-

ses binorum elementorum, ipsae dyades tam quoad sua elementa, quam inter se invicem rite debeant esse ordinatae.

Eadem nunc lege generaliter pro quotcunque litteris, vel pro aequationibus inter quotcunque variabiles, denominator $\tau\tilde{\omega}$ da formatur; cumque lex, qua reliqui denominatores ex hoc deducuntur, etiam constanter valeat, ratione exposita aequationes auxiliares universaliter formare licet. Processus autem combinatorius, quo permutationes praedictae exhibentur, satis commodus hic est: Sint litterae, quarum permutationes sub restrictione supra commemorata quaeruntur a, b, c, e, ... k, l, m, n; supponamus inventas esse permutationes litterarum c, e, ... m, n, exclusis duabus a, b: tum 1) singulis his permutationibus vel complexionibus praeponatur binio ab; 2) ex hac prima serie complexiones totidem aliae formentur, permutando b et c; 3) ex his porro aliae, permutando c et d, sicque progrediendo ex quavis serie complexionum nova formetur, litteram aliquam cum proxime sequente permutando, donec postremo m et n invicem permutentur. Qua ratione obtinentur omnes permutationes litterarum a, b, c, ... m, n, quas restrictio praedicta admittit. Manifestum est, inchoando a litteris m, n, ab his ad k, l progrediendo, et sic porro, hoc modo tandem permutationes quaesitas sub forma involutoria (ex Hindenburgii appellatione) reperiri.

Notatu dignum videtur, quod multitudo permutationum praedictarum inter $2n$ elementa per productum numerorum imparium $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$ exprimatur, cum ex formula vulgo nota numerus omnium permutationum possibilium sit $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 2n$. [1]) Sic pro aequatione differentiali inter decem variabiles (§. 14.) hac:

$$0 = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg + Hdh + Idi + Kdk + Ldl,$$

denominator $\mathfrak{P}$ terminis constat $105 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, quorum evolutionem brevitatis caussa hic omitto.

1) Obiter addo propositionem combinatoriam generaliorem hanc. Si $\alpha . n$ elementa sub hac restrictione inter se permutentur, ut singulas complexiones in classes α elementorum dispertiendo, hae classes tam quoad elementa sua, quam inter se invicem rite sint ordinatae, tum erit numerus permutationum $= \frac{(n+1)(n+2)\ldots\alpha n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha)^n}$. Pro $\alpha = 2$ observandum est, esse $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n+1} = 2^n$, unde pro hoc casu particulari expressio simplicior per productum numerorum imparium prodit.

§. 18.

Continuatio.

Altera lex formationis aequationum differentialium auxiliarium.

Formulae hactenus exhibitae denominatorum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ constant terminis, qui ipsi sunt producta plurium factorum non simplicium, sed ex sex partibus compositorum. Ita v. c. factor (BCE) est =

$$\frac{BdC - CdB}{de} + \frac{CdE - EdC}{db} + \frac{EdB - BdE}{dc} =$$

$$BC^{IV} - CB^{IV} + CE'' - EC'' + EB''' - BE'''.$$

Quotientes nimirum differentiales quantitatum A, B, C, ... more supra observato indicibus distinguimus, e. g $\frac{dC}{da}$ est $= C'$, $\frac{dC}{db} = C''$, $\frac{dC}{dc} = C'''$, $\frac{dC}{de} = C^{IV}$, etc. ita quidem, ut litteris tam majoribus quam minoribus (C, c) indices tribuendo numericos secundum ordinem alphabeticum, index numericus litterae majori superscriptus designet ejusdem quotientem differentialem, dum ea littera minor tanquam variabilis consideretur, cui idem index competit. Ita ex. gr. est $C^{IV} = \frac{dC}{de}$, quoniam index numericus litterae e est $= 4$.

Quod si nunc ista producta ex factoribus compositis actuali multiplicatione evolvantur, expressiones praedictae denominatorum alias formas induunt, quarum termini nunc ex productis factorum simplicium constant. Pro aequatione differentiali inter quatuor variabiles

$$o = Ada + Bdb + Cdc + Ede,$$

aequationes auxiliares ex supra demonstratis hae sunt:

$$1)\ o = \left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{BC^{IV} - CB^{IV} + CE'' - EC'' + EB''' - BE'''} \\ + \frac{db}{AC^{IV} - CA^{IV} + CE' - EC' + EA''' - AE'''} \end{array} \right.$$

sive terminos aliter ordinando,

$$o = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{B(C^{IV}-E''')-C(B^{IV}-E'')+E(B'''-C')} \\ + \dfrac{db}{A(C^{IV}-E''')-C(A^{IV}-E')+E(A'''-C)} \end{array} \right.$$

$$2)\ o = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{B(C^{IV}-E''')-C(B^{IV}-E'')+E(B'''-C')} \\ + \dfrac{dc}{B(A^{IV}-E')-A(B^{IV}-E'')+E(B'-A')} \end{array} \right.$$

$$3)\ o = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{B(C^{IV}-E''')-C(B^{IV}-E'')+E(B'''-C')} \\ + \dfrac{de}{B(C'-A''')-C(B'-A')+A(B'''-C')} \end{array} \right.$$

In tribus his aequationibus denominatores τῶν db, dc, de, prodeunt ex denominatore τῆ da, ponendo A pro B, C, E: simulque indicem τῆ A sive 1 pro indicibus τῶν B, C, E; sive pro II, III, IV. Haec lex, ex primo denominatore τῆ da ceteros derivandi, uniformiter pro quotcunque litteris a, b, c, e, f, g, h etc. valet, et quidem pro omnibus aequationibus auxiliaribus, absque ulla exceptione, quae in superiori regula formationis (§. 17.) pro aequatione inter da et db observanda erat. Quare explicandum duntaxat est, quomodo formandus sit denominator τῆ da.

Pro aequatione inter sex variabiles

$$o = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg,$$

sint aequationes auxiliares:

$$1)\ o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{db}{\mathfrak{B}}$$

$$2)\ o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dc}{\mathfrak{C}}$$

$$3)\ o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{de}{\mathfrak{E}}$$

$$4)\ o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{df}{\mathfrak{F}}$$

$$5)\ o = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dg}{\mathfrak{G}}$$

tum erit denominator

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} \quad B\begin{pmatrix} C^{v}E^{vi} - C^{iv}F^{vi} + C^{iv}G^{v} - E^{v}C^{vi} + E'''F^{vi} - E'''G^{v} \\ + F^{iv}C^{vi} - F'''E^{vi} + F'''G^{iv} - G^{iv}C^{v} + G'''E^{v} - G'''F^{iv} \end{pmatrix} \\ - C\begin{pmatrix} B^{v}E^{vi} - B^{iv}F^{vi} + B^{iv}G^{v} - E^{v}B^{vi} + E''F^{vi} - E''G^{v} + F^{iv}B^{vi} \\ - F''E^{vi} + F''G^{iv} - G^{iv}B^{v} + G''E^{v} - G''F^{iv} \end{pmatrix} \\ + E\begin{pmatrix} B^{v}C^{vi} - B'''F^{vi} + B'''G^{v} - C^{v}B^{vi} + C''F^{vi} - C''G^{v} \\ + F'''B^{vi} - F'''C^{vi} + F'''G''' - G'''B''' + G'''C^{v} - G'''F''' \end{pmatrix} \\ - \Gamma\begin{pmatrix} B^{iv}C^{vi} - B'''E^{vi} + B'''G^{iv} - C^{iv}B^{vi} + C''E^{vi} - C''G^{iv} \\ + E'''B^{vi} - E''C^{vi} + E''G''' - G'''B^{iv} + G''C^{iv} - G''E''' \end{pmatrix} \\ + G\begin{pmatrix} B^{iv}C^{v} - B'''E^{v} + B'''F^{iv} - C^{iv}B^{v} + C''E^{v} - C''F^{iv} \\ + E'''B^{v} - E''C^{v} + E''F''' - F'''B^{iv} + F''C^{iv} - F''E''' \end{pmatrix} \end{cases}$$

Hae expressiones, si ad solas litteras B, C, E, F, G, respicimus, complectuntur omnes earum terniones cum permutationibus, sive variationum in doctrina combinatoria sic dictarum tertiam classem et quidem rite ordinatam. Quomodo signa se habeant, manifestum est: ea nimirum alternant duplici respectu, primo quoad factores B, C, E, F, G, deinde quoad singulos terminos, qui in hos factores ducti sunt. Quod ad indices numericos litterarum attinet, in quavis complexione vel in quovis producto ii junguntur indices ordine naturali, qui litteris in hoc producto deficientibus (exclusa semper littera A) competunt, prima littera cujusvis producti indice caret. Ex. gr. in productis BEG, BGE, EBG, EGB, GBE, GEB adduntur secundo et tertio factori indices litterarum C. F in his productis non occurrentium, sive numeri III, V. Simili modo pro aequatione differentiali inter octo variabiles:

$$o = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg + Hdh + Idi,$$

denominator $\mathfrak{A}$ complectitur omnes quaterniones septem litterarum B, C, E, F, G, H, I cum permutationibus; pro aequatione inter 10 variabiles:

$$o = Ada + Bdb + \ldots + Kdk + Ldl,$$

denominator comprehendit omnes conquinationes cum permutationibus novem litterarum B, C, ... K, L. Generatim pro aequatione differentiali inter $2n$ variabiles, denominator $\tau\tilde{\omega}$ da sive $\mathfrak{A}$ constat omnibus variationibus $2n-1$ litterarum B, C, E, ... (exclusa prima A) classis n^{tae}. Signa terminorum, (dum classis rite sit ordinata, sive singulae complexiones procedant ordine lexico-

gra-

graphico), et indices numerici litteris jungendi sequuntur legem praedictam: nec minus ex ante dictis constat, quomodo reliqui denominatores ex primo $\mathfrak{A}$ deriventur. Transitum a prima regula formationis (§. 17.) ad hanc alteram, hujusque vim sequens exemplum monstrabit. Pro aequatione differentiali inter octo variabiles, denominator $\pi\mathfrak{d}\,da$ ex regula posteriore constat terminis $7.6.5.4 = 840$, qui numerus multitudinem quaternionum cum permutationibus ex septem elementis exprimit. Secundum regulam priorem denominator $\pi\mathfrak{d}\,da$ constat terminis tantum 15, at si producta trium factorum, quorum quivis sex partibus constat, evolvantur, quodvis productum praebet $6.6.6 = 216$ partes, quare numerus terminorum denominatoris post hanc evolutionem assurgit ad $15.216 = 5240$, quos nunc vi regulae secundae ad 840 contrahi, reliquis 2400 se mutuo destruentibus, certum est. Idque ipsum evolutione actu instituta confirmatur.

§ 19.

Quanquam methodus hactenus exposita, aequationem differentialem primi ordinis inter $2n$ variabiles ad aequationem similem inter $2n-1$ variabiles reducendi, ad quemvis variabilium numerum etiam imparem eadem ratione extendi posse videatur, accuratior tamen consideratio contrarium ostendit, atque docet, aequationem inter $2n+1$ variabiles non generaliter ad $2n$ variabiles reduci posse, sed tum demum hanc reductionem locum habere, si certa relatio inter coefficientes aequationis differentialis obtineat. Quod phaenomenon notatu dignum duobus exemplis illustrasse sufficiat.

Sit aequatio proposita inter tres variabiles haec: $dz = P\,dx + Q\,dy$, ubi P, Q sunt functiones datae $\tau\tilde{\omega}\nu$ x, y, z. Quod si nunc methodo hactenus adhibita hanc aequationem ad aequationem inter duas variabiles revocare tentemus, ponendum est

$$dx = X\,dz + \chi\,da + \chi'\,db$$
$$dy = Y\,dz + \eta\,da + \eta'\,db,$$

tum aequatio proposita in hanc abit:

$$0 = \begin{array}{l|l|l} PX & dz + P\chi & da + P\chi' \\ +QY & +Q\eta & +Q\eta' \\ -1 & & \end{array} \Big| db.$$

Quae ut a dz et z liberetur, poni debet

1) $PX + QY = 1$;

2) $d^z\left(\frac{P\chi' + Q\eta'}{P\chi + Q\eta}\right) = 0$ sive $\frac{d^z(P\chi + Q\eta)}{P\chi + Q\eta} = \frac{d^z(P\chi' + Q\eta')}{P\chi' + Q\eta'}$.

Est autem $d^z(P\chi + Q\eta) = \begin{cases} P d^z\chi + Q d^z\eta \\ + \chi d^z P + \eta d^z Q \end{cases}$

$$= \begin{cases} = P d^a X + Q d^a Y \\ + \chi d^z P + \eta d^z Q \end{cases} = \begin{cases} d^a(PX + QY) - X d^a P - Y d^a Q \\ + \chi d^z P + \eta d^z Q \end{cases}$$

$$= - X d^a P - Y d^a Q + \chi d^z P + \eta d^z Q.$$

Cum sint P et Q functiones τῶν x, y, et z, sit

$$dP = P' dx + P'' dy + P''' dz$$
$$dQ = Q' dx + Q'' dy + Q''' dz,$$

et erit $d^a P = P' d^a x + P'' d^a y = P'\chi + P''\eta$,

$$d^z P = P' d^z x + P'' d^z y + P''' = P'X + P''Y + P'''.$$

Simili modo, permutando P cum Q, exprimuntur $d^a Q$, $d^z Q$.

Hinc fit $\frac{d^z(P\chi + Q\eta)}{P\chi + Q\eta} = \frac{\left\{\begin{matrix} P'X \\ + P''Y \\ + P''' \\ - XP' \\ - YQ' \end{matrix}\right\}\chi \left\{\begin{matrix} + Q'X \\ + Q''Y \\ + Q''' \\ - XP'' \\ - YQ'' \end{matrix}\right\}\eta}{P\chi + Q\eta}$

$$= \frac{[(P' - Q')Y + P''']\chi + [(Q' - P'')X + Q''']\eta}{P\chi + Q\eta}.$$

Eadem ratione permutando χ, η, cum χ', η' exprimitur quotiens $\frac{d^z(P\chi' + Q\eta')}{P\chi' + Q\eta'}$, qui primo erit aequalis, si ponatur $\frac{(Q' - P'')X + Q'''}{Q} = \frac{(P'' - Q')Y + P'''}{P}$, sive

$$(Q' - P'')PX - (P'' - Q')QY + PQ''' - P'''Q = 0.$$

Quae aequatio ad determinandas duas incognitas X, Y jungenda est priori (1) $PX + QY = 1$. At sumendo ex hac $PX = 1 - QY$, et substituendo in altera aequatione, ex hac ipsa exit Y, fit enim

$$Q - P' - Q(Q' - P'')Y - (P' - Q')QY + PQ''' - P'''Q = 0,$$
$$\text{i. e.} \quad Q' - P'' + PQ''' - P'''Q = 0.$$

Haec est aequatio conditionalis, sive relatio, quae inter coefficientes P, Q aequationis propositae intercedere debet, quo ea ad aequationem inter duas variabiles reduci queat.

Haec aequatio conditionalis praebet, signa usitata adhibendo,

$$0 = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} + \frac{PdQ}{dz} - \frac{Qdp}{dz},$$

quod ipsum apprime conspirat cum noto criterio integrabilitatis aequationis $dz = Pdx + Qdy$, consideratae tanquam aequationis inter tres variabiles z, x, y, quarum una esse debet functio reliquarum duarum nullo inter se nexu analytico junctorum (§. 17.). Quod autem aequatio differentialis inter tres variabiles hoc sensu integrabilis seu illi criterio satisfaciens, ad aequationem inter duas variabiles revocari queat, aliunde demonstrare licet.

Simili modo tractetur aequatio differentialis inter quinque variabiles haec:

$$dv = Pdx + Qdy + Rdz + Sdu,$$

ubi P, Q, R, S, sunt functiones datae $\tau\tilde{\omega}\nu$ x, y, z, u, v. Ad transformandam hanc aequationem in aequationem inter quatuor variabiles a, b, c, e, ponamus:

$$dx = Xdu + \chi da + \chi' db + \chi'' dc + \chi''' de,$$
$$dy = Ydu + \eta da + \eta' db + \eta'' dc + \eta''' de,$$
$$dz = Zdu + \zeta da + \zeta' db + \zeta'' dc + \zeta''' de,$$
$$dv = Vdu + \nu da + \nu' db + \nu'' dc + \nu''' de;$$

tunc abit aequatio proposita in hanc:

$$0 = \begin{array}{l|l|l|l|l} V & du + \nu & da + \nu' & db + \nu'' & dc + \nu''' \quad de \\ -PX & -P\chi & -P\chi' & -P\chi'' & -P\chi''' \\ -QY & -Q\eta & -Q\eta' & -Q\eta'' & -Q\eta''' \\ -RZ & -R\zeta & -R\zeta' & -R\zeta'' & -R\zeta''' \\ -S & & & & \end{array}$$

Quae aequatio ut a du et u liberetur, poni debet

1) $V = PX + QY + RZ + S$;

Deinde quotiens $\frac{d^n(v - P\chi - Q\eta - R\zeta)}{v - P\chi - Q\eta - R\zeta}$ idem manere debet, ponendo pro

$$v, \chi, \eta, \zeta;\ v', \chi', \eta', \zeta';\ v'', \chi'', \eta'', \zeta'';\ v''', \chi''', \eta''', \zeta'''.$$

Est autem $d^n(v - P\chi - Q\eta - R\zeta) =$

$$\begin{aligned}
&d^n v - P d^n \chi - Q d^n \eta - R d^n \zeta - \chi d^n P - \eta d^n Q - \zeta d^n R \\
&= d^n V - P d^n X - Q d^n Y - R d^n Z - \chi d^n P - \eta d^n Q - \zeta d^n R \\
&= \begin{cases} d^n(V - PX - QY - RZ) + X d^n P + Y d^n Q + Z d^n R \\ - \chi d^n P - \eta d^n Q - \zeta d^n R \end{cases} \\
&= d^n S + X d^n P + Y d^n Q + Z d^n R - \chi d^n P - \eta d^n Q - \zeta d^n R.
\end{aligned}$$

Quum P, Q, R, S, sint datae functiones $\tau\tilde{\omega}\nu$ x, y, z, u, v, ponamus

$$dP = P' dx + P'' dy + P' dz + P^{iv} du + P^{v} dv,$$

et simili modo exprimamus dQ, dR, dS.

Tum erit $d^n P = P'\chi + P''\eta + P'''\zeta + P^{v} v,$

$$d^n P = P'X + P''Y + P'''Z + P^{iv} + P^{v} V,$$

et similes expressiones obtinentur pro reliquis differentialibus secundum a et u. Quas substituendo fit $d^n(v - P\chi - Q\eta - R\zeta) =$

	χ	η	ζ	v
S^{v}	$+S^{iv}$	$+S'''$	$+S''$	$+S'$
$+YQ'$	$+XP''$	$+XP'''$	$+XP^{v}$	
$+ZR'$	$+ZR''$	$+YQ'$	$+YR^{v}$	
$-P''Y$	$-Q'X$	$-R'X$	$+ZR^{v}$	
$-P'''Z$	$-Q'Z$	$-R''Y$		
$-P^{v}V$	$-Q^{v}V$	$-R^{v}V$		
$-P^{iv}$	$-Q^{iv}$	$-R^{iv}$		

Quare praedicta conditio quoad quotientem $\frac{d^n(v - P\chi - Q\eta - R\zeta)}{v - P\chi - Q\eta - R\zeta}$ adimplebitur, si hasce tres aequationes assumamus:

$$2)\ \begin{cases} -P(S^{v} + P^{v}X + Q^{v}Y + R^{v}Z) \\ = S' + YQ' + ZR' - P'Y - P'Z - P^{iv} - P^{v}V \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} -Q(S^{iv} + P^{iv}X + Q^{iv}Y + R^{iv}Z) \\ = S'' + XP' + ZR' - QX - Q''Z - Q^{iv} - Q^{v}V \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} -R(S^{v} + P^{v}X + Q^{v}Y + R^{v}Z) \\ = S''' + XP'' + YQ - RX - RY - R^{iv} - R^{v}V. \end{cases}$$

Quibus aequationibus junctis priori (1), quatuor quantitates incognitae

X, Y, Z, V determinari videntur. At vero calculo actu evolvendo atque ad finem perducendo, eliminatio, incognita ex calculo exeunte, deducit ad aequationem conditionalem hanc:

$$0 = \begin{cases} (Q^{v}S - QS^{v} + Q^{iv} - S''') \ (PR^{v} - P^{v}R + R' - P''') \\ - \ (P^{v}S - PS^{v} + P^{iv} - S') \ (QR^{v} - Q^{v}R + R''' - Q') \\ - \ (R^{v}S - RS^{v} + R^{iv} - S''') \ (PQ^{v} - P^{v}Q + Q' - P'). \end{cases}$$

Quare aequatio proposita inter quinque variabiles tum demum ad aequationem inter quatuor variabiles reduci poterit, cum haec relatio inter ejus coefficientes locum habeat. Simili modo prō septem, novem etc. variabilibus ratiocinari licet. Legem generalem aequationis conditionalis pro $2n+1$ variabilibus, quo aequatio differentialis ad $2n$ variabiles revocari queat, (quae quidem lex ad similitudinem formularum supra §. 17, 18. expositarum exprimi potest), nec non reliqua consectaria ex hac observatione singulari petenda nunc praetermitto.

§. 20.

Problema XIV.

Integrationem completam aequationum differentiarum partialium ad formam simpliciorem revocare.

Solutio.

Sit $dz = \overset{1}{p}\overset{1}{dx} + \overset{2}{p}\overset{2}{dx} + \overset{3}{p}\overset{3}{dx} \ldots + \overset{n}{p}\overset{n}{dx}$ (§. 16.), et supponatur data relatio inter variabiles $z, \overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{n}{x}$, et quotientes differentiales $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \ldots \overset{n}{p}$, cujus ope $\overset{n}{p}$ per reliquas harum quantitatum exprimere liceat. Tum ex praecedenti expositione constat, integrationem completam hujus aequationis differentiarum partialium aequationibus hujus formae exhiberi:

1) $\overset{n}{F}(z, \overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{n}{x}, \overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \ldots \overset{n-1}{p}) = \psi \left\{ \begin{matrix} \overset{1}{f}(z, \overset{1}{x} \ldots \overset{n}{x}, \overset{1}{p} \ldots \overset{n-1}{p}), \\ \overset{2}{f}(z, \overset{1}{x} \ldots \overset{n}{x}, \overset{1}{p} \ldots \overset{n-1}{p}), \overset{2}{f}(z \ldots \overset{n-1}{p}), \\ \ldots \overset{n-2}{f}(z, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n-1}{p}) \end{matrix} \right\}$

2) $\overset{2}{F}(z, \overset{1}{x} \ldots \overset{n-1}{p}) = \psi' [\overset{1}{f}(z, \overset{1}{x} \ldots \overset{n-1}{p})]$

3) $\overset{3}{F}(z, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n-1}{p}) = \psi' [\overset{2}{f}(z, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n-1}{p})]$

n) $\overset{n-1}{F}(z, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n-1}{p}) = \psi' [\overset{n-2}{f}(z, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n-1}{p})]$

Ponamus jam $f(z, x, x, \ldots p) = k$,

$f(z, x, \ldots p) = k$,

$f(z, x, \ldots p) = k$,

. . . . . .

$f(z, x, \ldots p) = k$

tum concipere licet, ope harum $n-1$ aequationum quantitates $p, p, \ldots p$ expressas esse per $z, x, \ldots x$, et per $k, k, \ldots k$. Quo facto functiones signis $F, F, F, \ldots F$ denotatae etiam abeunt in functiones cognitas earundem quantitatum $z, x, \ldots x, k, k, \ldots k$ quas functiones signis $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \ldots \mathfrak{F}$ exprimamus. Quare aequationes integrales hanc formam nanciscentur:

1) $\mathfrak{F}(z, x, x, \ldots x, k, k, \ldots k) = \psi(k, k, \ldots k)$

2) $\mathfrak{F}(z, x, \ldots k) = \psi k$

3) $\mathfrak{F}(z, x, \ldots k) = \psi k$

4) $\mathfrak{F}(z, x, \ldots k) = \psi k$

. . . . . .

n) $\mathfrak{F}(z, x, \ldots k) = \psi k.$

Nunc vero inter functiones per $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \ldots \mathfrak{F}$ designatas, simplex et memorabilis intercedit relatio, cujus ope ex prima functione reliquas facile determinare licet: ad quam quidem relationem perductus sum accuratiori consideratione nexus inter aequationes integrales et aequationem differentialem propositam, seu modi, quo illae huic satisfaciant.

Differentiando nimirum aequationem (1) obtinetur:

$$dz.\mathfrak{F}z + dx.\mathfrak{F}x + dx.\mathfrak{F}x \ldots + dk.\mathfrak{F}k + dk.\mathfrak{F}k \ldots + dk.\mathfrak{F}k$$
$$= dk.\psi k + dk.\psi k \ldots + dk.\psi k.$$

Hinc fit, substituendo pro $\psi k, \psi k, \ldots \psi k$, valores ex aequationibus (2), (3), ... (n) prodeuntes, quos brevitatis caussa solis litteris functiona-

libus $\mathfrak{F}, \overset{2}{\mathfrak{F}}, \overset{3}{\mathfrak{F}}, \ldots \overset{n-1}{\mathfrak{F}}$ designemus,

$$0 = \begin{cases} dz \cdot \mathfrak{F}z + dx \cdot \mathfrak{F}x + dx \cdot \mathfrak{F}x \ldots + dx \cdot \mathfrak{F}x \\ + dk(\mathfrak{F}k - \mathfrak{F}) + dk(\mathfrak{F}k - \mathfrak{F}) \ldots + dk(\mathfrak{F}k - \mathfrak{F}). \end{cases}$$

Haec aequatio, jam a functione arbitraria liberata, identica esse debet cum aequatione differentiali proposita $dz = p\,dx + p\,dx \ldots p\,dx$.

Qui consensus manifesto necessarius est, si consideremus totam expositionem supra traditam integrationis aequationum differentialium inter quotcunque variabiles, quibus etiam nostra aequatio differentiarum partialium adnumeranda est. Quodsi enim numerus variabilium in aequatione differentiali proposita impar sit, tum consensus sive identitas praedicta immediate ex praecedentibus sequitur, quia differentiatio aequationis integralis primae, substituendo valores ex reliquis aequationibus, producit ipsam aequationem differentialem propositam. Idem vero etiam de numero pari variabilium valere, inde efficitur, quod aequatio differentialis inter $2n$ variabiles in aliam ipsi omnino aequipollentem inter $2n-1$ variabiles transformetur. Quibus praemissis hae deducuntur aequationes identicae:

$$\mathfrak{F}k = \mathfrak{F}$$
$$\mathfrak{F}k = \mathfrak{F}$$
$$\mathfrak{F}k = \mathfrak{F}$$
$$\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{F}k = \mathfrak{F}$$

Quare functiones signis $\mathfrak{F}, \overset{2}{\mathfrak{F}}, \ldots \overset{n-1}{\mathfrak{F}}$ denotatae ex prima functione littera $\mathfrak{F}$ insignita deriventur, hanc differentiando secundum $k, k, \ldots k$. Inde aequationes integrales sub hac forma simplici exhibere licet:

1) $\mathfrak{F}(z, x, \overset{2}{x}, \ldots \overset{n}{x}, k, \overset{2}{k}, \ldots \overset{n-1}{k}) = \psi(k, \overset{2}{k}, \ldots \overset{n-1}{k})$

2) $\mathfrak{F}(\overset{1}{k}) = \psi(\overset{1}{k})$

3) $\mathfrak{F}(\overset{2}{k}) = \psi(\overset{2}{k})$

4) $\mathfrak{F}(\overset{3}{k}) = \psi(\overset{3}{k})$

$\ldots\ldots$

n) $\mathfrak{F}(\overset{n-1}{k}) = \psi(\overset{n-1}{k})$

Ex his aequationibus solutio completa aequationis differentiarium partialium statim atque immediate sub forma generali deduci potest. Namque functionem arbitrariam per ψ expressam indeterminatam relinquendo, ex variabilibus $n+1$, quas aequatio proposita involvit, $(z, x', \ldots x^{(n)})$, n variabiles per $n+1^{tam}$ et per quantitates $n-1$ indeterminatas $k', k'', \ldots k^{(n-1)}$, ope istarum n aequationum integralium exprimi possunt. Tales quidem expressiones generales, ipsam functionem arbitrariam involventes, forma prior aequationum integralium suppeditare nequit. Namque ex his aequationibus quantitates $p', p'', \ldots p^{(n-1)}$ tum demum eliminare, indeque aequationem inter ipsas variabiles $z, x', \ldots x^{(n)}$ eruere licet, cum loco functionis arbitrariae signo ψ denotatae certa atque determinata functio supponatur, quod quovis casu solutionem tantum particularem evolutam praebet.

Ceterum ex forma simpliciori hic exhibita etiam quotientes differentiales $p', p'', \ldots p^{(n)}$ per easdem n quantitates indeterminatas exprimere licet. Cum enim aequatio $o = dz.\mathfrak{F}z + dx'.\mathfrak{F}x' \ldots + dx^{(n)}.\mathfrak{F}x^{(n)}$ sit identica cum aequatione $dz = p'dx' + p''dx'' \ldots + p^{(n)}dx^{(n)}$, esse debet

$$p' = \frac{-\mathfrak{F}x'}{\mathfrak{F}z}, \quad p'' = \frac{-\mathfrak{F}x''}{\mathfrak{F}z}, \quad \ldots \quad p^{(n)} = \frac{-\mathfrak{F}x^{(n)}}{\mathfrak{F}z}.$$

Applicationem methodi generalis in praecedentibus expositae ad exempla ipsam magis illustrantia, varias inde natas observationes, expositionem methodorum magis specialium, quibus certos casus facilius expedire licet, (ita etiam methodi paullo diversae, aequationes differentiarum partialium inter quatuor variabiles integrandi, in quam incideram, priusquam methodo generali ad quotcunque variabiles patente potitus eram), haec et alia, ne nimis longa fiat haec commentatio, nunc praetermitto.

(Inter-

Untersuchungen über die Bewegung des Wassers, wenn auf die Contraction, welche beim Durchgange durch verschiedene Oeffnungen statt findet und auf den Widerstand, welcher die Bewegung des Wassers längs den Wänden der Behältnisse verzögert, Rücksicht genommen wird.

Von Herrn Extelwein *).

§. 1.

Es fehlt nicht an allgemeinen Untersuchungen über die Bewegung des Wassers unter bestimmten Voraussetzungen; aber weit mehr fehlt es an zureichend genauen und vollständigen Versuchen über diesen Gegenstand, um aus der Uebereinstimmung der Erfahrung mit den Resultaten, welche aus den allgemein als richtig anerkannten Prinzipien gefolgert werden, rückwärts zu schliefsen, dafs bei den allgemeinen Untersuchungen kein Umstand aus der Acht gelassen worden, welcher zur Begründung einer allgemein anwendbaren Formel erfordert wird. Bei den folgenden Untersuchungen wird daher, so weit es möglich ist, nicht von der Bewegung einer idealen flüssigen Masse, sondern von einer solchen die Rede seyn, welche sich den bekannten Eigenschaften des Wassers so weit nähert, als diese auf seine Bewegung einen merklichen Einfluss haben, wobei zugleich auf den Zusammenhang der Was-

*) Vorgelesen den 8. November 1810.

sertheile unter sich und mit den Wänden des Gefäfses, in welchem sich das Wasser bewegt, und auf die Contraction, beim Durchgange in den plötzlichen Verengungen eines Gefäfses, Rücksicht genommen werden soll, da bekannt genug ist, welchen grofsen Einfluſs diese beiden Umstände auf die Veränderung in der Bewegung des Wassers haben. Erst dann, wenn unter den nöthig scheinenden Voraussetzungen allgemeine Resultate über die Bewegung des Wassers gefunden sind, wird man diese mit den bekannten Versuchen vergleichen können, und hieraus wird sich erst abnehmen lassen, wie und mit welchen Modificationen eine Anwendung der allgemeinen Formeln auf besondere Fälle der Ausübung zuläfsig ist. Zu den neuesten Bemühungen, wie man die Resultate, welche *a priori* erhalten werden, mit den bekanntesten Erfahrungen in Uebereinstimmung bringen könnte, gehören die *Recherches sur la théorie des eaux courantes, par Prony* (*Paris* 1804.). Allein man wird bei denselben vermissen, dafs auf die Contraction der Wasserstrahlen gar nicht Rücksicht genommen, und, wie in der Folge gezeigt werden soll, dafs bei der Aufstellung des allgemeinen Ausdrucks für die wirkliche Bewegung des Wassers, ein wesentliches Glied der Formel ganz ausgelassen worden ist.

§. 2.

Im Gefäfs A'A'aa Figur 1., dessen centrische Linie ABMEF ist, bewege sich die Wassermasse B'B'F'F'. Vom Anfang ihrer Bewegung bis zum Ende der Zeit t sey solche aus der Lage A'A'E'E' in die Lage B'B'F'F' gekommen, ohne dafs irgend ein Zufluſs oder Abfluſs des Wassers statt gefunden habe. Auch werde vorausgesetzt, dafs in jedem auf die centrische Linie winkelrechten Querschnitte die Geschwindigkeit des Wassers gleich grofs sey, und dafs keine plötzliche Verengungen im Gefäfse vorkommen, welche die Stetigkeit unterbrechen könnten.

Man setze den ersten Querschnitt des Wassers B'B' = W, seinen Umfang = P, die Geschwindigkeit des Wassers in diesem Querschnitte = V, die Länge der centrischen Linie AB = S, und die auf der wagerechten Abscissenaxe senkrechte Ordinate DB = y. Für den Punkt F sey der letzte Querschnitt F'F' = w, sein Umfang = p, die Geschwindigkeit des Wassers = v, die Länge der centrischen Linie ABMEF = s, und die Ordinate GF = y'. Zu irgend einem Querschnitt M'M' = ω, dessen Umfang = φ ist, gehöre die Geschwindigkeit ψ, die centrische Linie ABM = σ, die Abscisse AP = x

und die Ordinate $PM = y''$; auch sey ein vorwärts gerichteter Normaldruck gegen die Fläche $B'B'$, dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe q, gegen $F'F'$, nach der Richtung Ff, von der Höhe q', und gegen $M'M'$ nach der Richtung Mm von der Höhe q'' gleich.

Wächst $AP = x$ um das Element $Pp = dx$, also $AM = \sigma$ um $Mm = d\sigma$, so ist der Inhalt der Elementarschicht $M'M'm'm' = \omega d\sigma$. Setzt man das Gewicht von einem Kubikfufs des bewegten Wassers $= \gamma$, so ist der Normaldruck von der Wassermasse BM auf $M'M' = \gamma\omega q''$, also der Normaldruck, welchen die Elementarschicht $M'M'm'm'$ gegen $m'm'$ verursacht, $= \gamma\omega d q''$. Von dem Gewichte $\gamma\omega d\sigma$ dieses Elements entsteht nach der Richtung Mm eine bewegende Kraft $= \gamma\omega d\sigma . \frac{Mo}{Mm} = \gamma\omega d\sigma \frac{dy''}{d\sigma} = \gamma\omega dy''$ und von dieser kann nur derjenige Theil Bewegung verursachen, welcher nicht auf den Druck des vorfliefsenden Wassers oder auf die Ueberwältigung der Hindernisse der Bewegung verwandt wird. Nun ist der Druck, welcher auf das vorfliefsende Wasser verwendet werden mufs $= \gamma\omega d q''$, also bleibt nur noch, ohne Rücksicht auf die Hindernisse der Bewegung, die Kraft $\gamma\omega dy'' - \gamma\omega d q''$ übrig. Es entsteht aber vom Zusammenhange der Wassertheile unter sich und mit den Wänden des Gefäfses ein Widerstand, weil eine bestimmte Kraft dazu erfordert wird, die Wassertheile theils von den Wänden des Gefäfses, theils von demjenigen Wasser los zu reifsen, welches mit dem Gefäfs stärker als mit dem vorbeifliefsenden Wasser zusammen hängt. Dieser Widerstand, welchen die Elementarschicht $M'M'm'm'$ leidet, wird offenbar desto gröfser, je mehr Theile ihres Umfanges die Wände des Gefäfses berühren, oder je gröfser der Umfang $\varphi d\sigma$ ist; wie aber dieser Widerstand von der Geschwindigkeit ψ abhängt, läfst sich nur durch genaue Versuche ausmitteln, daher man denselben im Allgemeinen irgend einer Function von ψ gleich setzen kann, dergestalt, dafs derselbe für die Elementarschicht $M'M'm'm'$ durch $\gamma\varphi d\sigma f(\psi)$ bezeichnet wird.

Um unabhängig von einzelnen Versuchen zu übersehen, welche Gestalt $f(\psi)$ haben könnte, so ist zu bemerken, dafs je schneller sich das Wasser bewegt, desto mehr Wassertheile kommen in gleicher Zeit mit den Wänden in Berührung, daher wird $f(\psi)$ ein Glied enthalten müssen, in welchem die erste Potenz der Geschwindigkeit ψ vorkommt. Aber die Menge der zu trennenden Wassertheile ist nicht nur desto gröfser, je gröfser die

Geschwindigkeit des Wassers ist, sondern es mufs auch jedes Wassertheilchen in einer geringern Zeit losgerissen werden, wenn die Geschwindigkeit gröfser wird, weshalb der Widerstand auch vom Quadrat der Geschwindigkeit ψ abhängt und daher mufs $f(\psi)$ zugleich ein solches Glied enthalten. Man kann hienach $f(\psi) = B\psi + B'\psi^2$ setzen und aus zureichend genauen Versuchen die Werthe der beständigen Coefficienten B, B' näher bestimmen. Diese aus allgemeinen Betrachtungen ausgemittelte Form für $f(\psi)$ stimmt auch sehr gut mit den Resultaten aus denjenigen Versuchen überein, welche *Coulomb* zur Bestimmung dieses Widerstandes angestellt hat. (*Mémoires de l'Institut national des sciences et arts. Sciences mathém. et phys. Tom. III. Paris An IX p.* 246 — 305). Auch fand derselbe dafs die Verschiedenheit des Wasserdrucks und der Materie des festen Körpers keinen Einflnfs auf die Kraft habe, welche zur Trennung des Zusammenhanges erfordert wird, weshalb diese Umstände hier um so weniger in Rechnung kommen.

Es folgt nun aus dem Vorhergehenden, dafs die Kraft, welche zur Fortbewegung der Elementarschicht M'M'm'm' frei verwandt wird

$= \gamma\omega dy'' - \gamma\omega dq'' - \gamma\varphi d\sigma f(\psi)$ ist, also die beschleunigende Kraft derselben

$$= \frac{\gamma\omega dy'' - \gamma\omega dq'' - \gamma\varphi d\sigma f(\psi)}{\gamma\omega d\sigma} = \frac{dy'' - dq''}{d\sigma} - \frac{\varphi}{\omega} f(\psi)$$

Die Geschwindigkeit ψ ist eine Function von der verflossenen Zeit t und von dem durchlaufenen Raume σ. Wächst t um dt, so wird die Schicht M'M'm'm' in der Zeit dt irgend einen Raum $Mn = \psi dt$ durchlaufen; also wächst σ in der Zeit dt um ψdt. Zur Bestimmung der partiellen Differentiale für ψ erhält man daher

$$d\psi = \psi dt \left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + dt \left(\frac{d\psi}{dt}\right)$$

Bezeichnet nun g den Raum, welchen ein Körper in der ersten Secunde frei fällt, so findet man die beschleunigende Kraft der Elementarschicht M'M'm'm' =

$$\frac{d\psi}{2gdt} = \frac{\psi}{2g}\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right) \text{ also}$$

$$\frac{\psi}{2g}\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)+\frac{1}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)=\frac{dy''-dq''}{d\sigma}-\frac{\varphi}{\omega}f(\psi) \text{ oder}$$

$$\text{(I.) } 4gdq''=4gdy''-2\psi d\sigma\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)-2d\sigma\left(\frac{d\psi}{dt}\right)-4g\,\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi).$$

§. 3.

Weil durch jeden Querschnitt M'M', F'F', Figur 1., in gleichen Zeiten gleich viel Wasser abfliefst, so ist $\psi\omega=vw$, also $\psi=\frac{vw}{\omega}$, daher $\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)=\left(\frac{d\frac{vw}{\omega}}{d\sigma}\right)$. Aendert sich σ, so mufs sich im Ausdruck $\frac{vw}{\omega}$ die Fläche ω ändern, weil für einerlei Zeit, vw ungeändert bleibt; daher ist in diesem Falle $d\frac{vw}{\omega}=-\frac{vw}{\omega^2}d\omega$, folglich $d\sigma\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)=-\frac{vw}{\omega^2}d\omega$, und hieraus $2\psi d\sigma\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)=-2v^2w^2\frac{d\omega}{\omega^3}$.

Aendert sich t, so bleiben die Querschnitte w, ω ungeändert, aber die Geschwindigkeit v mufs sich ändern, daher ist hier $d\frac{vw}{\omega}=\frac{w}{\omega}dv$, also $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)=\frac{w}{\omega}\frac{dv}{dt}$, und man erhält aus (I.)

$$4gdq''=4gdy''+2v^2w^2\frac{d\omega}{\omega^3}-2w\frac{dv}{dt}\frac{d\sigma}{\omega}-4g\,\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi).$$

Das Integral hievon ist

$$\text{(II.) } 4gq''=4gy''-\frac{v^2w^2}{\omega^2}-2w\frac{dv}{dt}\int\frac{d\sigma}{\omega}-4g\int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi)+C.$$

Für $q''=q$ ist $y''=y$, $\sigma=S$, $\omega=W$, $\varphi=P$ und $\psi=V$, auch werde alsdann $\int\frac{d\sigma}{\omega}=N'$ und $\int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi)=R'$; eben so wird für $q''=q'$, $y''=y'$, $\sigma=s$, $\omega=w$, $\varphi=p$ und $\psi=v$, auch werde alsdann $\int\frac{d\sigma}{\omega}=N''$ und $\int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi)=R''$, so erhält man

$$4gq=4gy-\frac{v^2w^2}{W^2}-2w\frac{dv}{dt}N'-4gR'+C \text{ und}$$

$$4gq' = 4gy' - \frac{v^2w^2}{W^2} - 2w\frac{dv}{dt}N'' - 4gR'' + C, \text{ oder}$$

$$4g(q - q' - y + y') = \frac{W^2 - w^2}{W^2}v^2 + 2w\frac{dv}{dt}(N'' - N') + 4g(R'' - R')$$

Die positiven Integrale N'' und R'' müssen so genommen werden, dafs solche mit $\sigma = o$ verschwinden und für $\sigma = ABMF = s$ ihren vollständigen Werth erhalten; dagegen werden die negativen Integrale N' und R' so genommen, dafs solche für $\sigma = o$ verschwinden, und für $\sigma = AB = S$ vollständig werden. Man erhält daher durch $N'' - N'$ und $R'' - R'$ die vollständigen Werthe von B bis F, welche man auch erhalten kann, wenn $\int\frac{d\sigma}{\omega}$ und $\int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi)$ so bestimmt werden, dafs solche für $\sigma = AB$ verschwinden und fur $\sigma = ABMF$ vollständig sind. Unter dieser Voraussetzung wird

$$\text{(III.)}\quad 4g(q - q' - y + y') = \frac{W^2 - w^2}{W^2}v^2 + 2w\frac{dv}{dt}\int\frac{d\sigma}{\omega} + 4g\int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi)$$

wobei aber wohl zu bemerken ist, dafs die Integrale so zu bestimmen sind, dafs solche für $\sigma = AB = S$ verschwinden, und für $\sigma = ABMF = s$ ihren vollständigen Werth erhalten.

§. 4.

Versteht man unter dem Momente der Trägheit einer bewegten Masse das Product aus dieser Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit, so ist das Moment der Trägheit der Elementarschicht bei $M'M' = \psi^2\omega d\sigma$, daher $\int\psi^2\omega d\sigma$ das Moment der Trägheit der gesammten Wassermasse, und weil v die Geschwindigkeit der Schicht $F'F' = w$ ist, so wird $\frac{\int\psi^2\omega d\sigma}{v^2}$ die nach der Lehre vom Moment der Trägheit auf die Fläche $F'F' = w$ reducirte Wassermasse. Aber $\psi^2\omega d\sigma = \psi^2\omega^2\frac{d\sigma}{\omega}$, und weil für einerlei Zeit $\psi\omega = vw$ unveränderlich ist, so erhält man $\int\psi^2\omega d\sigma = \psi^2\omega^2\int\frac{d\sigma}{\omega}$. Aus (III.) folgt, wenn daselbst $\int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi) = R$ gesetzt wird

$$\frac{dv}{2gdt} = \frac{q - q' - y + y' - \frac{W^2 - w^2}{W^2} \cdot \frac{v^2}{4g} - R}{w \int \frac{d\sigma}{\omega}}$$

$$= \frac{\gamma w \left[q - q' - y + y' - \frac{W^2 - w^2}{W^2} \cdot \frac{v^2}{4g} - R\right]}{\gamma \frac{v^2 w^2 \int d\sigma : \omega}{v^2}}, \text{ oder}$$

$$\text{(IV.)} \quad \frac{dv}{2gdt} = \frac{\gamma w \left[q - q' - y + y' - \frac{W^2 - w^2}{W^2} \cdot \frac{v^2}{4g} - R\right]}{\gamma \frac{\int \psi^2 . \omega d\sigma}{v^2}}$$

Oder wenn man $\frac{dv}{2gdt} = \frac{P}{M}$ setzt, so ist $\frac{dv}{2gdt}$ die beschleunigende Kraft des bewegten Wassers, und wenn man P die bewegende Kraft und M die bewegte Wassermasse nennt, so erhält man, wie bei festen Körpern, die beschleunigende Kraft, wenn die bewegende Kraft durch die bewegte Wassermasse dividirt wird. Um diese Ausdrücke bestimmter zu bezeichnen, so nenne man $\frac{W^2 - w^2}{W^2} \cdot \frac{v^2}{4g}$ die Druckhöhe, welche zur Erzeugung der Geschwindigkeit v in der vordersten Wasserschicht F'F' erfordert wird; alsdann ist bei bewegtem Wasser

1) die bewegende Kraft (P) dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche der vorderste Querschnitt w ist, und deren Höhe gefunden wird, wenn man von der algebraischen Summe aller Druckhöhen die Druckhöhe, welche zur Erzeugung der vordersten Geschwindigkeit v gehört, nebst derjenigen Druckhöhe abzieht, welche zur Ueberwältigung des Widerstandes an den Wänden des Gefäfses erfordert wird.

2) Die bewegte Masse (M) findet man, wenn das gesammte bewegte Wasser, nach der Lehre vom Momente der Trägheit, auf die Geschwindigkeit v des vordersten Querschnitts w reducirt wird.

Durch die richtige Anwendung dieses Satzes werden die schwierigen

und verwickelten hydraulischen Untersuchungen sehr erleichtert. Auch sieht man leicht ein, dafs mit den erforderlichen Abänderungen jeder andere Querschnitt statt des vordersten in Betrachtung gezogen werden konnte.

§. 5.

Wird im Gefäfs A'A'M'M'aa Figur 1. ein beständiger Zufluſs bei A'A' dergestalt vorausgesetzt, dafs der Querschnitt des Wassers bei A'A' unverändert bleibt, aber die Vorderfläche F'F' des Wassers noch innerhalb des Gefäfses falle, und man setzt den Querschnitt A'A' = A, so wird alsdann W = A und y = o, also nach III.

$$(V.)\quad 4g(q - q' + y') = \frac{A^2 - w^2}{A^2} v^2 + 2w \frac{dv}{dt} \int \frac{d\sigma}{\omega} + 4gR.$$

Läuft das Wasser durch die Oeffnung F'F' aus, und das Gefäfs behält den beständigen Zufluſs, so ist $y' = FG = h$ eine beständige Gröfse, und so bald die Bewegung des Wassers in den Beharrungsstand kommt, ist die Geschwindigkeit v im Querschnitte F'F' unveränderlich, also $dv = o$. Setzt man alsdann den Inhalt der Ausflufsöffnung F'F' = a, so ist auch w = a, daher

$$(VI.)\quad 4g(q - q' + h) = \frac{A^2 - a^2}{A^2} v^2 + 4gR,$$

und für q = q', oder wenn die den Kräften entsprechenden Höhen, welche beim Ein- und Ausfluſs auf die Oberfläche des Wassers wirken, einander gleich sind,

$$(VII.)\quad 4gh = \frac{A^2 - a^2}{A^2} v^2 + 4gR.$$

§. 6.

Das Gefäfs A'A'B'B' Figur 2., welches durch einen beständigen Zufluſs bis an A'A' voll Wasser erhalten werde, habe beim Ausfluſs eine plötzliche Verengung, so dafs das Wasser nicht in der ganzen Weite B'B', sondern nur durch die Oeffnung bb ausläuft. Man setze den Querschnitt A'A' = A, die Oeffnung bb = a, die Druckhöhe GH = h und die Geschwindigkeit des ausfliefsenden Wassers im Querschnitt bb = c. Wegen der plötzlichen Verengung bei B würde die Stetigkeit des bewegten Wassers unterbrochen, weil die Wasserschicht B'B' plötzlich in die Schicht bb übergehen müfste, wenn sich

sich nicht bei der wirklichen Bewegung in den Winkeln B', B stillstehendes Wasser bildete, wovon man sich leicht durch Versuche überzeugen kann; daher läfst sich annehmen, dafs in diesem Falle die Stetigkeit nicht unterbrochen werde. Dagegen beweifst die Erfahrung nach den entscheidenden Versuchen, welche in der Folge angeführt werden sollen, dafs nach der Verschiedenheit der Ausflufsöffnung, die Geschwindigkeit des durchfliefsenden Wassers, wegen der Contraction oder Zusammenziehung des Wasserstrahls um einen bestimmten Theil vermindert werde, weshalb durch die Gleichung (VI.)

$$vg\,(q-q'+h) = \frac{A^2-a^2}{A^2}\,v^2 + 4g\mathfrak{R}$$

die Geschwindigkeit v offenbar zu grofs gefunden wird, wenn solche für die wirkliche Geschwindigkeit c in der Oeffnung bb gelten soll. Wäre daher $\mu v = c$, wo $\mu < 1$ ist und eine solche beständige Zahl bedeutet, welche den Versuchen gemäfs der jedesmaligen Ausflufsöffnung entspricht, so bleibt die Gleichung ungeändert, wenn $\frac{c}{\mu}$ statt v gesetzt wird. Will man nun in vorstehender Gleichung $\frac{c}{\mu}$ statt v setzen, so mufs auch $f\left(\frac{\psi}{\mu}\right)$ in $\mathfrak{R}$ statt $f(\psi)$ gesetzt werden. Es ist daher allgemein unter den vorstehenden Voraussetzungen für jede Ausflufsöffnung

$$\text{(VIII.)}\quad 4g(q-q'+h) = \frac{A^2-a^2}{A^2}\,\frac{c^2}{\mu^2} + 4g\mathfrak{R}, \text{ wo } \mathfrak{R} = \int \frac{\varphi\, d\sigma}{\omega}\, f\left(\frac{\psi}{\mu}\right) \text{ ist.}$$

Hieraus folgt auch, dafs der allgemeine Ausdruck §. 4. (IV.) noch seine Anwendung behält, wenn daselbst $\frac{v}{\mu}$ statt v und $\frac{\psi}{\mu}$ statt ψ gesetzt wird. Die noch näher zu bestimmende Zahl μ wird hier der Contractionscoefficient genannt werden, und man wird hier, so wie bei allen folgenden Untersuchungen, voraussetzen, dafs beim Auslaufen des Wassers aus einer Oeffnung, wie bb, die Weite und Lage dieser Oeffnung so beschaffen sey, dafs man ohne Nachtheil die Tiefe ihres Mittelpunkts B unter dem Wasserspiegel A'A' als Druckhöhe $= h$ annehmen kann.

§. 7.

Befinden sich in einem Gefäfse F'D'B'B'D'F' Figur 3. mehrere Scheide-

wände mit Oeffnungen, und man setzt die Querschnitte des Gefäfses bei diesen Scheidewänden C'C', D'D', E'E', und bei F'F', = A, A', A'', A'''; die Oeffnungen bb, cc, dd, ee, = a, a', a'', a'''; die zugehörigen Geschwindigkeiten daselbst = c, c', c'', c'''; die Contractionscoefficienten bei a, a', a'', a''' = μ, μ', μ'', μ'''; die Druckhöhen auf den Oeffnungen bb, cc, dd, ee, F'F' = q, q', q'', q''', q^{IV}; die Vertikalhöhen des Wassers in jeder Abtheilung des Gefäfses oder BC'' = — h, CD'' = h', DE'' = h'', EF = h''', und für die Widerstände in jeder Abtheilung des Gefäfses R', R'', R''', R^{IV}; so erhält man nach (VIII), wenn die Abtheilung F'E'E'F' als ein besonderes Gefäfs angesehen wird,

$$4g(q^{IV} - q''' + h''') = \frac{(A''')^2 - (a''')^2}{(A''')^2} \cdot \frac{(c''')^2}{(\mu''')^2} + 4gR^{IV}$$

und für jede folgende Abtheilung

$$4g(q''' - q'' + h'') = \frac{(A'')^2 - (a'')^2}{(A'')^2} \cdot \frac{(c'')^2}{(\mu'')^2} + 4gR'''$$

$$4g(q'' - q' + h') = \frac{(A')^2 - (a')^2}{(A')^2} \cdot \frac{(c')^2}{(\mu')^2} + 4gR''$$

$$4g(q' - q - h) = \frac{A^2 - a^2}{A^2} \cdot \frac{c^2}{\mu^2} + 4gR'.$$

Weil $ac = a'''c'''$ also $c''' = \frac{ac}{a'''}$ ist, so erhält man

$$\frac{(A''')^2 - (a''')^2}{(A''')^2} \cdot \frac{(c''')^2}{(\mu''')^2} = \frac{1}{(\mu''')^2}\left(\frac{1}{(a''')^2} - \frac{1}{(A''')^2}\right) a^2c^2. \text{ Ferner}$$

$$\frac{(A'')^2 - (a'')^2}{(A'')^2} \cdot \frac{(c'')^2}{(\mu'')^2} = \frac{1}{(\mu'')^2}\left(\frac{1}{(a'')^2} - \frac{1}{(A'')^2}\right) a^2c^2$$

u. s. w.,

daher, wenn die vorstehenden vier Gleichungen addirt werden, und man setzt:

$$E = \frac{1}{\mu^2a^2} + \frac{1}{(\mu'a')^2} + \frac{1}{(\mu''a'')^2} + \frac{1}{(\mu'''a''')^2}$$

$$F = \frac{1}{\mu^2A^2} + \frac{1}{(\mu'A')^2} + \frac{1}{(\mu''A'')^2} + \frac{1}{(\mu'''A''')^2}$$

$H = h''' + h'' + h' - h$ und

$R = R' + R'' + R''' + R^{IV}$, so findet man

$$4g(q^{IV} - q + H) = (E - F)\,a^2c^2 + 4gR.$$

Oder wenn der Druck auf die Oberfläche F'F' und bb von gleicher Höhe, also $q^{IV} = q$ ist, und h statt H gesetzt wird,

(IX) $4gh = (E - F)\, a^2 c^2 + 4gR.$

§. 8.

Will man in besondern Fällen von dem zuletzt gefundenen allgemeinen Ausdruck Gebrauch machen, so müssen sowohl die Contractionscoefficienten μ, μ', μ''... in E und F, als auch diejenigen beständigen Gröfsen der Funktion R, welche vom Zusammenhange der Wassertheile abhängen, bekannt seyn.

Zur nähern Ausmittelung der Contractionscoefficienten wird es für die am meisten vorkommenden Fälle hinlänglich seyn, nur die beiden Fälle von einander zu unterscheiden, wo sich Wasser durch eine Oeffnung in einer dünnen Wand oder durch eine kurze prismatische Ansatzröhre bewegt, deren Länge etwa der dreifachen mittlern Weite der Oeffnung gleich ist. Der letzte Fall findet auch da statt, wo sich das Wasser durch eine prismatische Oeffnung in einer dicken Wand bewegt. Ueber beide Fälle haben *Bossüt* (*Traité théorique et expérimental d'Hydrodynamique. Nouv. Édit. à Paris, l'an IV.*) und *Joseph Thérèse Michelotti* (*Mémoires de l'Académie royale des sciences. An.* 1784 — 85. *II. Partie. à Turin* 1786.) zureichend genaue Versuche angestellt, so dafs es hier nur darauf ankommt, aus diesen Versuchen die nöthigen Coefficienten abzuleiten. Was besonders die Michelottischen Versuche betrifft, so unterscheiden sie sich dadurch sehr vortheilhaft von den Bossütschen, dafs bei ihnen die Druckhöhen des Wassers im Behälter bis auf mehr als 20 Pariser Fufs wachsen, und dafs so bedeutende Oeffnungen dabei vorkommen, durch welche in der Minute beinahe 200 Pariser Kubikfufs Wasser abgeflossen sind. Sämmtliche Versuche sind mit solchen prismatischen Behältern angestellt, deren Querschnitt A gegen die Ausflufsöffnung a sehr grofs war, so dafs man die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser im Behälter bewegte, als unbedeutend annehmen, und den Widerstand, welcher vom Zusammenhange der Wassertheile mit den Wänden des Behälters herrührt, oder $R = o$ setzen kann. Man erhält daher nach §. 7.

$4gh = (E - F)\, a^2 c^2$; oder weil hier

$E = \frac{1}{\mu^2 a^2}$ und $F = \frac{1}{\mu^2 A^2}$ ist,

$$4gh = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}\right)a^2c^2 = \frac{\mu^2}{c^2}\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Dies giebt für $\frac{a^2}{A^2} = 0$; $c = 2\mu\sqrt{g}\sqrt{h}$,

und wenn M die in jeder Sekunde abfliefsende Wassermenge bezeichnet, so ist $M = ac$, daher

$M = 2\mu a\sqrt{g}\sqrt{h}$, und hieraus der Contractionscoefficient

$$\mu = \frac{M}{2a\sqrt{g}\sqrt{h}}.$$

In den beiden folgenden Tafeln sind die Michelotti- und Bossütschen Versuche für Oeffnungen in dünnen Wänden zusammengestellt, und nach der vorstehenden Formel ist in der letzten Vertikalspalte dieser Tafeln der Werth μ für den Contractionscoefficienten bestimmt worden, indem man $g = 181,176$ Pariser Zoll setzte, weil sich sämmtliche Abmessungen in den Tafeln auf dieses Zollmaafs beziehen. Noch ist zu bemerken, dafs man nur diejenigen Versuche von Michelotti aufgenommen hat, bei welchen sich kein Vorsprung in der Nähe der Ausflufsöffnung befand.

Versuche mit rechtwinklichten Oeffnungen in dünnen Wänden.

Beobachter.	Nro.	Der Ausflufsöffnung			Druckhöhe.	Wassermenge für jede Sekunde.	Contractionscoefficient.
		Länge.	Breite.	Inhalt.			
		Zoll.	Zoll.	□Zoll.	Zoll.	Kubikzoll.	μ.
B.	1	1, 000	0, 250	0, 2500	140, 833	48, 883	0, 61138
M.	2	1, 000	1, 000	1, 0000	140, 833	149, 320	0, 60792
B.	3	1, 000	1, 000	1, 0000	83, 250	196, 950	0, 61517
M.	4	1, 000	1, 000	1, 0000	140, 643	193, 857	0, 60722
M.	5	1, 000	1, 000	1, 0000	252, 250	259, 590	0, 60715
M.	6	2, 000	2, 000	4, 0000	82, 754	590, 608	0, 60293
M.	7	2, 000	2, 000	4, 0000	82 905	591, 145	0, 60293
B.	8	2, 000	2, 000	4, 0000	140, 833	789, 350	0, 61770
M.	9	2, 000	2, 000	4, 0000	140, 985	770, 044	0, 60226
M.	10	2, 000	2, 000	4, 0000	141, 350	771, 059	0, 60227
M.	11	2, 000	2, 000	4, 0000	250, 025	1025, 460	0, 60226
M.	12	2, 000	2, 000	4, 0000	250, 950	1027, 550	0, 60226
M.	13	3, 017	3, 017	9, 1007	82, 250	1568, 930	0, 61625
M.	14	3, 017	3, 017	9, 1007	83, 333	1377, 680	0, 61601
M.	15	3, 002	3, 002	9, 0104	140, 832	1781, 800	0, 61899
M.	16	3, 002	3, 002	9, 0104	141, 466	1785, 810	0, 61915
M.	17	3, 004	3, 004	9, 0220	249, 796	2365, 030	0, 61862
M.	18	3, 004	3, 004	9, 0220	251, 770	2374, 550	0, 61616

Versuche mit kreisförmigen Oeffnungen in dünnen Wänden.

Beobachter.	Nro.	Durchmesser der Oeffnung.	Inhalt der Oeffnung.	Druckhöhe.	Wassermenge für jede Sekunde.	Contractionscoefficient.
		Zoll.	□ Zoll.	Zoll.	Kubikzoll.	μ.
B.	19	0,500	0,1963	48,000	22,550	0,62451
B.	20	0,500	0,1963	108,000	33,633	0,62097
B.	21	0,500	0,1963	140,833	38,517	0,62275
B.	22	1,000	0,7854	48,000	90,600	0,61850
M.	23	1,000	0,7854	81,250	117,546	0,61677
M.	24	1,000	0,7854	81,420	118,767	0,61874
B.	25	1,000	0,7854	108,000	135,583	0,61705
B.	26	1,000	0,7854	140,833	154,683	0,61648
M.	27	2,002	3,1485	81,151	463,613	0,60719
M.	28	2,002	3,1485	82,887	469,250	0,60810
B.	29	2,000	3,1416	140,833	620,050	0,61779
M.	30	3,001	7,0732	82,732	1060,796	0,61249
M.	31	3,001	7,0732	140,875	1382,078	0,61153
M.	32	3,001	7,0732	249,855	1795,927	0,59669
M.	33	6,000	28,2743	77,500	4152,000	0,61963
M.	34	6,000	28,2743	78,005	4165,000	0,61956
M.	35	6,000	28,2743	135,000	5471,744	0,61842
M.	36	6,000	28,2743	135,250	5476,555	0,61868

Nimmt man unter den verschiedenen für μ gefundenen Werthen eine Mittelzahl, so kann man mit hinlänglicher Genauigkeit bei vorkommenden Fällen $\mu = 0{,}619$, also $\mu^2 = 0{,}38316$ annehmen. Auch beweisen diese Versuche, dafs man zureichend genau μ als eine beständige Zahl ansehen kann, ob es gleich sehr wahrscheinlich ist, und durch die von einerlei Beobachter angestellten Versuche gerechtfertigt wird, dafs μ dergestalt von der Druckhöhe, dem Umfange und dem Querschnitte der Ausflufsöffnung abhängt, dafs unter übrigens gleichen Umständen μ desto gröfser wird, wenn der Querschnitt der Oeffnung wächst und ihr Umfang nebst der Druckhöhe abnehmen.

Diese Veränderlichkeit ist aber so unbedeutend, dafs solche hier aus der Rechnung wegbleiben kann; auch fehlt es noch an genauern und vielfältigeren Versuchen, um nach denselben diese Abhängigkeit bestimmter anzugeben.

Ueber den Ausflufs durch kurze Ansatzröhren haben ebenfalls Bossüt und J. T. Michelotti schätzbare Versuche angestellt, wohin man auch einige von Venturi (*Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale. à Paris* 1797.) rechnen kann. Die nachstehende Tafel enthält die Zusammenstellung dieser Versuche, wobei zu bemerken ist, dafs nur die Ansatzröhren, deren sich Michelotti bediente, einen quadratförmigen Querschnitt von drei Zoll Seitenlänge hatten, die übrigen Röhren aber cylindrisch waren. In der letzten Spalte dieser Tafel ist μ bestimmt; auch beziehen sich sämmtliche Abmessungen in derselben auf Pariser Zollmaafs.

Versuche mit kurzen prismatischen Ansatzröhren.

Beobachter.	Nro.	Durchmesser der Röhre.	Länge der Röhre.	Inhalt vom Querschnitt der Röhre.	Druckhöhe.	Wassermenge in jeder Sekunde.	Contractionscoefficient.
		Zoll.	Zoll.	□ Zoll.	Zoll.	Kubikzoll.	μ.
B.	1	0, 500	2, 00	0, 1963	24, 000	20, 567	0, 78672
B.	2	0, 500	2, 00	0, 1963	46, 000	28, 150	0, 78541
B.	3	0, 833	2, 00	0, 5454	24, 000	56, 700	0, 78828
B.	4	0, 833	2, 00	0, 5454	46, 000	78, 383	0, 76713
B.	5	1, 000	1, 50	0, 7854	140, 833	202, 800	0, 80825
B.	6	1, 000	2, 00	0, 7854	140, 833	203, 133	0, 80957
B.	7	1, 000	4, 00	0, 7854	140, 833	204, 567	0, 81530
V.	8	1, 500	4, 75	1, 7671	27, 500	203, 303	0, 81495
V.	9	1, 500	4, 50	1, 7671	32, 500	222, 967	0, 82218
V.	10	1, 500	5, 00	1, 7671	32, 500	222, 967	0, 82218
M.	11	3, 000	8, 00	8, 9993	80, 333	1768, 979	0, 81467
M.	12	3, 000	8, 00	8, 9993	140, 250	2301, 942	0, 80232
M.	13	3, 000	8, 00	8, 9993	247, 750	3059, 503	0, 80253

Als Mittel aus diesen Versuchen erhält man für kurze prismatische Ansatzröhren $\mu = 0{,}8125 = \frac{13}{16}$, also $\mu^2 = 0{,}660156$; wobei aber ganz ähnliche Bemerkungen wie bei den Contractioncoefficienten der Oeffnungen in dünnen Wänden gelten.

§. 9.

Am gleich weiten Behälter ABCD Figur 4. befinde sich eine cylindrische Röhre DEF, und bei F fliefse eben so viel Wasser aus, als in den bis AB voll erhaltenen Behälter zufliefst. Man setze den Querschnitt des Behälters $= A$, den Umfang dieses Querschnitts $= P$, die Höhe $AE = L$; ferner den Querschnitt der Röhre $= a$, seinen Umfang $= p$, die Länge der Röhre $= l$; die gesammte Druckhöhe $FG = h$, und die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser unveränderlich bei FG ausläuft $= c$, so ist nach §. 7., weil bei F keine Contraction statt findet, also daselbst $\mu = 1$ wird,

$$E = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\mu^2 a^2} \text{ und } F = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\mu^2 A^2} \text{ also } E - F = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}\right), \text{ daher}$$

$$4gh = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}\right) a^2 c^2 + 4gR \text{ oder}$$

$$4\mu^2 gh = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) c^2 + 4\mu^2 gR.$$

Der Widerstand des Wassers an den Wänden der Röhre DEF sei R', an den Wänden des Gefäfses ABCD $= R''$, also $R = R' + R''$. Ferner sei C die Geschwindigkeit des Wassers im Gefäfse, so erhält man nach §. 2 und 3., weil hier φ und ω beständige Gröfsen sind

$$\int \frac{\varphi d\sigma}{\omega}(BC + B'C^2) = \frac{PL}{A}(BC + B'C^2) = R'' \text{ und}$$

$$\int \frac{\varphi d\sigma}{\omega}(Bc + B'c^2) = \frac{pl}{a}(Bc + B'c^2) = R', \text{ also weil } C = \frac{ac}{A} \text{ ist,}$$

$$R = \frac{pl}{a}(Bc + B'c^2) + \frac{PL}{A}\left(B\frac{a}{A}c + B'\frac{a^2}{A^2}c^2\right), \text{ daher}$$

$$(X.)\ 4\mu^2 gh = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) c^2 + 4\mu^2 g\frac{pl}{a}(Bc + B'c^2) + 4\mu^2 g\frac{PL}{A}\left(B\frac{a}{A}c + B'\frac{a^2}{A^2}c^2\right)$$

und

und so bald die unbestimmten Coefficienten B, B′ bekannt sind, so kann hieraus die Geschwindigkeit c für jeden besondern Fall leicht entwickelt werden.

Bei einem sehr weiten Gefäfse verschwindet a^2 gegen A^2, und wenn überdies die Röhre eine beträchtliche Länge hat, so kann man den Widerstand, welcher vom Zusammenhange des Wassers mit den Wänden des Behälters ABCD entsteht, weglassen; dies giebt $\frac{a^2}{A^2} = o$ und $R'' = o$, daher ist alsdann

$$4\mu^2 gh = c^2 + 4\mu^2 g \frac{pl}{a}(Bc + B'c^2) \text{ oder}$$

$$\text{(XI.)} \quad \frac{a}{pl}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) = Bc + B'c^2.$$

In den *Recherches sur la théorie des eaux courantes* (*Paris* 1804.) findet Herr Prony (p. 155.), wenn die dortigen Zeichen mit den hier gebrauchten vertauscht werden,

$$\frac{ah}{pl} = Bc + B'c^2$$

wo offenbar das sehr wesentliche Glied $\frac{ac^2}{4\mu^2 gpl}$ vernachläfsigt ist. Der Mangel dieses Gliedes führt auf die ungereimte Folge, dafs für $l = o$ die Geschwindigkeit $c = \infty$ werden mufste, da doch alsdann $c = 2\mu\sqrt{gh}$ ist.

Setzt man den Durchmesser der cylindrischen Röhre DEF $= d$, so ist $p = \pi d$ (wo π die Zahl 3,14159.... bezeichnet) und

$$a = \tfrac{1}{4}\pi d^2 \text{ also } \frac{a}{p} = \tfrac{1}{4} d, \text{ daher nach (XI.)}$$

$$\frac{d}{4l}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) = Bc + B'c^2.$$

Sollen nun die Coefficienten B und B′ auf das Maafs eines jeden Landes ohne Abänderung passen, so mufs die vorstehende Gleichung in allen Gliedern gleiche Dimensionen enthalten. Zu diesem Ende setze man die noch zu bestimmende Gröfse $B' = \frac{\beta}{g}$, wo g die Höhe für den freien Fall

in der ersten Sekunde, und B, β, abstracte Zahlen bezeichnen, so erhält man

$$\text{(XII.)}\quad \frac{d}{4l}\left(h-\frac{c^2}{4\mu^2 g}\right)=Bc+\beta\frac{c^2}{g}$$

da alsdann $\mu^2 = 0{,}660156$, und für französisches Zollmaafs $g = 181{,}176$, oder für preufsisches Fufsmaafs $g = 15\frac{5}{8}$ ist.

Hiernach findet man, so bald die Coefficienten B, β bekannt sind, die Geschwindigkeit

$$c=\frac{-1\pm\sqrt{\left[1+\left(\frac{\beta l}{B^2 g}+\frac{d}{16\mu^2 B^2 g}\right)dh\right]}}{2\left(\frac{\beta l}{Bg}+\frac{d}{16\mu^2 Bg}\right)}$$

wo nur die positive Wurzel genommen werden kann, weil kein negativer Werth für c gesucht wird.

Untersuchungen über die Bewegung des Wassers, wenn auf die Contraction, welche beim Durchgange durch verschiedene Oeffnungen statt findet und auf den Widerstand, welcher die Bewegung des Wassers längs den Wänden der Behältnisse verzögert, Rücksicht genommen wird.

Fortsetzung der vorhergehenden Abhandlung. *)

§. 10.

Zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten B, B' aus zureichend genauen und vollständigen Versuchen, wird es genügen, die bis jetzt noch nicht übertroffenen Versuche von Couplet (*Recherches sur le mouvement des eaux. Mém. de l'Acad. de Paris, Année* 1732.), Bossüt (*Traité d'Hydrodynamique, Tome II. Paris l'An IV.*) und Büat (*Principes d'Hydraulique, Tome I. Paris* 1786.) zusammen zu stellen, da unter denselben alle die Fälle enthalten sind, welche in der Ausübung nur vorkommen können. Röhren von einem bis zu 15 Zoll Durchmesser, von 10 bis 7000 Fufs Länge, und Geschschwindigkeiten des ausfliefsenden Wassers von $1\frac{1}{2}$ bis 84 Zoll enthalten alles, was in dieser Absicht zu wünschen ist. Solche Röhren, deren Durchmesser noch weniger als einen Zoll beträgt, konnten bei der Unsicherheit, mit welcher ihre innere Weiten bestimmt werden, um so mehr weg-

*) Vorgelesen den 17. October 1811.

bleiben, da sie in der Anwendung beinahe gar nicht vorkommen, und die bedeutende Zahl von 51 Versuchen, welche in der folgenden Tafel §. 11. zusammengestellt sind, zureichend ist, die unbekannten Coefficienten genau genug auszumitteln. Nur die Art dieser Ausmittelung ist nicht gleichgültig, weil es einleuchtet, dafs bei den unvermeidlichen Unvollkommenheiten, welchen die Beobachtungen über die Bewegung des Wassers, so wie andere zusammengesetzte Beobachtungen, unterworfen sind, keine vollkommen genaue Uebereinstimmung unter den Versuchen erwartet werden kann, weshalb ein jeder einzelne Versuch andere Werthe für die Coefficienten B, B' geben wird.

Es lassen sich eine Menge Voraussetzungen aufstellen, welche dazu dienen können, aus sämmtlichen Versuchen Mittelwerthe für B, B' abzuleiten, und da hier zwei unbekannte Gröfsen zu bestimmen sind, so müssen wenigstens aus den Versuchen zwei Gleichungen gebildet werden. Wollte man einzelnen Versuchen einen höhern Werth als allen übrigen beilegen, so könnten diese zur Bildung der Gleichungen dienen, oder wenn man annimmt, dafs alle Versuche mit gleicher Sorgfalt angestellt sind, so kann man voraussetzen, dafs die algebraische Summe aller Abweichungen zusammen Null seyn müsse, wenn die gegebenen Abmessungen aus den Versuchen in die gefundene Gleichung

$$\frac{d}{4l}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) - Bc - B'c^2 = o$$

gesetzt werden.

Eben so könnte man die Versuche in mehrere Abtheilungen bringen und für jede derselben die algebraische Summe der Abweichungen $= o$ setzen. Auch läfst sich annehmen, dafs die gröfste Abweichung, ohne auf das Zeichen zu sehen, so klein wie möglich werde, oder auch, dafs die Summe aller Abweichungen von den Versuchen, sämmtlich positiv genommen, ein Kleinstes seyn soll. Die zuerst angeführten Voraussetzungen geben gröfstentheils bei einzelnen Versuchen bedeutende Abweichungen, welches weniger zu erwarten ist, wenn man den gröfsten Fehler so klein wie möglich annimmt. Aber in diesem Falle werden die unbekannten Coefficienten vorzüglich durch die am meisten abweichende Versuche bestimmt, daher es hier zweckmäfsiger ist, die Voraussetzung anzunehmen, dafs die Summe aller Fehler oder Abweichungen, sämmtlich positiv genommen, so klein wie möglich werde. Wird dieses als erste Be-

dingung festgesetzt, so kann auch noch eine zweite Voraussetzung angenommen werden, wobei es am natürlichsten zu seyn scheint, die algebraische Summe aller Abweichungen = o zu setzen. Allein hiebei tritt für den vorliegenden Fall der besondere Umstand ein, dafs bei denjenigen Versuchen, aus welchen die Werthe für B und B′ bestimmt werden sollen, die Geschwindigkeiten von $1\frac{1}{2}$ bis 84 Zoll wachsen und dafs eine absolute Abweichung von einem halben Zoll bei 84 Zoll zwar nicht sehr bedeutend ist, bei $1\frac{1}{2}$ Zoll aber den dritten Theil der ganzen Geschwindigkeit beträgt. Es kommt also vielmehr noch darauf an, dafs für jeden besondern Versuch die Abweichungen der berechneten Geschwindigkeiten nur einen geringen Theil der beobachteten Geschwindigkeiten betragen, welches nothwendig dadurch erlangt werden kann, wenn man vorzugsweise die Versuche mit kleinen Geschwindigkeiten zur Bildung der zweiten Hauptgleichung benutzt. Hiezu eigneten sich vorzüglich die beiden ersten Versuche der im folgenden §. befindlichen Tafel, bei welcher man eine solche Anordnung getroffen hat, dafs auf die kleinsten beobachteten Geschwindigkeiten die gröfsern folgen.

Nach der Feststellung beider Voraussetzungen, unter welchen B und B′ bestimmt werden soll, kann in Absicht des Beweises für das Verfahren zur Auffindung dieser kleinsten Summe aller Abweichungen, auf die Mechanik des Himmels von Laplace (Zweiter Theil §. 40.) verwiesen werden. Mit Rücksicht auf die zweite Voraussetzung ist hier folgendes zu bemerken. Man setze:

$$\frac{d}{4lc}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) = f,$$

so ist die allgemeine Gleichung:

$$f - B - B'c = o.$$

Aus sämmtlichen Versuchen berechne man für die verschiedenen Geschwindigkeiten c′, c″, c‴, ... die zugehörigen Werthe f′, f″, f‴, ... welche in der folgenden Tafel aufgeführt sind, und es sey:

$$f' - B - B'c' = \delta'$$
$$f'' - B - B'c'' = \delta''$$
$$f''' - B - B'c''' = \delta'''$$
$$\ldots\ldots$$

wo δ', δ'', ... die Abweichungen bezeichnen, welche durch die Berechnung entstehen. Sind nun c', c'' die beiden kleinsten Geschwindigkeiten, so ist nach der zweiten Voraussetzung $\delta' + \delta'' = o$ also

$$\frac{f' + f''}{2} - B - B' \frac{c' + c''}{2} = o,$$ oder wenn man

$$\frac{f' + f''}{2} = F \text{ und } \frac{c' + c''}{2} = C \text{ setzt}$$

$$F - B - B'C = o.$$

Wird diese Gleichung von jeder der vorstehenden abgezogen, so ist

$$f' - F - B'(c' - C) = \delta'$$
$$f'' - F - B'(c'' - C) = \delta''$$
$$f''' - F - B'(c''' - C) = \delta'''$$

hierauf suche man die Quotienten $\frac{f' - F}{c' - C}$; $\frac{f'' - F}{c'' - C}$; $\frac{f''' - F}{c''' - C}$; ...., ordne solche nach ihrer Gröfse, indem man mit dem gröfsten positiven anfängt und beim gröfsten negativen aufhört; dies gebe folgende Reihe:

$$\frac{M_{,}}{N_{,}}; \frac{M_{,,}}{N_{,,}}; \ldots \frac{M_k}{N_k} \ldots \frac{M_n}{N_n}.$$

Man nehme alle Nenner dieser Reihe positiv, und es sey:

$$N_{,} + N_{,,} + \ldots N_k \ldots + N_n = S$$
$$N_{,} + N_{,,} + \ldots \ldots + N_{k-1} < \tfrac{1}{2}S$$
$$N_{,} + N_{,,} + \ldots + N_{k-1} + N_k > \tfrac{1}{2}S$$

so mufs, wenn die Summe aller Abweichungen δ, δ'', δ''', ..., positiv genommen, ein Kleinstes werden soll,

$B' = \frac{M_k}{N_k}$ seyn, wodurch man

$$B = F - \frac{M_k}{N_k} C \text{ findet.}$$

Nach den Angaben auf der nachstehenden Tafel ist nun

$F = o,000\,036\,0155$ und $C = 1,79985$.

Werden hiernach die Quotienten $\frac{f'-F}{c'-C}$; $\frac{f''-F}{c''-C}$; .... bestimmt und in Absicht ihrer Gröfse geordnet, so folgen sie in Bezug auf die Nummern der Versuche der folgenden Tafel in der hier stehenden Ordnung:

Nro. 1. 2. 3. 9. 10. 5. 11. 13. 6. 16. 18. 8. 15. 7. 14. 43. 20. 22.
17. 26. 24. 28. 27. 19. 12. 23. 36. 30. 32. 21. 29. 38. 25. 35. 31. 33.
41. 37. 40. 34. 39. 42. 45. 46. 44. 48. 47. 50. 49. 51. 4.

Die Summe aller Nenner positiv genommen, ist = 1161, 989, also $\frac{1}{2}S = 580, 994$, und man findet, wenn die Nenner in der vorstehenden Ordnung bis zum 41sten Versuch, diesen mit inbegriffen, addirt werden, die Zahl $562, 937 < \frac{1}{2}S$, wenn man aber noch den Nenner des 37sten Versuchs dazu addirt, $590, 352 > \frac{1}{2}S$, daher ist der Quotient, welcher dem 37sten Versuche entspricht oder

$$B' = 0, 000\,007\,588\,182,$$

und weil $B = F - B'C$ ist, so erhält man

$$B = 0, 000\,022\,357\,912.$$

Da sich nun alle Abmessungen der nachstehenden Tafel auf pariser Zollmaafs beziehen, so ist hier $g = 181, 176$, daher $B'g$ oder

$$\beta = 0, 001\,374\,787$$

$$\frac{\beta}{B} = 61, 490\,355$$

$$\frac{\beta}{B^2} = 2750272, 9$$

$$\frac{1}{16\mu^2 B} = 4234, 4968$$

$$\frac{1}{16\mu^2 B^2} = 189395917.$$

Hiernach findet man die mittlere Geschwindigkeit des Wassers einer Röhrenleitung in dem Maafse eines jeden Landes, oder

$$c = \frac{-1 + \sqrt{\left[1^2 + (2750273\,l + 189395917\,d)\frac{dh}{g}\right]}}{(122, 98\,l + 8, 69\,d)\frac{1}{g}}$$

Wird $g = 181, 176$ gesetzt, so erhält man für pariser Zollmaafs

$$c = \frac{-1 + \sqrt{[1^2 + (15180\,l + 1045370\,d)\,dh]}}{0, 6788\,l + 46, 74\,d}$$

oder wenn man $g = 15\frac{5}{8}$ Fuſs annimmt, so findet man für rheinländisches oder preuſsisches Fuſsmaaſs

$$c = \frac{-1 + \sqrt{[1^2 + (176017\,l + 12121336\,d)\,dh]}}{7,87 + 542\,d}$$

§. 11.

Um zu übersehen, mit welcher Genauigkeit in vorkommenden Fällen die Geschwindigkeiten des durch Röhrenleitungen bewegten Wassers, nach den zuletzt angegebenen allgemeinen Ausdrücken, bestimmt werden können, sind in der nachstehenden Tafel neben den durch Erfahrung gefundenen Geschwindigkeiten zugleich diejenigen angegeben, welche nach der für pariser Zollmaaſs gefundenen Formel berechnet sind, welchen noch die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Geschwindigkeiten beigefügt worden; weil aber diese keine so vollständige Uebersicht von der Genauigkeit der berechneten Werthe gewähren, als wenn man angiebt, was dieser Unterschied für ein Theil von der beobachteten Geschwindigkeit ist, oder wenn man den gefundenen Unterschied durch die beobachtete Geschwindigkeit dividirt, so ist auch noch diese letzte Spalte der folgenden Tafel berechnet worden.

Die Bedeutung der zur Abkürzung in der folgenden Tafel eingeführten Buchstaben ist:

d, Durchmesser der Röhre,

l, Länge derselben.

h, Druckhöhe, oder Abstand des Wasserspiegels im Behälter, vom Mittelpunkt der Ausflufsöffnung,

$$f = \frac{d}{4lc}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right)$$

c, Geschwindigkeit des Wassers nach der Erfahrung,

[c] Berechnete Geschwindigkeit nach der Formel

$$\frac{-1 + \sqrt{[1^2 + (151801 + 1045370\,d)\,dh]}}{0,6788\,l + 46,74\,d}$$

δ, Unterschied zwischen der beobachteten und berechneten Geschwindigkeit $= c - [c]$,

$\frac{\delta}{c}$ oder Angabe desjenigen Theils der beobachteten Geschwindigkeit, welcher dem gefundenen Unterschied δ entspricht.

Tafel,

Tafel, welche die Versuche und Berechnungen über die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen enthält.

Beobachter.	Nro.	d	l	h	f	c	[c]	δ	$\frac{\delta}{c}$
Büat	1	1	737	0, 15	0,0000491	1, 589	1, 472	+0,117	0, 079
Coupl.	2	5	84240	5, 583	0,0000827	2, 011	2, 144	—0,133	0, 062
—	3	5	84240	11 $\frac{1}{3}$	0,0001679	3, 154	3, 454	—0,300	0, 087
Büat	4	1	737	0, 5	0,0001603	3, 613	3, 370	+0,253	0, 075
Coupl.	5	5	84240	16, 75	0,0002480	4, 127	4, 429	—0,302	0, 068
—	6	5	84240	21, 083	0,0003121	4, 806	5, 106	—0,300	0, 059
—	7	5	84240	24	0,0003553	5, 213	5, 525	—0,312	0, 056
—	8	5	84240	25	0,0003701	5, 323	5, 663	—0,340	0, 060
Büat	9	1	158, 5	0, 7	0,0009787	8, 689	9, 608	—0,919	0, 096
—	10	1	737	4, 2	0,0015474	10, 441	11, 825	—1,38	0, 117
—	11	1	737	4, 2	0,0015459	10, 671	11, 825	—1,154	0, 098
Bossüt	12	1	600	4	0,0015365	12, 225	12, 777	—0,554	0, 044
—	13	1 $\frac{1}{3}$	2160	12	0,0018009	12, 562	13, 949	—1,387	0, 099
Büat	14	1	737	5, 95	0,0018859	13, 515	14, 281	—0,966	0, 067
Bossüt	15	1 $\frac{1}{3}$	1800	12	0,0021457	14, 066	14, 878	—0,812	0, 055
Büat	16	1	737	7, 78	0,0024772	15, 112	16, 538	—1,426	0, 086
Bossüt	17	1 $\frac{1}{3}$	1440	12	0,0026519	16, 128	17, 308	—1,180	0, 068
Büat	18	1	737	8, 96	0,0028513	16, 284	17, 839	—1,555	0, 087
Bossüt	19	2, 01	2160	12	0,0026613	16, 377	17, 261	—0,884	0, 051
Büat	20	1	737	8, 96	0,0028454	16, 625	17, 839	—1,214	0, 068
Bossüt	21	2, 01	1800	12	0,0031545	18, 304	18, 924	—0,620	0, 033
—	22	1 $\frac{1}{3}$	2160	24	0,0035885	18, 896	20, 266	—1,370	0, 067
—	23	1 $\frac{1}{3}$	1080	12	0,0034722	18, 943	19, 133	—0,190	0, 010
Büat	24	1	737	12, 32	0,0038958	19, 991	20, 135	—0,144	0, 007
Bossüt	25	2, 01	1440	12	0,0038748	20, 707	21, 134	—0,427	0, 020
Büat	26	1	737	15, 7	0,0043555	20, 970	22, 358	—1,388	0, 062
Bossüt	27	1 $\frac{1}{3}$	1800	24	0,0042732	21, 032	22, 241	—1,209	0, 054
Büat	28	1	737	14, 6	0,0046139	21, 856	23, 129	—1,273	0, 055
Bossüt	29	1	600	12	0,0045675	22, 282	23, 025	—0,745	0, 032

Fortsetzung der Tafel.

Beobachter.	Nro.	d	l	h	f	c	[c]	δ	$\frac{\delta}{c}$
Bossüt	50	$1\frac{1}{3}$	720	12	0,0050275	23, 360	24, 195	—0, 833	0, 034
—	51	2, 01	1080	12	0,0050322	23, 806	24, 266	—0, 460	0, 019
—	52	$1\frac{1}{3}$	1440	24	0,0052767	24, 004	24, 877	—0, 873	0, 035
—	53	2, 01	2160	24	0,0052860	24, 731	24, 946	—0, 215	0, 009
—	54	2, 01	1800	24	0,0062597	27, 470	27, 112	+0, 358	0, 013
—	55	$1\frac{1}{3}$	1080	24	0,0068989	28, 075	28, 656	—0, 581	0, 020
Büat	56	1	737	23, 7	0,0074566	28, 669	29, 809	—1, 140	0, 038
Bossüt	57	2, 01	720	12	0,0071299	29, 215	29, 215	0, 000	0, 000
Büat	58	1	138,5	6	0,0075820	29, 541	29, 907	—0, 566	0, 019
Bossüt	59	2, 01	1440	24	0,0076785	30, 896	30, 416	+0, 480	0, 015
—	60	$1\frac{1}{3}$	360	12	0,0089831	35, 160	32, 969	+0, 191	0, 006
—	61	$1\frac{1}{3}$	720	24	0,0099611	34, 473	34, 732	—0, 259	0, 008
—	62	2, 01	1080	24	0,0099227	35, 765	34, 835	+0, 930	0, 027
Coupl.	63	18	45200	145,083	0,0147789	39, 159	42, 591	—3, 432	0, 086
Bossüt	64	2, 01	360	12	0,0120064	40, 322	37, 108	+3, 214	0, 087
—	65	2, 01	720	24	0,0140527	43, 000	41, 811	+1, 189	0, 029
—	66	$1\frac{1}{3}$	360	24	0,0176655	48, 534	47, 095	+1, 439	0, 031
Büat	67	1	117	18	0,0232761	58, 310	55, 568	+2, 742	0, 049
—	68	1	138,5	20, 95	0,0247675	58, 808	56, 718	+2, 090	0, 037
Bossüt	69	2, 01	360	24	0,0253772	58, 903	55, 418	+3, 485	0, 063
Büat	70	1	117	$26\frac{2}{3}$	0,0342743	71, 301	67, 833	+3, 468	0, 051
—	71	1	117	36	0,0446957	84, 945	78, 963	+5, 982	0, 076

§. 12.

Wird nicht die gröfste Genauigkeit bei der Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers erfordert, so kann man ohne Nachtheil den Coefficienten $B = o$, also

$$\frac{d}{4l}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) = B' c^2 \text{ oder } \frac{d}{4l}\left(\frac{h}{c^2} - \frac{1}{4\mu^2 g}\right) = B'$$

setzen, und es kommt darauf an, aus den vorhandenen 51 Versuchen, für

diesen Fall, den Werth für B zu bestimmen. Nimmt man hiebei nur die Voraussetzung an, dafs die Summe der Abweichungen, positiv genommen, ein Minimum werden soll, so dürfen nur nach der Tafel §. 11. sämmtliche Werthe für $\frac{d}{4l}\left(\frac{h}{c^2\nu} - \frac{1}{4\mu^2 g}\right)$ berechnet und nach ihrer Gröfse geordnet werden, so ist der mittelste oder 26ste Werth derjenige, welcher dem Coefficienten B′ entspricht. Verrichtet man diese Rechnung, so entsteht für die nach ihrer Gröfse geordneten Werthe folgende Zusammenstellung nach der Nummer der Versuche:

No. 2. 1. 3. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 4. 11. 13. 16. 15. 18. 14. 20. 12.
17. 22. 19. 26. 24. 25. 27. 28. 43. 21. 30. 29. 32. 36. 25. 31. 38. 35.
33. 41. 37. 34. 40. 31. 42. 45. 46. 44. 48. 47. 50. 49. 51.

Der mittelste Werth bei No. 28. giebt

$B' = 0,000\,009\,658\,75$, also B′g oder

$\beta = 0,001\,749\,934$. Nun ist

$$c = 2\mu\sqrt{g}\sqrt{\frac{hd}{16\mu^2\beta l + d}},$$

daher für das Maafs eines jeden Landes

$$c = 1,625\sqrt{g}\sqrt{\frac{hd}{0,018481 + d}} \text{ oder}$$

$$c = 1,625\sqrt{g}\sqrt{\frac{54hd}{1 + 54d}},$$

oder im pariser Zollmaafs

$$c = 21,87\sqrt{\frac{54hd}{1 + 54d}},$$

oder im preufsischen Fufsmaafse

$$c = 6,42\sqrt{\frac{54hd}{1 + 54d}}.$$

§. 13.

Die allgemeinen Ausdrücke, welche für die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen gefunden worden, lassen sich mit geringen Abänderungen auf die Bewegung des Wassers in oben offenen Kanälen oder Flufsbetten übertragen, wenn dabei eine regelmäfsige Gestalt des Flufsbetts vorausgesetzt wird. Es sey daher in dem durchgängig gleich breiten oben offenen Kanale B′E′,

Figur 5., welche bei B′B′ ununterbrochen gleichen Zufluſs mit unveränderlicher Geschwindigkeit erhält, das bewegte Wasser dergestalt in den Beharrungszustand gekommen, daſs B″M″E″ die unveränderliche Oberfläche des bewegten Wassers, B′M′E′ den Längendurchschnitt der Sohle des Flufsbetts und BME die centrische Linie der Wassermasse darstellt Die Queerschnitte B′B″, M′M′, E′E″ sollen auf der centrischen Linie in den zugehörigen Durchschnittspunkten B, M, E winkelrecht stehen; auch ist die Abscissenaxe AD, auf welcher die Ordinaten senkrecht stehen, wagerecht angenommen. Man setze AP = x, PM = z, die Länge der centrischen Linie bis zum unbestimmten Querschnitt M′M″ oder BM = σ; AB = k, DE = k′; den Querschnitt B′B″ = A, M′M′ = ω, E′E″ = w, und den Umfang des Flufsbetts (so genommen, daſs nur die Wände des Kanals, und nicht der Wasserspiegel, nach den Bedingungen §. 2., in Rechnung kommen), bei B′B″ = P, bei M′M″ = φ, bei E′E″ = p. Ferner die Geschwindigkeit des Wassers in B′B″ = c, in M′M″ = ψ, in E′E″ = v.

Der Normaldruck des Wassers auf den Querschnitt B′B″ entspreche dem Gewicht einer Wassersäule von der Höhe = q, auf E′E″ = q′, auf M′M″ = q″. Wächst AP = x um das Element Pp = dx, so wächst PM = z um oM = — dz, und BM = σ um Mm = dσ. Nun ist der Normaldruck von der Wassermasse BM gegen die Fläche M′M″ = $\gamma\omega$q″, also der Normaldruck, welcher von der einzelnen Elementarschicht M′m′m″M″ gegen m′m″ entsteht = $\gamma\omega$dq″.

Vom Gewicht $\gamma\omega$dσ des Elements M′m′m″M″ entsteht nach der Richtung Mm eine bewegende Kraft

$$\gamma\omega d\sigma \frac{Mo}{Mm} = -\gamma\omega d\sigma \frac{dz}{d\sigma} = -\gamma\omega dz.$$

Der Widerstand, welchen das bewegte Wasser einer Schicht leidet, werde wie §. 2. dem Umfange derselben und einer Function ihrer Geschwindigkeit proportional angenommen; alsdann ist der Widerstand, welchen die Elementarschicht M′m′m″M″ leidet = $\gamma\varphi$dσf(ψ). Nun mufs gegen m′m″ der Normaldruck $\gamma\omega$dq″ verwendet werden, daher bleibt zur Bewegung der Schicht M′m′m″M″ nur noch die bewegende Kraft

$$-\gamma\omega dz - \gamma\omega dq'' - \gamma\varphi d\sigma f\psi$$

übrig. Hieraus entspringt eine beschleunigende Kraft

$$\frac{-\gamma\omega dz - \gamma\omega dq'' - \gamma\varphi d\sigma f\psi}{\gamma\omega d\sigma} = -\frac{dz + dq''}{d\sigma} - \frac{\varphi}{\omega} f\psi.$$

Ist während der Bewegung von B bis M die Zeit t verflossen, so erhält man wie §. 2.

$$d\psi = \psi dt \left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + dt \left(\frac{d\psi}{dt}\right)$$

und daher die beschleunigende Kraft der Elementarschicht M'm'm''M''

$$\frac{d\psi}{2g dt} = \frac{\psi}{2g}\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right) \text{ oder}$$

$$\frac{\psi}{2g}\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = -\frac{dz + dq''}{d\sigma} - \frac{\varphi}{\omega} f\psi \text{ daher}$$

$$4g(dq'' + dz) = -2\psi d\sigma \left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) - 2d\sigma \left(\frac{d\psi}{dt}\right) - 4g\frac{\varphi}{\omega} d\sigma f\psi$$

hievon findet man das Integral, wie §. 3., wenn daselbst ψ^2 statt $\frac{v^2 w^2}{\omega^2}$ gesetzt wird

$$4g(q'' + z) = -\psi^2 - 2w\frac{dv}{dt}\int\frac{d\sigma}{\omega} - 4g\int\frac{\varphi}{\omega} d\sigma f\psi + \text{Const.}$$

und weil die Geschwindigkeit v im Querschnitt E'E'' unveränderlich, also $dv = o$ ist, so erhält man

$$4g(q'' + z) = -\psi^2 - 4g\int\frac{\varphi}{\omega} d\sigma f\psi + \text{Const.}$$

Für $z = k$ wird $q'' = q$, $\psi = c$ und $\int\frac{\varphi}{\omega} d\sigma f\psi = o$, daher

$$4g(q + k) = -c^2 + \text{Const.}$$

und für $z = k'$ wird $q'' = q'$, $\psi = v$ und $\int\frac{\varphi}{\omega} d\sigma f\psi$ werde $= N$, so ist alsdann

$$4g(q' + k') = -v^2 - 4gN + \text{Const.}$$

daher, wenn man diese Gleichung von der vorstehenden abzieht um die Constante weg zu schaffen,

$$4g(q - q' + k - k') = v^2 - c^2 + 4gN.$$

Wird die Bewegung des Wassers gleichförmig, so sind die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Querschnitten, also auch diese selbst einander gleich, und es ist $v = c$ und $q = q'$. Setzt man alsdann die Höhe $AF = h$, so wird $k - k' = h$, daher

$$4gh = 4gN \text{ oder } N = h.$$

Die ganze Länge BME sey $= l$, die unveränderliche Geschwindigkeit des Wassers in jedem Querschnitte $= c$, der Inhalt eines jeden Querschnitts $= a$, sein Umfang $= p$, und eben so wie §. 2. $f\psi = B\psi + B'\psi^2$, wo B und B' noch näher zu bestimmende Coefficienten bezeichnen. Nun ist N dem Integral $\int \frac{\varphi}{\omega} d\sigma f\psi$ für den Fall gleich, dafs $\varphi = p$, $\omega = a$ und $\psi = c$ werde, und weil alsdann $\int d\sigma = l$ ist, so erhält man

$$N = \frac{p}{a} l (Bc + B' c^2) \text{ oder}$$

$$\frac{ah}{pl} = Bc + B' c^2.$$

Da nun hier $\frac{h}{l}$ eine unveränderliche Gröfse ist, so mufs bei der gleichförmigen Bewegung des Wassers auch dann, wenn die Hindernisse der Bewegung in Rechnung kommen, die Sohle des Flufsbetts gradlinigt seyn.

Damit der zuletzt gefundene Ausdruck gleiche Dimensionen erhalte, und auf das Maafs eines jeden Landes, ohne Abänderung, anwendbar sey, setze man $B' = \frac{\beta}{g}$, wo β ebenfalls einen noch näher zu bestimmenden Coefficienten bezeichnet, so wird

$$\frac{ah}{pl} = Bc + \frac{\beta}{g} c^2.$$

Wären daher die Coefficienten B, β bekannt, so fände man die Geschwindigkeit des Wassers in dem Maafse eines jeden Landes, oder

$$c = -\frac{gB}{2\beta} + \sqrt{\left[\frac{g}{\beta}\frac{ah}{pl} + \frac{g^2 B^2}{4\beta^2}\right]}$$

wobei aber wohl zu bemerken ist, dafs dieser Ausdruck nur bei denjenigen fliefsenden Gewässern in offenen Flufsbetten Anwendung findet, deren Flufs-

bett, Gefälle und Wassertiefe unverändert bleiben, weil dessen einfache Gestalt nur unter diesen Bedingungen bestehen kann.

§. 14.

Ueber die Bewegung des Wassers in Flufsbetten haben die Herren Büat (*Principes d'Hydraulique, Tome I. p. 76—77.*), Brünings (Allgemeine Wasserbaukunst v. Wiebeking I. Theil. S. 344 — 388.), Woltmann (Beiträge zur Baukunst schiffbarer Kanäle, S. 279.) und Funk (Beiträge zur allgemeinen Wasserbaukunst S. 97 — 100.) schätzbare Versuche angestellt. Sie sind um so mehr geeignet, die Coefficienten B und β zu bestimmen, da solche unter so mannigfaltigen Umständen angestellt sind, indem bei denselben Geschwindigkeiten von $\frac{2}{3}$ bis $7\frac{1}{2}$ Fufs und Querschnitte von Flufsbetten vorkommen, welche von $\frac{1}{6}$ bis zu 19135 Quadratfufs wachsen. Die Büatschen Versuche sind in künstlichen Gerinnen, im Kanale du Jard und im Flufs Hayne; die Brüningsschen im Rheine, der Waal und der Yssel; die Woltmannschen in Entwässerungskanälen bei Cuxhaven und Ritzebüttel, und die Funkschen in der Weser im Fürstenthum Minden angestellt. Die Versuche, von welchen Hr. Funk (S. 100. a. a. O.) sagt, dafs während derselben sich das Wasser nicht gleichförmig bewegte, so wie noch einige, welche zu sehr vom Mittel aus allen übrigen Versuchen abwichen, konnten bei der bedeutenden Anzahl der übrigen, sehr wohl weggelassen werden. In der nachstehenden ersten Tafel sind 56 Versuche von Büat, 16 von Brünings, 4 von Woltmann, und 35 von Funk, also überhaupt die bedeutende Anzahl von 91 Versuchen dergestalt aufgeführt worden, dafs auf die kleinsten beobachteten Geschwindigkeiten die gröfsern folgen. Die in dieser Tafel zur Abkürzung aufgeführten Buchstaben haben folgende Bedeutung:

a, der Querschnitt des Flufsbetts,

p, der Umfang desselben,

l, die Länge des Flufsbetts, auf welche demselben ein Gefälle $= h$ entspricht, also

$\frac{h}{l}$ der Abhang des Flufsbetts, welches mit dem Wasserspiegel parallel läuft, und

c, die beobachtete Geschwindigkeit.

Hiebei ist noch besonders zu bemerken, dafs zur Erleichterung etwaniger Nachrechnungen die Abmessungen eben so aufgeführt sind, wie sie die Beobachter in ihrem landüblichen Maafse angegeben haben; es beziehen sich daher in der ersten Tafel:

die Büatschen Versuche auf pariser Zollmaafs,

die Brünings- und Funkschen Versuche auf rheinländisches Fufsmaafs, und

die Woltmannschen Versuche auf hamburger Fufsmaafs.

Dagegen sind in der folgenden zweiten Tafel alle Abmessungen auf rheinländisches oder preufsisches Fufsmaafs gebracht worden.

Erste Tafel, welche die Versuche über die Bewegung des Wassers in Kanälen und Flufsbetten enthält.

Beobachter.	Nro.	a	p	$\frac{l}{h}$	c	$\frac{ah}{plc}$
Büat	1	69, 00	25, 25	9288	4, 59	0, 000 06410
—	2	155, 25	55, 25	9288	5, 70	08519
—	3	6125	324	27648	7, 27	09405
—	4	7376	357	27648	7, 79	10162
—	5	20, 83	13, 62	1728	8, 94	09900
—	6	35, 22	21, 55	1412	9, 20	12711
—	7	7858	340	21827	9, 61	11018
—	8	54, 57	17	1728	9, 71	12049
Woltmann	9	54, 2	18, 1	15000	0, 98	12854
—	10	27, 1	16, 8	11650	0, 98	14128
Büat	11	36, 77	17, 56	1728	11, 45	10583
Woltmann	12	7, 064	10	4571	1, 116	13848
Büat	13	51, 75	23, 25	1412	12, 1	15017
—	14	11905	366	11520	12, 17	25201
—	15	42, 01	18, 69	1728	12, 54	10541
—	16	34, 50	21, 25	929	13, 56	12888
—	17	50905	568	32951	13, 61	12153
—	18	76, 19	26, 08	1412	14, 17	14601

Fort-

Fortsetzung der ersten Tafel.

Beobachter.	Nro.	a	p	$\frac{l}{h}$	c	$\frac{ah}{plc}$
Büat	19	105, 78	29, 17	1412	15, 55	0, 000 16517
—	20	10475	360	15360	15, 74	12035
Woltmann	21	11, 982	11	4800	1, 5	15129
Büat	22	39639	604	357 3	15, 96	11511
—	23	16252	402	8919	17, 42	25946
—	24	27, 2	15, 31	427	18, 28	22761
—	25	34, 5	21, 25	458	20, 24	17514
—	26	39, 56	18, 13	427	20, 30	25046
—	27	50, 44	20, 37	427	22, 37	25924
Funk	28	0, 26	2, 8	92, 5	2, 017	49878
Büat	29	56, 45	21, 5	427	23, 54	27270
—	30	83, 43	26	412	27, 14	28697
—	31	18, 84	13, 06	212	27, 51	24735
—	32	98, 74	28, 25	432	28, 29	28600
—	33	86, 25	27, 25	458	28, 29	24428
Brünings	34	1161	290	4931	2, 4559	55059
Büat	35	100, 74	28 55	452	28, 52	28660
Funk	36	777	356	2222	2, 46	59950
Büat	37	50, 6	29, 5	212	28, 92	27976
—	38	119, 58	31, 06	452	30, 16	29549
—	39	126, 2	31, 91	452	31, 58	28981
—	40	58858	601	6415	31, 77	31718
—	41	130, 71	32, 47	432	31, 89	29220
—	42	135, 52	33, 05	452	32, 52	29162
Brünings	43	2089	296	6701	2, 9232	36029
—	44	12705	1051	9045	2, 9264	45663
—	45	5752	577	7957	2, 9894	41909
Büat	46	31498	569	6048	55, 11	26070
Brünings	47	4419	590	5825	3, 1064	41392
Funk	48	2819	401, 9	5225	3, 223	41667

Fortsetzung der ersten Tafel.

Beobachter.	Nro.	a	p	$\frac{l}{h}$	c	$\frac{ah}{plc}$
Funk	49	1818	416	1987	3, 300	0, 000 66648
Brünings	50	3088	347	6701	3, 3124	40095
Funk	51	3091	366	4009	3, 370	62510
Brünings	52	15640	1639	7571	3, 4802	36216
—	53	4542	540	4542	3, 5745	51810
—	54	19135	1176	9045	3, 8553	46661
—	55	7017	595	7957	3, 8875	58185
—	56	2875	316	4931	3, 9043	47258
Funk	57	2247	434	1987	3, 906	66709
—	58	3419	575	4009	3, 949	57899
Brünings	59	4810	724	5825	4, 0597	49121
—	60	11328	999	7957	4, 121	34581
—	61	12630	765	7957	4, 1405	50111
—	62	26422	1670	7571	4, 1551	50294
Funk	63	3700	381, 5	4009	4, 262	56762
—	64	7415	575	5223	4, 516	54672
—	65	3946	386	4009	4, 622	55170
—	66	4991	636	3251	4, 676	51622
Brünings	67	7190	503	4542	4, 696	56846
Funk	68	2697	452	1987	4, 750	63220
—	69	1887	371	2222	4, 786	47828
—	70	4227	388, 8	4009	4, 800	56497
—	71	2207, 5	336, 3	1817	4, 809	75121
—	72	6573	642, 9	3251	5, 0196	60746
—	73	4818	410, 7	4009	5, 091	57478
—	74	3006	464	1987	5, 100	63930
—	75	5021, 5	414, 5	4009	5, 125	58963
—	76	2540, 5	352, 5	1817	5, 183	76529
—	77	5556, 5	451, 5	4009	5, 300	57921
—	78	6348, 4	462, 4	4009	5, 530	61928

Fortsetzung der ersten Tafel.

Beobachter.	Nro.	a	p	$\frac{l}{h}$	c	$\frac{ah}{plc}$
Funk	79	3570	484	1987	5, 600	0, 000 66288
—	80	3951	497	1987	5, 800	68631
—	81	4250	508	1987	5, 956	70692
—	82	3585, 5	390	1817	6, 114	78095
—	83	3585, 5	396, 3	1817	6, 352	78346
—	84	5150	507	1987	6, 400	77876
—	85	3777	400, 2	1817	6, 485	80095
—	86	5509	543	1987	6, 500	76985
—	87	5876	566	1987	6, 695	78040
—	88	6259	571	1987	6, 752	81703
—	89	4815	426, 3	1817	7, 511	85555
—	90	6016	464	1817	7, 677	92949
—	91	5532	441, 4	1817	7, 698	89602

Zur Bestimmung der Coefficienten B, B' in der Gleichung $\frac{ah}{plc} = B + B'c$ kann das §. 10. auseinander gesetzte Verfahren dienen, indem man hier $\frac{ah}{plc} = f$ setzt, und dadurch die allgemeine Gleichung

$$f - B - B'c = o$$

erhält. Die Werthe für $f = \frac{ah}{plc}$ aus jedem Versuche sind in der letzten Spalte der vorstehenden Tafel enthalten, wobei noch angeführt wird, dafs solche für das Maafs eines jeden Landes einerlei bleiben, weil der Ausdruck für f im Zähler und Nenner eine gleiche Anzahl von Dimensionen hat. Zur Bildung der ersten besondern Gleichung

$$F - B - B'C = o$$

wähle man hier aus ähnlichen Gründen, wie §. 10., die zehn ersten Versuche der folgenden Tafel, so findet man

$$F = 0, 000\,106\,956 \text{ und } C = 0, 7207,$$

und wenn man hiernach die Quotienten $\frac{f'-F}{c'-C}; \frac{f''-F}{c''-C}; \frac{f'''-F}{c'''-C}; \ldots\ldots$ bestimmt, und in Absicht ihrer Gröfse so ordnet, dafs man mit dem gröfsten positiven anfängt, und beim gröfsten negativen aufhört, so folgen sie in Bezug auf die Nummern der Versuche der Tafel in der hier stehenden Ordnung:

Nro.	14.	28.	6.	49.	10.	51.	23.	57.	56.	44.	71.	76.	58.	53.	24.	26.	45.
	3.	63.	1.	68.	47.	29.	27.	82.	9.	43.	84.	74.	85.	85.	64.	12.	90.
	88.	72.	8.	67.	62.	61.	59.	45.	56.	54.	86.	81.	80.	65.	79.	89.	50.
	91.	87.	70.	30.	75.	4.	73.	78.	32.	40.	2.	66.	35.	77.	38.	37.	19.
	52.	69.	39.	41.	42.	31.	55.	33.	18.	13.	34.	60.	21.	46.	25.	16.	17.
	7.	20.	22.	11.	15.	5.											

Die Summe aller Nenner positiv genommen ist $= 237,6246$, daher $\frac{1}{2}S = 118,8123$, und man findet, wenn die Nenner in der vorstehenden Ordnung bis zum 56sten Versuche, diesen mit inbegriffen, addirt werden, die Zahl $117,4656 > \frac{1}{2}S$, und wenn man noch den Nenner des 54sten Versuchs dazu setzt, $120,6002 > \frac{1}{2}S$, daher ist der Quotient, welcher dem 54sten Versuche entspricht, $= B'$, oder

$$B' = 0,000\,114\,736\,818.$$

Ferner ist $B = F - B'C$, daher

$$B = 0,000\,024\,265\,181,$$

und weil sich hier alle Abmessungen auf rheinländisches Fufsmaafs beziehen, von welchem der Fufs 139,13 pariser Linien enthält, so ist $g = 15\frac{5}{8}$, also $B'g$ oder

$$\beta = 0,001\,792\,765$$

$$\frac{1}{\beta} = 557,7984$$

$$\frac{B}{2\beta} = 0,006\,767\,532$$

$$\frac{B^2}{4\beta^2} = 0,000\,045\,7995.$$

Es ist daher die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in dem Maafse eines jeden Landes, oder

$$c = -0,0067675\,g + \sqrt{(557,798\,g\,\frac{ah}{pl} + 0,0000458\,g^2)}.$$

Für $g = 181,176$ erhält man im pariser Zollmaafse

$$c = -1,2261 + \sqrt{(101059,7 \frac{ah}{pl} + 1,503536)},$$

und wenn $g = 15\frac{5}{8}$ gesetzt wird, so erhält man im rheinländischen oder preufsischen Fufsmaafse

$$c = -0,1057 + \sqrt{(8715,6 \frac{ah}{pl} + 0,01118)}.$$

§. 15.

Nach der zuletzt gefundenen Formel sind die Geschwindigkeiten [c] in der nachstehenden zweiten Tafel berechnet, auch zugleich die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Geschwindigkeiten $c - [c]$ und die Fehler in Bezug auf die beobachtete Geschwindigkeit, oder der Quotient $\frac{c-[c]}{c}$ beigefügt. Vergleicht man die hier zusammen gestellten Resultate mit einander, so ist es zu bewundern, dafs eine solche Menge von Versuchen, welche von so verschiedenen Beobachtern mit so verschiedenen Instrumenten und unter so mannichfaltigen Umständen angestellt sind, dennoch eine so unerwartet schöne Uebereinstimmung mit der aus der Theorie abgeleiteten allgemeinen Formel geben. Hätte man die am meisten abweichenden Versuche ausschliefsen wollen, so wäre die Uebereinstimmung noch auffallender gewesen.

Zweite Tafel, über die Bewegung des Wassers in Flufsbetten, zur Vergleichung der beobachteten Geschwindigkeiten mit den berechneten.

Sämmtliche Abmessungen in der Tafel beziehen sich auf rheinländisches Fufsmaafs.

Beobachter.	Nro.	$\frac{ah}{plc}$	c	[c]	c — [c]	$\frac{c-[c]}{c}$
Büat	1	0,000 0[illegible]410	0,396	0,3[illegible]6	+ 0,020	0,051
—	2	08319	0,492	0,501	— 0,009	0,018
—	3	09405	0,626	0,619	+ 0,007	0,011
—	4	10162	0,672	0,675	— 0,001	0,001
—	5	09900	0,771	0,716	+ 0,055	0,071
—	6	12711	0,794	0,838	— 0,044	0,055
—	7	11018	0,8[illegible]9	0,793	+ 0,036	0,043
—	8	12049	0,857	0,856	+ 0,001	0,001
Woltmann	9	12854	0,895	0,900	— 0,005	0,006
—	10	14128	0,895	0,949	— 0,054	0,060
Büat	11	10583	0,9[illegible]7	0,855	+ 0,132	0,133
Woltmann	12	13848	1,0[illegible]4	1,008	+ 0,006	0,006
Büat	13	130.7	1,044	0,988	+ 0,056	0,054
—	14	25201	1,050	1,[illegible]55	— 0,305	0,290
—	15	10541	1,064	0,889	+ 0,175	0,164
—	16	12888	1,170	1,045	+ 0,125	0,100
—	17	12153	1,174	1,013	+ 0,161	0,137
—	18	14601	1,222	1,147	+ 0,075	0,061
—	19	16517	1,341	1,287	+ 0,054	0,040
—	20	12035	1,358	1,092	+ 0,266	0,196
Woltmann	21	15129	1,369	1,242	+ 0,127	0,092
Büat	22	11511	1,377	1,074	+ 0,303	0,222
—	23	25946	1,502	1,744	— 0,242	0,161
—	24	22761	1,577	1,666	— 0,089	0,056
—	25	17514	1,746	1,530	+ 0,216	0,124
—	26	25046	1,751	1,852	— 0,101	0,057
—	27	25924	1,929	1,985	— 0,056	0,029

Fortsetzung der zweiten Tafel.

Beobachter.	Nro.	$\frac{ah}{plc}$	c	[c]	c — [c]	$\frac{c-[c]}{c}$
Funk	28	0,000 49878	2,017	2,857	— 0,840	0,416
Büat	29	27270	2,030	2,046	— 0,016	0,012
—	30	28697	2,341	2,316	+ 0,025	0,017
—	31	24735	2,373	2,158	+ 0,215	0,090
—	32	28600	2,440	2,360	+ 0,080	0,033
—	33	24428	2,440	2,176	+ 0,264	0,108
Brünings	34	33059	2,4559	2,556	— 0,100	0,047
Büat	35	28660	2,460	2,375	+ 0,085	0,035
Funk	36	39930	2,460	2,821	— 0,361	0,147
Büat	37	27976	2,494	2,363	+ 0,131	0,053
—	38	29549	2,601	2,485	+ 0,116	0,045
—	39	28989	2,724	2,520	+ 0,204	0,075
—	40	31718	2,740	2,648	+ 0,092	0,033
—	41	29220	2,750	2,543	+ 0,207	0,075
—	42	29162	2,805	2,567	+ 0,238	0,085
Brünings	43	36029	2,9252	2,942	— 0,019	0,007
—	44	45663	2,9264	3,308	— 0,382	0,136
—	45	41909	2,9894	3,201	— 0,212	0,071
Büat	46	26070	3,028	2,520	+ 0,508	0,167
Brünings	47	41392	3,1064	3,243	— 0,137	0,044
Funk	48	41667	3,223	3,301	— 0,078	0,024
—	49	66648	3,300	4,274	— 0,974	0,295
Brünings	50	40095	3,3124	3,298	+ 0,024	0,007
Funk	51	62510	3,370	4,180	— 0,810	0,240
Brünings	52	36216	3,4802	3,210	+ 0,270	0,078
—	53	51810	3,5745	3,913	— 0,339	0,067
—	54	46661	3,8553	3,855	0,000	0,000
—	55	38185	3,8815	3,490	+ 0,391	0,010
—	56	47258	3,9043	3,906	— 0,002	0,001
Funk	57	66709	3,906	4,661	— 0,755	0,193

Fortsetzung der zweiten Tafel.

Beobachter.	Nro.	$\frac{ah}{plc}$	c	[c]	c — [c]	$\frac{c-[c]}{c}$
Funk	58	0,000 57899	3,949	4,359	— 0,410	0,104
Brünings	59	49121	4,0597	4,065	— 0,005	0,001
—	60	54581	4,1210	3,335	+ 0,786	0,191
—	61	50111	4,1405	4,148	— 0,008	0,002
—	62	50294	4,1551	4,163	— 0,008	0,002
Funk	63	56762	4,262	4,487	— 0,225	0,052
—	64	54672	4,516	4,534	— 0,018	0,004
—	65	55170	4,622	4,609	+ 0,013	0,003
—	66	51622	4,676	4,430	+ 0,246	0,053
Brünings	67	56846	4,696	5,011	— 0,315	0,067
Funk	68	63220	4,750	4,718	+ 0,032	0,007
—	69	47828	4,786	4,362	+ 0,424	0,089
—	70	56497	4,800	4,757	+ 0,043	0,009
—	71	75121	4,809	5,506	— 0,697	0,145
—	72	60746	5,0196	5,050	— 0,030	0,006
—	73	57478	5,091	4,945	+ 0,146	0,028
—	74	65930	5,100	5,226	— 0,126	0,025
—	75	58965	5,125	5,027	+ 0,098	0,019
—	76	76529	5,183	5,775	— 0,592	0,114
—	77	57921	5,300	5,068	+ 0,232	0,044
—	78	61928	5,530	5,358	+ 0,172	0,031
—	79	66288	5,600	5,583	+ 0,017	0,003
—	80	68631	5,800	5,785	+ 0,015	0,002
—	81	70692	5,956	5,953	+ 0,003	0,000
—	82	78095	6,114	6,218	— 0,104	0,017
—	83	78516	6,352	6,481	— 0,129	0,020
—	84	79876	6,400	6,570	— 0,170	0,026
—	85	80095	6,485	6,623	— 0,138	0,021
—	86	76985	6,500	6,499	+ 0,001	0,000
—	87	78040	6,695	6,644	+ 0,051	0,008

Fort-

Fortsetzung der zweiten Tafel.

Beobachter.	Nro.	$\frac{ah}{plc}$	c	[c]	c — [c]	$\frac{c-[c]}{c}$
Funk	88	0,000 81703	6,752	6,829	— 0,077	0,011
—	89	85555	7,311	7,278	+ 0,033	0,004
—	90	92949	7,677	7,781	— 0,104	0,013
—	91	89602	7,698	7,648	+ 0,050	0,007

§. 16.

In denjenigen Fällen, wo nicht die gröfste Genauigkeit erfordert wird, kann man, wie §. 12., $B = 0$ setzen; alsdann ist

$$\frac{ah}{pl} = B' c^2 \text{ oder } \frac{ah}{plc^2} = B'.$$

Berechnet man alsdann die aus jedem Versuche für $\frac{ah}{plc^2}$ erhaltenen Werthe und ordnet solche nach ihrer Gröfse, so entspricht der mittelste Werth dem 54sten Versuche. Man erhält daher

$$B' = 0,000\,121\,03089, \text{ also}$$

$$\frac{1}{B'} = 8262,3519$$

$$\sqrt{\frac{1}{B'}} = 90,8975.$$

Ferner ist $B' = \frac{\beta}{g}$, daher, weil sich hier alle Abmessungen auf rheinländisches Fufsmaafs beziehen, so ist $g = 15\frac{5}{8}$, also

$$\frac{1}{B} = 5,81744 \text{ und } \sqrt{\frac{1}{B}} = 2,41194.$$

Nun ist allgemein $c = \sqrt{\frac{ah}{B'pl}} = \sqrt{\frac{gah}{\beta pl}}$, daher findet man in dem Maafse

eines jeden Landes die Geschwindigkeit,

$$c = 2,412 \sqrt{g} \sqrt{\frac{ah}{pl}}$$

und für rheinländisches oder preufsisches Fufsmaafs:

$$c = 90,8975 \sqrt{\frac{ah}{pl}}, \text{ oder nahe genug}$$

$$c = 90,9 \sqrt{\frac{ah}{pl}}.$$

Von den Summen einiger Reihen,

als Zusatz zu der Abhandlung über die Ableitung der Winkelfunktionen.

Von Herrn Tralles. *)

§. 1.

In der Abhandlung über Winkelfunktionen, welche sich im vorigen Bande der Schriften der Akademie befindet, kommen Reihen vor, welche dort zu verfolgen nicht angemessen schien. Obwohl sie an sich nicht unmerkwürdig sind, ist mir doch deren nähere Betrachtung nicht vorgekommen. Dort ist eine besondere Bezeichnungsart der Gröfsen, dem Zwecke der Abhandlung gemäfs, angewandt, welche hier zu gebrauchen nicht erforderlich, weswegen die gewöhnlichere angenommen ist, wodurch auch die Verständlichkeit dieses Aufsatzes von jener Abhandlung unabhängig wird.

Es ist nämlich:

$$\frac{\sin nx}{(\cos x)^n} = \left\{ n\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^5 - \ldots \right.$$

Hierin $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \frac{\vartheta}{n}$ gesetzt, so wird, wie in gedachter Abhandlung,

*) Vorgelesen den 18. December 1815 und 27. Mai 1816.

$$(A) \quad \frac{\sin nx}{(\cos x)^n} =$$

$$\left(\vartheta - \frac{1}{1.2.3}\vartheta^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\vartheta^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\vartheta^7 + \ldots\right) 1$$

$$+\left(\frac{1+2}{1.2.3} - \frac{1+2+3+4}{1.2.3.4.5}\vartheta^2 + \frac{1+2+\ldots+6}{1.2\ldots7}\vartheta^4 - \frac{1+2+\ldots+8}{1.2\ldots9}\vartheta^6 + \ldots\right)\frac{\vartheta^3}{n}$$

$$-\left(\frac{1.2}{1.2.3} - \frac{1.2+1.3+1.4+2.3+2.4+3.4}{1.2.3.4.5}\vartheta^2 + \frac{1.2+\ldots+5.6}{1.2\ldots7}\vartheta^4 - \ldots\right)\frac{\vartheta^3}{n^2}$$

$$-\left(\frac{1.2.3+1.2.4+1.3.4+2.3.4}{1.2.3.4.5} - \frac{1.2.3+\ldots+4.5.6}{1.2\ldots7}\vartheta^2 + \frac{1.2.3+\ldots+6.7.8}{1.2\ldots9}\vartheta^4 - \ldots\right)\frac{\vartheta^5}{n^3}$$

$$+\left(\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4.5} - \frac{1.2.3.4+\ldots+3.4.5.6}{1.2\ldots7}\vartheta^2 + \frac{1.2.3.4+\ldots+5.6.7.8}{1.2\ldots9}\vartheta^4 - \ldots\right)\frac{\vartheta^5}{n^4}$$

$$+\left(\frac{1.2.3.4.5+\ldots+2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5.6.7} - \frac{1.2.3.4.5+\ldots+4.5.6.7.8}{1.2\ldots9}\vartheta^2 + \ldots\right)\frac{\vartheta^7}{n^5}$$

$$- \text{etc.}$$

und die Coefficienten der negativen Potenzen von n gehören zu den Reihen, deren Summe hier gesucht werden soll. Das Gesetz ihrer Fortschreitung mit abwechselnden Zeichen geht aus der Entstehungsweise völlig bestimmt hervor, und liegt hier auch in ihren Anfangsgliedern deutlich genug vor Augen. In der zweiten mit $\frac{\vartheta^3}{n}$ also mit n^{-1} multiplizirten Reihe sind die Coefficienten nach einander die Summen der natürlich sich folgenden Zahlen von 1 bis 2, von 1 bis 4, von 1 bis 6 u. s. w.; in der dritten Reihe mit n^{-2} behaftet, sind es die Summen aller Produkte jener Zahlen zu zweien. Diese kommen zu dreien, zu vieren etc. in den folgenden Reihen, die zu n^{-3}, n^{-4} etc. gehören, vor, jedesmal dividirt mit dem Produkte aller ganzen Zahlen von 1 bis zu der die höchste im Zähler zunächst folgenden ungraden Zahl. Ueberhaupt ist der numerische Coefficient eines einzelnen Gliedes, wenn die neben demselben befindliche Potenz von ϑ mit dem allgemeinen Faktor der Reihe multiplicirt $\frac{\vartheta^{2\mu+1}}{n^\mu}$ ist, gleich dem Bruche, dessen

Zähler die Summe aller möglichen, verschieden zusammengesetzten Produkte aus den ganzen Zahlen von 1 bis 2μ zu ε Faktoren, dessen Nenner $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2\mu + 1)$, und dessen Vorzeichen $(-1)^{\mu+\varepsilon}$ bestimmt.

Da gesetzt worden ist $\frac{\vartheta}{n} = \text{tang}\, x$,

so ist:

$$(\cos x)^{-n} = (1 + \text{tang}^2 x)^{n:2} = \left(1 + \frac{\vartheta^2}{n^2}\right)^{n:2}$$

und

$$x = \frac{\vartheta}{n} - \tfrac{1}{3}\frac{\vartheta^3}{n^3} + \tfrac{1}{5}\frac{\vartheta^5}{n^5} - \ldots$$

Also ist:

$$\frac{\text{Sin.}nx}{(\cos x)^n} = \sin\left(\vartheta - \tfrac{1}{3}\frac{\vartheta^3}{n^2} + \tfrac{1}{5}\frac{\vartheta^5}{n^4} - \ldots\right) \times \left(1 + \frac{\vartheta^2}{n^2}\right)^{n:2}$$

und setzt man noch

$$\left(1 + \frac{\vartheta^2}{n^2}\right)^{n:2} = N,$$

$$\vartheta\left(\tfrac{1}{3}\frac{\vartheta^2}{n^2} - \tfrac{1}{5}\frac{\vartheta^4}{n^4} + \tfrac{1}{7}\frac{\vartheta^6}{n^6} - \ldots\right) = \vartheta M,$$

so wird

$$\frac{\sin nx}{(\cos x)^n} = \left(\sin\vartheta - \cos\vartheta \cdot \vartheta M - \sin\vartheta \cdot \frac{\vartheta^2 M^2}{1 \cdot 2} + \cos\vartheta \cdot \frac{\vartheta^3 M^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right) N.$$

Entwickelt man noch die Potenzen von M nach negativ steigenden Potenzen von n, indem man sie allgemein durch

$$M^\mu = M^\mu_{2\mu} \cdot n^{-2\mu} + M^\mu_{2\mu+2} \cdot n^{-2\mu-2} + M^\mu_{2\mu+4} \cdot n^{-2\mu-4} + \ldots$$

und so auch die Entwickelung von N durch

$$N = 1 + N_1 n^{-1} + N_2 \cdot n^{-2} + N_3 \cdot n^{-3} + \ldots$$

bezeichnet, so wird

$$\frac{\sin nx}{(\cos x)^n} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\vartheta - \vartheta.\cos\vartheta\,(M_2^1 n^{-2} + M_4^1 n^{-4} + M_6^1 n^{-6} + \ldots) \\ \quad - \frac{\vartheta^2 \sin\vartheta}{1.2}(M_4^2 n^{-4} + M_6^2 n^{-6} + M_8^2 n^{-8} + \ldots) \\ \quad + \frac{\vartheta^3.\cos\vartheta}{1.2.3}(M_6^3 n^{-6} + M_8^3 n^{-8} + M_{10}^3 n^{-10} + \ldots) \\ \quad + \frac{\vartheta^4 \sin\vartheta}{1.2.3.4}(M_8^4 n^{-8} + M_{10}^4 n^{-10} + M_{12}^4 n^{-12} + \ldots) \\ \quad - \text{u. s. w.} \end{array}\right\}$$

$$\times (1 + N_1 n^{-1} + N_2 n^{-2} + N_3 n^{-3} + \ldots).$$

Wird die Multiplication ausgeführt und das Produkt nach steigenden negativen Potenzen von n geordnet, so wird also:

$$\frac{\sin nx}{(\cos x)} =$$

$$\begin{aligned} &\sin\vartheta \\ &+ \sin\vartheta.N_1.n^{-1} \\ &+ (\sin\vartheta.N_2 - \cos\vartheta.M_2^1\vartheta)n^{-2} \\ &+ (\sin\vartheta.N_3 - \cos\vartheta.N_1 M_2^1\vartheta)n^{-3} \\ &+ \left(\sin\vartheta.N_4 - \cos\vartheta.N_2 M_2^1\vartheta - \cos\vartheta.M_4^1\vartheta - \sin\vartheta\frac{M_4^2\vartheta^2}{1.2}\right) n^{-4} \\ &+ \left(\sin\vartheta.N_5 - \cos\vartheta.N_3 M_2^1\vartheta \cos\vartheta.N_1 M_4^1\vartheta - \sin\vartheta.N_1\frac{M_4^2\vartheta^2}{1.2}\right) n^{-5} \\ &+ \left\{\begin{array}{l} \sin\vartheta.N_6 - \cos\vartheta.N_4 M_2^1\vartheta - \cos\vartheta.N_2 M_4^1\vartheta - \sin\vartheta.N_2\frac{M_4^2\vartheta^2}{1.2} \\ \quad - \cos\vartheta M_6^1\vartheta - \sin\vartheta.\frac{M_6^2\vartheta^2}{1.2} + \cos\vartheta\frac{M_6^3\vartheta^3}{1.2.3} \end{array}\right\} n^{-6} \\ &+ \left\{\begin{array}{l} \sin\vartheta.N_7 - \cos\vartheta.N_5 M_2^1\vartheta - \cos\vartheta.N_3 M_4^1\vartheta - \sin\vartheta.N_3\frac{M_4^2\vartheta^2}{1.2} \\ \quad - \cos\vartheta N_1 M_6^1\vartheta - \sin\vartheta N_1\frac{M_6^2\vartheta^2}{1.2} + \cos\vartheta N_1\frac{M_6^3\vartheta^3}{1.2.3} \end{array}\right\} n^{-7} \\ &+ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck für $\frac{\sin nx}{(\cos x)^n}$ mit dem obigen identisch, so sind die

endlichen Coefficienten der negativen Potenzen von n in diesem gleich denen in jenen, d. i. den Summen der unendlichen Reihen, in welchen sie dort entwickelt erscheinen.

Um diese Summen wirklich auszudrücken, ist also nur noch erforderlich, die Werthe der N_λ und $M''_{2(\mu+r)}$, d. i. die Coefficienten der Entwickelung von N und von M^μ auszudrücken, und die gehörigen in der letzten Gleichung zu substituiren.

Es sind aber die Coefficienten der μ^{ten} Potenz von M folgende, in welchen μ_2, μ_3 etc. statt $\frac{\mu.\mu-1}{1.2}$, $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}$ etc. gesetzt ist.

$$M''_{2\mu} = \frac{\vartheta^{2\mu}}{3^\mu}$$

$$M''_{2\mu+2} = -\mu \cdot \frac{\vartheta^{2\mu+2}}{3^{\mu-1}.5}$$

$$M''_{2\mu+4} = \left(\frac{\mu}{3^{\mu-1}.7} + \frac{\mu_2}{3^{\mu-2}.5^2}\right)\vartheta^{2\mu+4}$$

$$M''_{2\mu+6} = -\left(\frac{\mu}{3^{\mu-1}.9} + \frac{\mu_2.2}{3^{\mu-2}.5.7} + \frac{\mu_3}{3^{\mu-3}.5^3}\right)\vartheta^{2\mu+6}$$

$$M''_{2\mu+8} = \left\{\frac{\mu}{3^{\mu-1}.11} + \frac{\mu_2.2}{3^{\mu-2}.5.9} + \frac{\mu_2}{3^{\mu-2}.7^2} + \frac{\mu_3.3}{3^{\mu-3}.5^2.7} + \frac{\mu_4}{3^{\mu-4}.5^4}\right\}\vartheta^{2\mu+8}$$

$$M''_{2\mu+10} = -\left\{\frac{\mu}{3^{\mu-1}.13} + \frac{\mu_2.2}{3^{\mu-2}.5.11} + \frac{\mu_2.2}{3^{\mu-2}.7.9} + \frac{\mu_3.3}{3^{\mu-3}.5^2.9} + \frac{\mu_3.3}{3^{\mu-3}.5.7^2} + \frac{\mu_4.4}{3^{\mu-4}.5^3.7} + \frac{\mu_5}{3^{\mu-5}.5^5}\right\}\vartheta^{2\mu+10}$$

u. s. w.

Für die Entwickelung von N sind die Coefficienten

$$N_1 = \frac{\vartheta^2}{2}$$

$$N_2 = \frac{\vartheta^4}{1.2.2^2}$$

$$N_3 = \frac{\vartheta^6}{1.2.3.2^3} - \frac{1.\vartheta^4}{1.2.2}$$

$$N_4 = \frac{\vartheta^8}{1.2.3.4.2^4} - \frac{(1+2)\vartheta^6}{1.2.3.2^3}$$

$$N_5 = \frac{\vartheta^{10}}{1.2.3.4.5.2^5} - \frac{(1+2+3)\vartheta^8}{1.2.3.4.2^3} + \frac{1.2.\vartheta^6}{1.2.3.2}$$

$$N_6 = \frac{\vartheta^{12}}{1.2\ldots6.2^6} - \frac{(1+2+3+4)\vartheta^{10}}{1.2.3.4.5.2^4} + \frac{(1.2+1.3+2.3)\vartheta^8}{1.2.3.4.2^2}$$

u. s. w.

Legt man also in den zunächst vorigen Gleichungen der Gröfse μ noch die bestimmten Zahlenwerthe 1, 2, 3 etc. bei, und nimmt die so erhaltenen bestimmten Werthe von $M_2^1 = \frac{\vartheta^2}{3}$, $M_4^1 = -\frac{\vartheta^4}{5}$, $M_6^1 = \frac{\vartheta^6}{7}$ . . . . . ;

$M_4^2 = \frac{\vartheta^4}{3^2}$, $M_6^2 = -\frac{2\vartheta^6}{3.5}$ . . . ; $M_6^3 = \frac{\vartheta^6}{3^3}$, $M_8^3 = -\frac{5\vartheta^8}{3^2.5}$ . . . ; u. s. w., sammt den für N_1, N_2, N_3 . . . angegebenen, so wird

$$\frac{\sin nx}{(\cos x)^n} =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\sin\vartheta \\
+ \sin\vartheta . \frac{\vartheta^2}{2} . n^2 \\
+ \left[\sin\vartheta . \frac{\vartheta^4}{1.2.2^2} - \cos\vartheta . \frac{\vartheta^3}{3}\right] n^3 \\
+ \left[\sin\vartheta \left(\frac{\vartheta^6}{1.2.3.2^3} - \frac{\vartheta^4}{1.2.2}\right) - \cos\vartheta . \frac{\vartheta^5}{2.3}\right] n^5 \\
+ \left\{\begin{array}{l}\sin\vartheta \left(\frac{\vartheta^8}{1.2.3.4.2^4} - \frac{(1+2)\vartheta^6}{1.2.3.2^3} - \frac{\vartheta^6}{1.2.3^2}\right) \\ \quad - \cos\vartheta \left(\frac{\vartheta^7}{1.2.2^2.3} - \frac{\vartheta^5}{5}\right)\end{array}\right\} n^4 \\
+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{array}\right.$$

Die

Die Coefficienten von n^{-1}, n^{-3}, n^{-5} etc. ergeben also als Endresultat die Summen der Reihen in der Gleichung (A), welche zu suchen waren.

§. 2.

Aehnlich der Reihe für $\frac{\sin nx}{(\cos x)^n}$ kann man

$$\frac{\cos nx}{(\cos x)^n} = 1 - \frac{n.n-1}{1.2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^4 - \ldots,$$

behandeln. Indem man auch hierin $\frac{\sin x}{\cos x} = \tang x = \frac{\vartheta}{n}$ setzt, hat man:

(B) . . . . $\frac{\cos nx}{(\cos x)^n} =$

$$1 - \frac{1}{1.2}\vartheta^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\vartheta^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\vartheta^6 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1+2+3}{1.2.3.4}\vartheta^2 + \frac{1+2+3+4+5}{1.2.3.4.5.6}\vartheta^4 - \frac{1+2+\ldots+7}{1.2\ldots9}\vartheta^6 + \ldots\right)\frac{\vartheta^2}{n}$$

$$+ \left(\frac{1.2+1.3+2.3}{1.2.3.4} - \frac{1.2+1.3+\ldots+4.5}{1.2\ldots6}\vartheta^2 + \frac{1.2+\ldots+6.7}{1.2\ldots8}\vartheta^4 - \ldots\right)\frac{\vartheta^4}{n^2}$$

$$- \left(\frac{1.2.3}{1.2.3.4} - \frac{1.2.3+\ldots+3.4.5}{1.2\ldots6}\vartheta^2 + \frac{1.2.3+\ldots+5.6.7}{1.2\ldots8}\vartheta^4 - \ldots\right)\frac{\vartheta^4}{n^3}$$

$$- \text{ etc.},$$

wo also die Coefficienten von n^{-1}, n^{-3}, n^{-5} etc. Reihen derselben Natur sind, als die schon behandelten, und es ist hier

$$\frac{\cos nx}{(\cos x)^n} = \cos\left(\vartheta - \tfrac{1}{3}\frac{\vartheta^3}{n^2} + \tfrac{1}{5}\frac{\vartheta^5}{n^4} - \right) \times \left(1 + \frac{\vartheta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

oder nach der schon oben angenommenen Bedeutung von M und N,

$$\frac{\cos nx}{(\cos x)^n} = N.\cos(\vartheta - \vartheta M)$$

Mithin in

$$\frac{\cos nx}{(\cos x)^n} = N\left(\cos\vartheta + \sin\vartheta.\frac{\vartheta M}{1} - \cos\vartheta.\frac{\vartheta^2 M^2}{1.2} - \sin\vartheta.\frac{\vartheta^3 M^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

die Entwickelungen von N und der Potenzen von M nach negativ steigenden Potenzen von n gesetzt,

$$\frac{\cos nx}{(\cos x)^n} = \ldots\ldots$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta \\ +\cos\vartheta \cdot N_1 n^{-1} \\ +(\cos\vartheta \cdot N_2 + \sin\vartheta \cdot M_2^1\vartheta)\, n^{-2} \\ +(\cos\vartheta \cdot N_3 + \sin\vartheta \cdot N_1 \cdot M_2^1\vartheta)\, n^{-3} \\ +\left\{\cos\vartheta\left(N_4 - M_4^2 \frac{\vartheta^2}{1.2}\right) + \sin\vartheta\,(N_2 M_2^1\vartheta + M_4^1\vartheta)\right\} n^{-4} \\ +\left\{\cos\vartheta\left(N_5 - N_1 M_4^2 \frac{\vartheta^2}{1.2}\right) + \sin\vartheta\,(N_3 M_2^1\vartheta + N_1 M_4^1\vartheta)\right\} n^{-5} \\ +\left\{\begin{array}{l}\cos\vartheta\left(N_5 - N_2 M_4^2 \frac{\vartheta^2}{1.2} - M_6^2 \frac{\vartheta^2}{1.2}\right) \\ +\sin\vartheta\left(N_4 M_2^1\vartheta + N_2 M_4^1\vartheta + M_6^1\vartheta - M_6^3 \frac{\vartheta^3}{1.2.3}\right)\end{array}\right\} n^{-6} \\ +\left\{\begin{array}{l}\cos\vartheta\left(N_7 - N_3 M_4^2 \frac{\vartheta^2}{1.2} - N_1 M_6^2 \frac{\vartheta^2}{1.2}\right) \\ +\sin\vartheta\left(N_5 M_2^1\vartheta + N_3 M_4^1\vartheta + N_1 M_6^1\vartheta - N_1 M_6^3 \frac{\vartheta^3}{1.2.3}\right)\end{array}\right\} n^{-7} \\ +\text{etc.} \end{cases}$$

Setzt man die absoluten Werthe der Coefficienten $N_1, N_2 \ldots M_2^1, M_4^1$ etc. in der letzten Gleichung, so hat man

$$\frac{\cos nx}{(\cos x)^n} = \ldots\ldots$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta \\ +\cos\vartheta \cdot \frac{\vartheta^2}{2} \cdot n^{-1} \\ +\left\{\cos\vartheta \cdot \frac{\vartheta^4}{1.2.2^2} + \sin\vartheta \frac{\vartheta^3}{3}\right\} n^{-3} \\ +\left\{\cos\vartheta\left(\frac{\vartheta^6}{1.2.3.2^3} - \frac{\vartheta^4}{1.2.2}\right) + \sin\vartheta \frac{\vartheta^5}{2.3}\right\} n^{-5} \\ +\left\{\cos\vartheta\left(\frac{\vartheta^8}{1.2.3.4.2^4} - \frac{(1+2)\vartheta^6}{1.2.3.2^3} - \frac{\vartheta^6}{1.2.5^2}\right) + \sin\vartheta\left(\frac{\vartheta^7}{1.2.2^2.3} - \frac{\vartheta^5}{5}\right)\right\} n^{-4} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Coefficienten der negativen Potenzen von n sind also die Summen der unendlichen Reihen, welche gleichen Potenzen von n im ersten Ausdrucke (B) von $\frac{\cos nx}{(\cos x)^n}$ zugehören.

§. 3.

Man setze in der binomischen Potenzentwickelung

$$(1+u)^n = 1 + nu + \frac{n.n-1}{1.2}u^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}u^3 + \ldots$$

$$v = nu \quad \text{also} \quad u = \frac{v}{n}$$

so folgt, wenn man die Entwickelung nach negativen Potenzen von n ordnet,

$$(A) \quad \ldots \quad (1+u)^n = \left(1+\frac{v}{n}\right)^n =$$

$$1 + v + \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4 + \ldots$$

$$-\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1+2}{1.2.3}v + \frac{1+2+3}{1.2.3.4}v^2 + \frac{1+\ldots+4}{1\ldots5}v^3 + \ldots\right)v^2.n^{-1}$$

$$+\left(\frac{1.2}{1.2.3} + \frac{1.2+1.3+2.3}{1.2.3.4}v + \frac{1.2+\ldots+3.4}{1.2.3.4.5}v^2 + \frac{1.2+\ldots+4.5}{1.2\ldots6}v^3 + \ldots\right)v^3.n^{-2}$$

$$-\left(\frac{1.2.3}{1.2.3.4} + \frac{1.2.3+\ldots+2.3.4}{1\ldots5}v + \frac{1.2.3+\ldots+3.4.5}{1\ldots6}v^2 + \ldots\right)v^4.n^{-3}$$

$$+ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Es ist aber

$$(1+u)^n = e^{n\log(1+u)} = e^{nu - n\frac{u^2}{2} + n\frac{u^3}{3} - \ldots}$$

also

$$\left(1+\frac{v}{n}\right)^n = e^v . e^{-\frac{v^2}{2}n^{-1}} . e^{\frac{v^3}{3}n^{-2}} . e^{-\frac{v^4}{4}n^{-3}} \ldots\ldots\ldots$$

mithin (B) . . . . . .

$$\left(1+\frac{v}{n}\right)^n = e^v \left(1 - \frac{v^2}{2}n^{-1} + \frac{v^4}{2^2}\frac{n^{-2}}{1.2} - \frac{v^6}{2^3}\frac{n^{-3}}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{v^3}{3}n^{-2} + \frac{v^6}{3^2}\frac{n^{-4}}{1.2} + \frac{v^9}{3^3}\frac{n^{-6}}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$\times \left(1 - \frac{v^4}{4}n^{-3} + \frac{v^8}{4^2}\frac{n^{-6}}{1.2} - \frac{v^{12}}{4^3}\frac{n^{-9}}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{v^5}{5}n^{-4} + \frac{v^{10}}{5^2}\frac{n^{-8}}{1.2} + \frac{v^{15}}{5^3}\frac{n^{-12}}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$\times \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Man führe die Multiplikation wirklich aus, und ordne das Produkt nach negativ steigenden Potenzen von n. Damit die Zusammensetzung des Resultats übersehen werden könne, hat man nur zu bemerken, dafs die einzelnen Glieder, nämlich Partialprodukte, des Produkts der Reihen nicht zwei oder mehrere Glieder derselbigen Reihe als Faktoren enthalten können. Bezeichnet man also mit (ϱ, μ) den Coefficienten des μ^{ten} Gliedes der ϱ^{ten} Reihe, indem man das Glied 1 ohne n nicht mitzählt, so ist dieser Coefficient

$$(\varrho, \mu) = (-1)^{\varrho\mu} \frac{\nu^{(\varrho+1)\mu}}{(\varrho+1)^{\mu} \cdot 1.2 \ldots \mu}$$

und gehört zu $n^{-\varrho\mu}$.

Bezeichnet man demnach auch vom Anfange an die Coefficienten bei den Potenzen von n mit (1. 1), (1, 2), (1, 3) etc. in der ersten, mit (2, 1), (2, 2), (2, 3) etc. in der zweiten, mit (3, 1), (3, 2) etc. in der dritten Reihe u. s. w., so wird:

(C) $$\left(1+\frac{\nu}{n}\right)^{n} = \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l}
e^{\nu} \\
+ [1,1]\, e^{\nu}.n^{-1} \\
+ [(1,2)+(2,1)]\, e^{\nu}.n^{-2} \\
+ [(1,3)+(3,1)+(1,1)(2,1)]\, e^{\nu}.n^{-3} \\
+ [(1,4)+(2,2)+(4,1)+(1,2)(2,1)+(1,1)(3,1)]\, e^{\nu}.n^{-4} \\
+ [(1,5)+(5,1)+(1,1)(4,1)+(1,3)(2,1)+(2,1)(3,1)]\, e^{\nu}.n^{-5} \\
+ \left\{\begin{array}{l} (1,6)+(2,3)+(1,1)(5,1)+(1,2)(4,1)+(1,2)(2,2) \\ +(6,1)+(3,2) \qquad\qquad +(2,1)(1,4) \\ \qquad\qquad +(1,3)(3,1)+(1,1)(2,1)(3,1) \end{array}\right\} e^{\nu}.n^{-6} \\
+ \left\{\begin{array}{l} (1,7)+(1,1)(6,1)+(1,2)(5,1)+(1,3)(4,1) \\ +(7,1) \qquad\qquad +(2,1)(1,5)+(3,1)(1,4) \\ \qquad\qquad +(2,1)(5,1)+(3,1)(4,1) \\ +(1,1)(3,2)+(1,3)(2,2)+(1,2)(2,1)(3,1)+(1,1)(3,1)(4,1) \\ +(1,1)(2,3)+(3,1)(2,2) \end{array}\right\} e^{\nu}.n^{-7} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Das Gesetz ist leicht zu übersehen. Es enthält nämlich der Coefficient von n^{-7} z. B. alle diejenigen Gröfsen der Form (ϱ, μ), in welchen $\varrho\mu = 7$; die Gröfsen von der Form $(\varrho, \mu)\,(\varrho_1, \mu_1)$, in welchen $\varrho\mu + \varrho_1\mu_1 = 7$;

diejenigen der Form $(\varrho, \mu)\ (\varrho_{,}, \mu_{,})\ (\varrho_{,,}, \mu_{,,})$, in welchen $\varrho\mu + \varrho_{,}\mu_{,} + \varrho_{,,}\mu_{,,} = 7$, wo aber ϱ, $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$ verschiedene Zahlen seyn müssen in den einzelnen Verbindungen zu drei Faktoren, so wie ϱ, $\varrho_{,}$, in denen zweier Faktoren verschieden seyn müssen.

§. 4.

Um zu der Entwickelung von $\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n$ nach fallenden Potenzen von n auf eine andere Weise zu gelangen, setze man $\frac{1}{n} = y$ und

$$(1 + yv)^{1:y} = e^v + Ay + B\frac{y^2}{1.2} + C\frac{y^3}{1.2.3} + \ldots,$$

so sind A, B, C ... die nach einander folgenden Differentiale von $(1 + yv)^{1:y}$, wenn y als veränderlich betrachtet wird und man in den erhaltenen Differentialen $dy = 1$ und $y = 0$ setzt. Vom ersten Gliede e^v ist hier schon als bekannt angenommen, dafs die zu entwickelnde Funktion für $y = 0$ in dasselbe übergehe.

Nun ist

$$d(1 + yv)^{1:y} = (1 + yv)^{1:y}\left((1 + yv)\, d\frac{1}{y} + \frac{1}{y}\frac{d(1 + yv)}{1 + yv}\right)$$

dieses wird für $dy = 1$ gleich

$$(1 + yv)^{1:y}\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{v}{1 + yv} - \frac{1}{y^2}\log(1 + yv)\right)$$

welches aber, wenn man $y = 0$ setzt, zu keinem Resultate führt, da die beiden Theile des zweiten Faktors unendlich werden. Man ist daher genöthiget, diesen Faktor zu entwickeln. Es wird derselbe

$$\left.\begin{array}{l} \frac{v}{y}(1 - vy + v^2y^2 - \ldots) \\ -\frac{1}{y^2}\left(vy - \frac{v^2y^2}{2} + \frac{v^3y^3}{3} - \ldots\right) \end{array}\right\} = -\frac{v^2}{2} + \frac{2}{3}v^3y - \frac{3}{4}v^4y^2 + \ldots$$

also gleich $-\frac{v^2}{2}$ für $y = 0$, und da der erste Faktor e^v wird, so ist

$$A = -\frac{v^2}{2}e^v$$

Man setze, der Bequemlichkeit halber, den zweiten allgemeinen zuletzt gefundenen Faktor

$$-\frac{v^2}{2}+\frac{2v^3}{3}y-\frac{3v^4}{4}y^2+\ldots=u$$

und $(1+yv)^{\frac{1}{y}}=z$,

so ist in der ersten Differentiation nach y gefunden

$$dz=zu$$

daher, stets für $dy=1$,

$$d^2z=d(zu)=z(u^2+du)$$
$$d^3z=z(u^3+3udu+ddu)$$
$$d^4z=z(u^4+6u^2du+4ud^2u+3(du)^2+d^3u)$$

u. s. w.

für $y=0$ gehen diese Gleichungen über in

$$B=e^v\left(\frac{v^4}{2^2}+\frac{2v^3}{3}\right)$$

$$C=e^v\left(-\frac{v^6}{2^3}-\frac{3.2v^5}{2.3}-\frac{6v^4}{4}\right)$$

$$D=e^v\left(\frac{v^8}{2^4}+\frac{6.2v^7}{2^2.3}+\frac{4.6v^6}{2.4}+\frac{3.2^2v^5}{3.3}+\frac{1.2.4v^5}{5}\right)$$

u. s. w.

Aber auf diese Weise geht die Uebersicht des Fortschreitens der Coefficienten verloren, und wäre besonders nachzusuchen, wobei ich aber hier nicht verweilen will, da es aus der vorigen Behandlung erhellt.

§. 5.

Bezeichnet man die Summe aller einzelner ganzer Zahlen von 1 bis λ, mit $\overset{1}{\lambda}$, und mit $\overset{2}{\lambda}$, $\overset{3}{\lambda}$ etc., die Summe aus den Produkten derselben zu zweien, dreien etc., so dafs keines der Produkte ganz aus denselben Faktoren besteht als ein anderes; so ist (A') . . .

$$\left(1-\frac{v}{n}\right) = 1 - v + \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1..4}v^4 - \ldots$$
$$- \left(\frac{1}{1.2} - \frac{2}{1.2.3}v + \frac{3}{1..4}v^2 + \frac{4}{1..5}v^3 + \ldots\right) v^2 . n^{-1}$$
$$- \left(\frac{2}{1.2.3} - \frac{3}{1..4}v + \frac{4}{1..5}v^2 - \frac{5}{1..6}v^3 + \ldots\right) v^3 . n^{-2}$$
$$- \left(\frac{3}{1..4} - \frac{4}{1..5}v + \frac{5}{1..6}v^2 + \frac{6}{1..7}v^3 + \ldots\right) v^4 . n^{-3}$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

wie aus der obigen Formel (A) für $\left(1+\frac{v}{n}\right)^n$ hervorgeht, indem man in derselben nur v negativ zu nehmen hat, um diese zu erhalten. Das $\left(1-\frac{v}{n}\right)^n$ im Produkte unendlicher Reihen ausgedrückt, erhält man also aus (B) ebenfalls, indem man in derselben v negativ setzte. Bezeichnet man dann auch den μ^{ten} Coefficienten der ϱ^{ten} Reihe, d. i. den Coefficienten von $n^{-\varrho\mu}$ in derselbigen wie oben mit (ϱ, μ), so ist

$$(\varrho, \mu) = (-1)^\mu \frac{v^{(\varrho+1)\mu}}{(\varrho+1)^\mu . 1.2 \ldots \mu},$$

und man hat nur die Werthe von (ϱ, μ) in bestimmten Zahlen für ϱ und μ nach dieser Gleichung in die oben mit (C) bezeichnete zu setzen,, und e^{-v} statt e^v, so hat man den Werth von $\left(1-\frac{v}{n}\right)^n$ in einer Reihe nach fallenden Potenzen von n mit endlichen Coefficienten, welche also die Summen derjenigen Reihen sind, welche im Ausdruck (A') für $\left(1-\frac{v}{n}\right)^n$ bei denselben Potenzen von n als Coefficient befindlich sind.

Setzt man, um das Verschiedene der Formeln für $\left(1+\frac{v}{n}\right)^n$ und $\left(1-\frac{v}{n}\right)^n$ ausdrücken zu können,

$$[\varrho, \mu] = \frac{v^{(\varrho+1)\mu}}{(\varrho+1)^\mu . 1.2 \ldots \mu},$$

so ist diese Gröfse für beide Fälle anwendbar, und nur das Zeichen zu berücksichtigen. In der Formel C also

$$(\varrho, \mu) = (-1)^{\varrho\mu}\,[\varrho, \mu] \text{ gesetzt, giebt } \left(1 \pm \frac{v}{n}\right)^n;$$

und $(\varrho, \mu) = (-1)^{\mu}\,[\varrho, \mu]$ gesetzt, giebt $\left(1 - \frac{v}{n}\right)^n$

wenn zugleich e^{-v} statt e^{v} gesetzt wird, wo diese Gröfse erscheint.

Daher ist:

$$(CC) \quad \left(1 \pm \frac{v}{n}\right)^n = \ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\pm v} \\ -[1,1]\,e^{\pm v}.n^{-1} \\ +([1,2] \pm [2,1])\,e^{\pm v}.n^{-2} \\ -([1,3]+[3,1] \pm [1,1][2,1])\,e^{\pm v}.n^{-3} \\ +\left(\begin{array}{l}[1,4]+[2,2] \pm [1,2][2,1]+[1,1][3,1] \\ \pm [4,1]\end{array}\right) e^{\pm v}.n^{-4} \\ -\left(\begin{array}{ll}[1,5] \pm [1,1][4,1] \pm [1,3][2,1] \\ +[5,1] \qquad\quad \pm [3,1][2,1]\end{array}\right) e^{\pm v}.n^{-5} \\ +\left\{\begin{array}{ll}[1,6]+[2,3]+[1,1][5,1] \pm [1,2][4,1] \\ \pm [6,1]+[3,2] \qquad\quad \pm [2,1][1,4] \\ \quad +[1,2][2,2]+[1,3][3,1] \pm [1,1][2,1][3,1]\end{array}\right\} e^{\pm v}.n^{-6} \\ -\text{ etc.}\end{array}\right\}$$

und man hat also durch Vergleichung mit den Reihen

$$(A) \quad [1,1]\,e^{\pm v} = \frac{v^2}{2}e^{\pm v} = \frac{1}{1.2}v^2 \pm \frac{2}{1.2.3}v^3 + \frac{5}{1..4}v^4 \pm \ldots$$

$$(B) \quad \left\{\begin{array}{l} ([1,2] \pm [2,1])\,e^{\pm v} = \left(\frac{v^4}{2^2.1.2} \pm \frac{v^3}{3.1}\right) e^{\pm v} = \\ \pm \frac{2}{1.2.3}v^3 + \frac{3}{1..4}v^4 \pm \frac{4}{1..5}v^5 + \frac{5}{1..6}v^6 \pm \ldots \end{array}\right.$$

(C)

$$(C)\begin{cases} ([1,3]+[3,1]\pm[1,1][2,1])\,e^{\pm v} = \\ \left(\frac{v^6}{2^3.1.2.3}+\frac{v^4}{4.1}\pm\frac{v^5}{2.3.1.1}\right)e^{\pm v} = \\ \frac{3}{1..4}v^4\pm\frac{4}{1..5}v^5+\frac{5}{1..6}v^5\pm\frac{6}{1..7}v^7+\ldots. \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} ([1,4]\pm[4,1]+[2,2]\pm[1,2][2,1]+[1,1][3,1])\,e^{\pm v} = \\ \left(\frac{v^8}{2^4.1..4}\pm\frac{5^5}{5.1}+\frac{v^6}{5^2.1.2}\pm\frac{v^7}{2^2.5.2}+\frac{v^6}{2.4}\right)e^{\pm v} = \\ \pm\frac{4}{1..5}v^5+\frac{5}{1..6}v^5\pm\frac{6}{1..7}v^7+\frac{7}{1..8}v^8\pm\ldots. \end{cases}$$

u. s. w.

Eine jede dieser Doppelgleichungen giebt zwei andere, nachdem man die einzelnen, aus welchen sie bestehen, addirt, oder von einander subtrahirt.

Aus der ersten (A) folgen:

$$\frac{v^2}{2}\left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)=\frac{1}{1.2}v^2+\frac{3}{1..4}v^4+\frac{5}{1..6}v^6+\ldots\ldots\ldots(A')$$

$$\frac{v^2}{2}\left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)=\frac{2}{1.2.3}v^3+\frac{4}{1..5}v^5+\frac{6}{1..7}v^7+\ldots\ldots(A'')$$

Aus der zweiten (B) folgen:

$$\frac{v^4}{2^3.1.2}\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{2}+\frac{v^3}{3}\cdot\frac{e^v+e^{-v}}{2}=\frac{2v^3}{1.2.3}+\frac{4v^5}{1..5}+\frac{6v^7}{1..7}+\ldots(B')$$

$$\frac{v^4}{2^3.1.2}\cdot\frac{e^v+e^{-v}}{2}+\frac{v^3}{3}\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{2}=\frac{3v^4}{1..4}+\frac{5v^6}{1..6}+\frac{7v^8}{1..8}+\ldots(B'')$$

Aus der dritten (C) folgen:

$$\left(\frac{v^6}{2^3.1.2.3}+\frac{v^4}{4}\right)\frac{e^v+e^{-v}}{2}+\frac{v^5}{2.3}\cdot\frac{e^v-e^{-v}}{2}=\frac{3v^4}{1..4}+\frac{5v^6}{1..6}+\frac{7v^8}{1..8}+\ldots(C')$$

$$\left(\frac{v^6}{2^3.1.2.3}+\frac{v^4}{4}\right)\frac{e^v-e^{-v}}{2}+\frac{v^5}{2.3}\cdot\frac{e^v+e^{-v}}{2}=\frac{4v^5}{1..5}+\frac{6v^7}{1..7}+\frac{8v^9}{1..9}+\ldots(C'')$$

u. s. w.

Setzt man ferner in diesen $v\sqrt{-1}$ statt v, so entstehen die Summen dieser Reihen mit abwechselnden Zeichen, nämlich:

$$(a') \ldots -\frac{v^2}{2}\cos v = -\frac{v^2}{1.2} + \frac{3.v^4}{1..4} - \frac{5v^6}{1..6} + \ldots$$

$$(a) \ldots -\frac{v^2}{2}\sin v = -\frac{2v^3}{1.2.3} + \frac{4v^5}{1..5} - \frac{6v^7}{1..7} + \ldots$$

$$(b') \ldots \frac{v^4}{2^2.1.2}\sin v - \frac{v^3}{3}\cos v = -\frac{2v^3}{1.2.3} + \frac{4v^5}{1..5} - \frac{6v^7}{1..7} + \ldots$$

$$(b) \ldots \frac{v^4}{2^2.1.2}\cos v - \frac{v^3}{3}\sin v = \frac{3v^4}{1..2} - \frac{5v^6}{1..6} + \frac{7v^8}{1..8} - \ldots$$

$$(c') \ldots \left(-\frac{v^6}{2^3.1.2.3} + \frac{v^4}{4}\right)\cos v + \frac{v^5}{2.3}\sin v = \frac{3v^4}{1..4} - \frac{5v^6}{1..6} + \frac{7v^8}{1..8} - \ldots$$

$$(c) \ldots \left(-\frac{v^6}{2^3.1.2.3} + \frac{v^4}{4}\right)\sin v + \frac{v^5}{2.3}\cos v = \frac{4v^5}{1..5} - \frac{6v^7}{1..7} + \frac{8v^9}{1..9} - \ldots$$

u. s. w.

Dieses sind eben dieselben Formen, welche oben (§. 1 und 2.) auf eine andere Weise erhalten worden.

Aus diesen Reihen lassen sich durch wiederholte Differentiationen und Integrationen unendlich viele andere nebst deren Summen ableiten, so wie auch durch Verbindung verschiedener Reihen mit einander.

Nicht unmerkwürdig ist es, dafs die Summenausdrücke der behandelten Reihen als Formeln betrachtet werden können, um die Summen der Produkte der natürlich sich folgenden Zahlen von 1 bis n, zu zweien, dreien etc. zu finden, indem diese entstehen, wenn man aus jenen Summenformeln den Coefficienten von $\frac{v^{n+1}}{1.2\ldots n+1}$ entwickelt. Auch lassen sich aus jenen, diese als Funktion von n ohne Schwierigkeit allgemein darstellen. Da sich diese aber auch unabhängig von den befolgten Entwickelungen finden lassen, so bietet sich noch ein anderer Weg dar, um zu den Ausdrücken zu gelangen, welche die obigen Reihen ergeben, welchen ich jedoch hier mich begnüge angedeutet zu haben.

Die binomische Potenz giebt noch andere, den behandelten in einer Rücksicht ähnliche Reihen, welche also neben jenen nicht am unrechten Orte stehen, da sie meines Wissens noch nicht aus der Potenzentwickelung abgeleitet worden sind. Es sey diese die von $(1-z)^n$, man ordne sie nach Potenzen von n, so ist

$$(A) \quad (1-z)^n = \left\{ \begin{array}{l} 1 - n\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \ldots\right) \\ + n^2\left(\frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1+2}{1.2.3}z^3 + \frac{1.2+1.3+2.3}{1.2.3.4}z^4 + \ldots\right) \\ - n^3\left(\frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{1+2+3}{1.2.3.4}z^4 + \frac{1.2+\ldots+3.4}{1.2.3.4.5}z^5 + \ldots\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Das Gesetz dieser Entwickelung geht aus denen der Coefficienten $n.n-1.n-2..$ hervor, welche, nach n entwickelt, die Summe aller ganzer Zahlen, die ihrer Produkte zu zweien, dreien u. s. w., wie bekannt, als Coefficienten zu sich nehmen, welche also wie zuvor bezeichnet werden sollen.

Man integrire die Gleichung (A), so entsteht

$$(B) \quad \ldots\ldots \quad C - \frac{(1-z)^{n+1}}{n+1} = \ldots\ldots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z - n\left(\frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{3.4}z^4 + \frac{1}{4.5}z^5 + \ldots\right) \\ + n^2\left(\frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{2}{1.2.3.4}z^4 + \frac{3}{1.2.3.4.5}z^5 + \frac{4}{1..6}z^5 + \ldots\right) \\ - n^3\left(\frac{1}{1.2.3.4}z^4 + \frac{3}{1.2\ldots5}z^5 + \frac{4}{1.2\ldots6}z^6 + \frac{5}{1.2\ldots7}z^7 + \ldots\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Der Coefficient von n kann auch den übrigen analog bezeichnet werden durch

$$n\left(\frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{2}{1.2.3.4}z^4 + \frac{3}{1.2.3.4.5}z^5 + \ldots\right)$$

Für $z = o$ wird die Gleichung (B)

$$C - \frac{1^{n+1}}{1+n} = o$$

und giebt also den Werth der Beständigen $C = \frac{1}{1+n}$. Gebraucht man diesen, und setzt nun in (B) das $z = 1$, so wird sie

$$(C) \quad \frac{1}{1+n} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - n\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{2}{1.2.3.4} + \frac{3}{1.2.3.4.5} + \ldots\right) \\ + n^2\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{2}{1.2.3.4} + \frac{3}{1.2\ldots5} + \frac{4}{1.2\ldots6} + \ldots\right) \\ - n^3\left(\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{3}{1.2\ldots5} + \frac{4}{1.2\ldots6} + \frac{5}{1.2\ldots7} + \ldots\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \quad (A)$$

Allein das erste Glied dieser Gleichung entwickelt giebt auch die Gleichung

$$(C') \ldots \quad \frac{1}{1+n} = 1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - \ldots.$$

welches, da das andere Glied mit dem in (C) identisch seyn muſs, zeigt, daſs alle dort in n, n^2, n^3 u. s. w. multiplizirende unendliche Reihen jede gleich 1 sind.

Man multiplizire die Gleichung (B), für die Beständige C ihr gefundener Werth gesetzt, mit dz, und integrire abermals, so entsteht

$$(D) \ldots \quad C + \frac{z}{n+1} + \frac{(1-z)^{n+2}}{n+1 \cdot n+2} = \ldots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z^2}{2} - n\left(\frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{1}{1.2.3.4}z^4 + \frac{2}{1.2\ldots5}z^5 + \frac{3}{1.2\ldots6}z^6 + \ldots\right) \\ + n^2\left(\frac{1}{1.2.3.4}z^4 + \frac{2}{1.2\ldots6}z^5 + \frac{3}{1.2\ldots7}z^6 + \frac{4}{1.2\ldots8}z^7 + \ldots\right) \\ - n^3\left(\frac{1}{1.2\ldots5}z^5 + \frac{3}{1.2\ldots6}z^6 + \frac{4}{1.2\ldots7}z^7 + \frac{5}{1.2\ldots8}z^8 + \ldots\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Das $z = 0$ gesetzt, bestimmt die Constante

$$C = -\frac{1}{n+1 \,.\, n+2}$$

Setzt man dann $z = 1$ in der Gleichung, so wird dieselbe, wenn auch statt des ersten Gliedes, welches gleich $\frac{1}{n+1}$, dessen Entwickelung gesetzt wird

$$(E) \ldots \frac{1}{2} - n.\frac{1}{4} + n^2.\frac{1}{8} - n^3.\frac{1}{16} + \ldots =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - n\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{2}{1.2..5} + \frac{3}{1.2..6} + \ldots\right) \\ +n^2\left(\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{2}{1.2..5} + \frac{3}{1.2..6} + \frac{4}{1.2..7} + \ldots\right) \\ -n^3\left(\frac{1}{1.2..5} + \frac{3}{1.2..6} + \frac{4}{1.2..7} + \frac{5}{1.2..8} + \ldots\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

worin wegen identischer Gleichheit der Glieder die Coefficienten derselben Potenzen von n gleich sind, die im ersten also die Summen der unendlichen Reihen im andern ausdrücken.

Integrirt man die Gleichung (D) mit der für sie bestimmten Constante abermahls nach z, oder, welches dasselbe, integrirt man die Gleichung (A) drei mal, so wird deren erstes Glied:

$$(F) \ldots C - \frac{z}{n+1 \,.\, n+2} + \frac{z^2}{2(n+1)} - \frac{(1-z)^{n+3}}{n+1 \,.\, n+2 \,.\, n+3}$$

und weil das andere Glied mit z Null wird, so ist

$$C = \frac{1}{n+1 \,.\, n+2 \,.\, n+3}$$

und für $z = 1$ wird damit jener Ausdruck

$$\frac{1}{n+1 \,.\, n+2 \,.\, n+3} - \frac{1}{1 \,.\, n+1 \,.\, n+2} + \frac{1}{1.2 \,.\, n+1} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{n+3} \ldots (G).$$

Der Coefficient von n^2, in dessen Entwickelung also

$$\frac{1}{1.2.3} \text{ oder } \frac{1}{3!} \ldots (H).$$

Aus dem andern Gliede aber wird der Coefficient von n^i gleichseyn: . . . (I)

$$\frac{1}{1.2\ldots(\lambda+5)}+\frac{\lambda^1}{1.2\ldots(\lambda+4)}+\frac{(\lambda+1)^2}{1.2\ldots(\lambda+5)}+\frac{(\lambda+2)^5}{1.2\ldots(\lambda+6)}+\ldots$$

von welcher unendlichen Reihe also $\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5^\lambda}$ die Summe ist.

Integrirt man die Gleichung (A) imal nacheinander, so wird das erste Glied, wenn man $z=1$ setzt, seyn:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1.2..(i-1).(n+1)}-\frac{1}{1.2..(i-2).(n+1)(n+2)}+\frac{1}{1.2..(i-3)(n+1)(n+2)(n+3)}-..\\ \ldots+\frac{(-1)^{i-3}}{1.2.(n+1)(n+2)..(n+i-2)}+\frac{(-1)^{i-2}}{1.n+1.n+2..(n+i-1)}+\frac{(-1)^{i-1}}{(n+1)n+2..n+i}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{1.2..(i-1).(n+i)} \quad \ldots\ldots \text{(G')}$$

Die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke soll bald näher erwiesen werden.

Der Coefficient von n^λ in der Entwickelung dieses Bruches ist also gleich

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\,\frac{1}{i^\lambda} \quad \ldots\ldots \text{(H')}$$

Das andere Glied der Gleichung hat zum Coefficienten von n^λ die unendliche Reihe . . . . . (I')

$$\frac{1}{1.2..(\lambda+i)}+\frac{\lambda^1}{1.2..(\lambda+i+1)}+\frac{(\lambda+1)^2}{1.2..(\lambda+i+2)}+\frac{(\lambda+2)^5}{1.2..(\lambda+i+3)}+\text{etc.}$$

von welcher also der vorhergehende Ausdruck die Summe ist.

Die obige Gleichheit (G') zu erweisen, die auch so geschrieben werden kann

$$(-1)^{i-}\left\{\begin{array}{l}\frac{(-1)^{-1}}{n+1.n+2..n+i}+\frac{(-1)^{-2}}{1.n+1.n+2..(n+i-1)}+\frac{(-1)^{-3}}{1.2.n+1.n+2..(n+i-2)}+\ldots\\ \ldots+\frac{(-1)^{-i+2}}{1.2..(i-3).n+1.n+2.n+3}+\frac{(-1)^{-i+1}}{1.2..(i-2).n+1.n+2}+\frac{(-1)^{-i}}{1.2..(i-1).n+1}\end{array}\right.$$

$$=\frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)(n+i)}$$

subtrahire man das erste Glied vom folgenden, oder addire sie nach dem

Zeichen, welches sie, abgesehen vom allgemeinen Vorzeichen $(-1)^{-i}$, vor sich erhalten, so machen diese beiden Glieder zusammen

$$-\frac{n+i-1}{n+1.n+2\ldots n+1}$$

hiezu das folgende Glied $-\frac{1}{1.2.n+1\ldots(n+i-2)}$ gesetzt, giebt das Aggregat der ersten drei Glieder

$$-\frac{(n+i-2)(n+i-1)}{1.2.n+1.n+2\ldots n+i}$$

zu welchem das vierte $+\frac{1}{1.2.3.n+1\ldots(n+i-3)}$ gesetzt, die Summe der ersten vier Glieder giebt gleich

$$+\frac{(n+i-3)(n+i-2)(n+i-1)}{1.2.3.n+1.n+2\ldots n+i}$$

und es ist einleuchtend, dafs die Summe von μ Gliedern seyn wird, das Vorzeichen $(-1)^i$ beigezogen,

$$(-1)^{i+\mu}\frac{(n+i-\mu+1)(n+i-\mu+3)\ldots(n+i-1)}{1.2\ldots(\mu-1).n+1.n+2\ldots n+i}$$

$$=(-1)^{i+\mu}\frac{1}{1.2\ldots(\mu-1).n+1.n+2.n+i-\mu}\cdot\frac{1}{n+i}$$

für $\mu=i-1$ hat man die Summe aller Glieder bis auf das letzte

$$=(-1)^{2i-1}\frac{1}{1.2\ldots(i-2).n+1}\cdot\frac{1}{n+i}$$

zu welcher das letzte stets positive Glied $\frac{1}{1.2\ldots(i-1)(n+1)}$ gesetzt, die Summe der gesammten Glieder des Ausdrucks

$$=\frac{1}{1.2\ldots(i-1)}\cdot\frac{1}{n+i}$$

wird, wie es zu zeigen war.

Man kann die Gleichung für sich auch so ausdrücken:

$$\frac{1}{n+i}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{n+1}-\frac{i-1}{n+1.n+2}+\frac{i-1.i-2}{n+1.n+2.n+3}-\ldots\\ \ldots\pm\frac{i-1.i-2\ldots1}{n+1.n+2\ldots n+i-1}\mp\frac{i-1.i-2\ldots1}{n+1.n+2\ldots n+i}\end{array}\right.$$

§. 7.

Die obige Gleichung (A) §. 6. mufs einerlei seyn mit folgender;

$$(1-z)^n = 1 + n\log(1-z) + n^2\frac{[\log(1-z)]^2}{1\cdot 2} + n^3\frac{[\log(1-z)]^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

die dortigen Reihen sind also die Entwickelungen der Potenzen des Logarithms von $1-z$. Das oben gefundene i malige Integral jener gilt also für diese, und es ist also

$$\int^i (1-z)^n dz^i = \int^i dz^i + n\int^i \log(1-z)\cdot dz^i + n^2\int^i \frac{[\log(1-z)]^2}{1\cdot 2}\, dz^i + \ldots$$

Die Integrale stets von $z=0$ an genommen, ist für das i^{te} des ersten Gliedes von $z=0$ bis $z=1$ gefunden

$$\int^i (1-z)^n dz^i = \frac{1\cdot 2\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdots i}{1\cdot 2\cdots i-1\cdot n+i}$$

Es ist aber aus der vorigen allgemeinen Gleichung

$$\frac{d^\lambda \cdot \int^i (1-z)^n dz^i}{dn^\lambda} = 1\cdot 2\cdots\lambda \int^i \frac{[\log(1-z)]^\lambda dz^i}{1\cdot 2\cdots\lambda}$$

wenn nach der Differentiation n Null gesetzt wird.

Aber für das zwischen 0 und 1 begränzte Integral

$$\frac{d^\lambda \cdot \int^i (1-z)^n dz^i}{dn^\lambda} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots i-1}\cdot\frac{d^\lambda (n+i)^{-1}}{dn^\lambda} = (-1)^\lambda \frac{1\cdot 2\cdots\lambda}{1\cdot 2\cdots i-1}\, i^{-(\lambda+1)}$$

folglich ist in eben der Begränzung

$$\int^i \frac{[\log(1-z)]^\lambda dz^i}{1\cdot 2\cdots\lambda} = \frac{i}{1\cdot 2\cdots i}(-i)^{-\lambda}$$

oder

$$\int^i [\log(1-z)]^\lambda dz^i = \frac{1\cdot 2\cdots\lambda}{1\cdot 2\cdots i}\, i^{-\lambda+1}\cdot(-1)^\lambda$$

Da aber $(\log 1-z)^\lambda = \left(-\log\frac{1}{1-z}\right)^\lambda = (-1)^\lambda \log\left(\frac{1}{1-z}\right)^\lambda$

so ist

$$\int^i \left(\log\frac{1}{1-z}\right)^\lambda dz^i = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\lambda}{1\cdot 2\cdots i}\, i^{-\lambda+1}$$

§. 8.

§. 8.

Aus $\int^i (1-z)^n dz^i$ findet man $\int z^n (1-z)^n dz$

denn man entwickele dieses, als allgemein betrachtet, durch die bekannte Integrationsformel

$$\int z^m (1-z)^n dz =$$

$$z^m \int (1-z)^n dz - m z^{m-1} \iint (1-z)^n dz^2 + m.m-1 z^{m-2} \int^3 (1-z)^n dz - \ldots$$

so wird das Integral von $z=0$ bis 1 genommen, in Folge der unter dieser Voraussetzung bekannten Werthe der wiederholten Integrale von $(1-z)^n$,

$$\int z^m (1-z)^n dz =$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{n+2} + \frac{m.m-1}{1.2}\,\frac{1}{n+3} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\,\frac{1}{n+4} + \ldots$$

Das zweite Glied ist aber, die Differenz $\Delta n = 1$ genommen, gleich

$$(-1)^m \Delta^m \frac{1}{n+1},$$

und diese m^{te} Differenz ist gleich $\dfrac{1.2\ldots m}{n+1.n+2.n+3\ldots n+m+1}$, welches also der Werth des begränzten Integrals ist.

Setzt man $z = x^\lambda$, so wird das begränzte Integral in x von $x=0$ bis 1, mit dem in z einerlei Werth behalten, also wird auch seyn:

$$\int \lambda x^{(m+1)\lambda-1} (1-x^\lambda)^n dx = \frac{1.2\ldots m}{n+1.n+2.n+3\ldots(n+m+1)}$$

Im zweiten Gliede statt m dessen Werth aus der Gleichung

$$(m+1)\lambda - 1 = \mu$$

gesetzt, wird der Werth von $\int x^\mu \left(1-x^\lambda\right)^n dx$, zwischen $x=0$ und $x=1$ erhalten.

Man gelangt kürzer zum i^{ten} Integrale des ersten Gliedes der Gleichung (A) oder der Funktion $(1-z)^n$, wenn man sie zuerst entwickelt und dann Glied für Glied wiederholt integrirt, stets von $x=0$ an, es wird dann, das letzte Integral mit $x=1$ geschlossen,

$$\int^i (1-z)^n dz^i = \frac{1}{1.2\ldots i} - \frac{n}{1}\,\frac{1}{2.3\ldots i+1} + \frac{n.n-1}{1.2}\,\frac{1}{3.4\ldots i+2} - \ldots$$

und es läfst sich bei diesen Formeln der Algorithm benutzen, welcher in

einer Abhandlung unter denen aus den Jahren 1804 — 11 dargestellt ist. Setzt man, wie dort nämlich, das Zeichen $\mho^\lambda$ bedeute die Substitution von $x+\lambda$ statt x in der Funktion, auf welche es sich bezieht, so dafs $(\mho'-\mho^0)^\lambda fx=(\mho-1)^\lambda fx=\Delta^\lambda fx$, so ist klar, dafs obiges Integral wird, für $\mho i=i+1$ oder $\Delta i=1$,

$$\int^i (1-z)^n dz^i=(1-\mho)^n \frac{1}{1.2...i}=(-\Delta)^n \frac{1}{1.2...i}$$

Es ist aber

$$(-\Delta)^1 \frac{1}{1.2...i}=\Delta \frac{-1}{1.2...i}=\frac{i}{1.2...i.i+1}$$

also $(-\Delta)^n \frac{1}{1.2...i}=\frac{1}{1.2...i-1.(n+i)}$

Der Werth des Integrals ist also wie oben gefunden, und kann noch durch $\frac{1}{n+i}\, o^{-i+1)}$ ausgedrückt werden.

Bezeichnet man ein Produkt wie $\frac{1}{m+1.m+2...m+i}$ mit $m^{-i)}$, oder mit $\frac{1}{(m+i)^{i)}}$, so ist es augenfällig, dafs die Integrale, von $z=o$ an genommen, und zuletzt bis $z=1$ ausgedehnt, und $\mho$, Δ auf m bezogen, seyn werden

$$\int^i (1-z)^n z^m dz^i=(1-\mho)^n.m^{-i)}=(-\Delta)^n.m^{-i)}=(i+n-1)^{n)}.m^{-i-n)},$$

welches sich in die Formen entwickelt

$$\int^i (1-z)^n z^m dz^i=\frac{i.i+1.i+2...(i+n-1)}{m+1.m+2.m+3...(m+i+n)}=\frac{(i+n-1)^{n)}}{(i+n+m,^{n+i)}}$$

$$=\frac{m^{m-i+1)}}{(i+n+m)^{m+1)}}=\frac{i.i+1...(m-1)\,m}{(i+n).(i+n+1)...(i+n+m)}$$

$$=\frac{(i+n-1)^{n)}}{(i+m+n,^{n)}}m^{-i)}=\frac{i.i+1...(i+n-1)}{(m+i+1)(m+i+2)...(m+i+n)}\,\frac{1}{m+1.m+2...m+i}$$

$$=\frac{(i+m)^{m+1)}}{(i+m+n,^{m+1)}}m^{-i)}=\frac{i.i+1...(i+m)}{i+n.i+n+1...(i+n+m)}\,\frac{1}{m+1.m+2...m+i}$$

aus welchen erhellet, dafs sich das vielfache Integral unter jeder Bestim-

mung der Werthe der darin vorkommenden Gröfsen angeben läfst, wofern es nicht unendlich wird. Selbst den Fall, wo i keine ganze Zahl, nicht ausgenommen, da der Werth von m^{-i} sich auch dann finden läfst. Für i negative ganze Zahl wird auch nur i in den Resultatsformeln nur negativ zu setzen seyn. Das vielfache Integral geht in ein vielfaches Differential über, nämlich in

$$d^i.(1-z)^n z^m.dz^{-i} = (-\Delta)^n.m^{(i)},$$

das Differential nämlich von $z = 0$ bis $z = 1$ genommen, d. h. blofs $z = 1$ im i^{ten} Differential gesetzt.

Dieses wird, wenn i eine ganze Zahl, Null, wenn $n > i$.

§. 9.

Für den oben [§. 6. (G')] durch successive Bestimmung von $\int^i (1-z)\,dz^i$ erhaltenen Ausdruck

$$\frac{1}{1.2\ldots i-1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{i-1}{n+1.n+2} + \frac{i-1.i-2}{n+1.n+2.n+3} - \ldots\right)$$

läfst sich der Werth durch Anwendung des Algorithms unmittelbarer als geschehen reduziren, denn es ist derselbe, $\Delta n = 1$ gesetzt, offenbar gleich

$$\frac{1}{1.2\ldots i-1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{i-1}{1}\Delta\frac{1}{n+1} + \frac{i-1.i-2}{1.2}\Delta^2\frac{1}{n+1} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots i-1}(1+\Delta)^{i-1}.\frac{1}{n+1} = \frac{1}{1.2\ldots i-1}\,\upsilon^{i-1}\,\frac{1}{n+1}$$

Aber $\upsilon^{i-1}.\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+i-1+1} = \frac{1}{n+i}$

Mithin der Werth des Ausdrucks gleich

$$\frac{1}{1.2\ldots i-1}.\frac{1}{n+i}$$

wie derselbe oben gefunden.

Setzt man i negativ, so wird der zweite Faktor

$$\frac{1}{n+1} + \frac{i+1}{n+1.n+2} + \frac{i+1.i+2}{n+1.n+2.n+3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{i+1}{1}\Delta\frac{1}{n+1} + \frac{i+1.i+2}{1.2}\Delta^2\frac{1}{n+1} - \frac{i+1.i+2.i+3}{1.2.3}\Delta^3\frac{1}{n+1} + \ldots$$

$$= (1+\Delta)^{-i-1}\frac{1}{n+1} = \upsilon^{-i-1}\,\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n-i}$$

wo auch das Resultat das vorige ist, $-i$ nämlich statt i in jenes gesetzt.

Setzt man $\frac{n}{k}, \frac{i}{k}$ statt n und i, so wird also, nachdem man zuvor die Gleichungen mit i multiplicirt:

$$\frac{i}{n \mp i} = \frac{i}{n+k} \mp \frac{i.i \mp k}{n+k.n+2k} + \frac{i.i \mp k.i \mp 2k}{n+k.n+2k.n+3k} \mp \ldots$$

und beiderseits 1 addirt, erhält man im Gebrauch der untern Zeichen die Reihe für $\frac{n}{n-i}$, welche Euler gefunden (Calc. Int. T. IV.) und unter mehrern Rücksichten betrachtet, ohne, wie es mir scheint, den an sich höchst einfachen Grund ihrer ersten Entwickelung wahrgenommen zu haben, welchen nachzuweisen ich mir hier also wohl erlauben darf.

Um einen Bruch wie $\frac{1}{n-i}$ in einer konvergirenden Reihe zu entwickeln, ist blofs zu bemerken, dafs die Glieder als successive Quotienten willkührlich nur so zu wählen sind, dafs der Rest der Divi ion unbestimmt abnimmt. Man sehe also k, k′, k″ ..., im folgenden ganz einer gewöhnlichen Division ähnlichen Verfahren, als willkührliche Gröfsen an, und setze

$$\frac{1}{n-i} = \frac{1}{n+k} + R$$

$$\text{so ist } R = \frac{i+k}{(n-i)(n+k)}$$

und dieser Rest ist kleiner als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{n-i}$, wenn nur $i < n$. Es ist aber jener Rest ein neuer Bruch, und man kann den Quotienten willkührlich nehmen nebst einem neuen Rest, also setzen:

$$R = \frac{i+k}{(n-i)(n+k)} = \frac{i+k}{n+k.n+k'} + R'$$

woraus folgt:

$$R' = \frac{(i+k)(i+k')}{(n-i)(n+k)(n+k')}, \text{ daher ferner}$$

$$R' = \frac{(i+k)(i+k')}{(n+k)(n+k')(n+k'')} + R'', \text{ also}$$

$$R'' = \frac{(i+k)(i+k')(i+k'')}{(n-i)(n+k)(n+k')(n+k'')}$$

etc.

Es ist demzufolge:

$$\frac{1}{n-i} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n+k} + \frac{i+k}{n+k.n+k'} + \frac{i+k.i+k'}{n+k.n+k'.n+k''} + \frac{i+k.i+k'.i+k''}{n+k.n+k'.n+k'',n+k'''} + \\ \ldots + \frac{i+k.i+k'\ldots i+k^{(\nu-1)}}{n+k.n+k'\ldots n+k^{(\nu)}} + \frac{1}{n-i}\,\frac{i+k.i+k'\ldots i+k^{(\nu)}}{n+k.n+k'\ldots n+k^{(\nu)}} \end{array}\right.,$$

wo das letzte Glied den Rest ausdrückt, welcher also, da k, k', k''... willkührlich, ein so kleiner Theil des ursprünglichen Bruches $\frac{1}{n-i}$ seyn kann, als man nur will, also, die Glieder der Reihe weit genug fortgesetzt, auch vernachläfsigt werden darf. Da die vollständige Gleichung eine identische, so darf man sowohl $-k$ statt $+k$ etc., als auch $-i$ statt i in dieselbe setzen, und erhält also im letztern Falle den Werth von $\frac{i}{n+i}$, ähnlich dem von $\frac{1}{n-i}$ ausgedrückt. Man sieht auch, dafs für $\frac{1}{n+i}$ bei stets positiven Werthen der k, k'... der Rest Null werden kann, so wie bei positivem i für negative k, mithin auch alle übrige Glieder, falls man die Division fortsetzen wollte.

Man kann also die zu Anfange dieses Absatzes betrachtete Gleichung als aus dieser letzten für den Fall, wo $k=1$, $k'=2$, $k''=3$... abgeleitet, mithin blofs als eine aus der Division des Bruches $\frac{1}{n+i}$ ursprünglich entwickelte ansehen.

Nimmt man beiderseits das $\frac{(-\Delta)^{\mu-1}}{1.2..\mu-1}$ derselben, so wird, da, für $\Delta n = 1$,

$$(-\Delta)^{\mu-1}\,\frac{i}{n+i} = \frac{1.2..\mu-1}{n+i.n+i+1\ldots(n+i+\mu-1)},$$

wenn man noch für die Produkte die angenommene Bezeichnung zur Abkürzung gebraucht, erhalten:

$$(n+i-1)^{-\mu)} = n^{-\mu)} - \mu(i-1).n^{-\mu-1} + \frac{\mu.\mu+1}{1.2}(i-1)(i-2).n^{-\mu-2} - \ldots$$

und i statt i—1 gesetzt, so wird, mit Aufnahme des Restes:

$$(n+i)^{-\mu)} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} n^{-\mu)} - \mu.i.n^{-\mu-1)} + \frac{\mu.\mu+1}{1.2}.i^{2)}.n^{-\mu-2)} - \frac{\mu.\mu+1.\mu+2}{1.2.3}.i^{3)}.n^{-\mu-3)} + \ldots \\ \ldots \pm \frac{\mu.\mu+1\ldots\mu+\nu-1}{1.2\ldots\nu}.i^{\nu)}.n^{-\mu-\nu)} \mp \frac{(-\Delta)^{\mu-1}\left(\frac{1}{n+i}n^{-\nu-1)}\,i^{\nu+1)}\right)}{1.2\ldots(\mu-1)}. \end{array}\right.$$

Setzt man hierin $\frac{n}{k}$, $\frac{i}{k}$ oder $\frac{-i}{k}$ statt n und i, so geht die Formel über in

$$\frac{1}{(n\pm i+k)(n\pm i+2k)\ldots(n\pm i+\mu k)} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(n+k)\ldots(n+\mu k)} \mp \frac{\mu}{1}\frac{i}{(n+k)\ldots(n+[\mu+1]k)} + \frac{\mu.\mu+1}{1.2}\frac{i.i\mp k}{(n+k)\ldots(n+[\mu+2]k)} \mp \ldots \\ \ldots \mp \frac{\mu.\mu+1\ldots(\mu+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}\frac{i.i\mp k.i\mp 2k\ldots(i\mp[\nu-1]k)}{(n+k(n+2k)\ldots(n+[\mu+1]k)} \\ \quad + \frac{(-\Delta)^{\mu-1}}{1.2\ldots\mu-1}\left(\frac{1}{n\pm i+k}\cdot\frac{i.i\mp k\ldots i\mp\nu k}{n+k.n+2k\ldots n+(\nu+1)k}\right) \end{array}\right.$$

welche Formeln hier nur der besondern Leichtigkeit der Ableitung halber, die auch unmittelbar aus dem allgemeinen Ausdruck für $\frac{1}{n\pm i}$ in k, k', k''.. hätte geschehen können, angeführt werden, da ich jetzt nicht bei denselben verweilen, nur noch blofs bemerken will, dafs sie offenbar gestatten, k=o zu setzen, so wie μ negativ zu nehmen, wo sie dann einen eigenthümlichen Beweis der binomischen Potenzentwickelung enthalten.

§. 10.

Das Integral $\int(1-z)^n z^m dz$, welches diese Nebenbetrachtungen veranlafst hat, ist unter einer etwas allgemeineren Form durch Euler sehr berühmt. Nemlich wenn auch das z in $(1-z)^n$ einen eigenen Exponenten

erhält, das Integral also $\int(1-x^\lambda)^n x^\mu dx$ ist. Es läfst sich aber auf zweierlei Weise in die betrachtete Form bringen, wenn nämlich entweder $1-x^\lambda$ oder x^λ gleich z gesetzt wird. Indessen läfst sich auch ohne Reduktion der Algorithm so wie für jene unmittelbar anwenden. Es wird nämlich, wenn man die Funktion unterm Integralzeichen entwickelt, und das Integral von $x=0$ bis $x=1$ nimmt, sichtlich

$$\int(1-x^\lambda)^n x^\mu dx = (1-\mho^\lambda)^n \cdot \frac{1}{\mu+1}$$

und man kann setzen $1-\mho^\lambda = -\Delta$, wofern nur da sich die Behandlungszeichen auf μ beziehen, und

$$\mho^\lambda \mu = \mu+\lambda \text{ auch } \Delta\mu = \lambda$$

gesetzt, oder das Δ Zeichen vor der Gröfse, auf die es geht, in der Entwickelung bis zum Endresultat beibehalten wird.

Es ist also auch

$$\int(1-x^\lambda)^n x^\mu dx = (-\Delta)^n \frac{1}{1+\mu} = (-\Delta)^n . \mu^{-1)} =$$

$$\frac{1}{(\mu+1).(\mu+1+\lambda)} \frac{\lambda}{(\mu+1+2\lambda)} \frac{2\lambda}{\ldots} \frac{\ldots}{(\mu+1+n\lambda)} = \frac{1}{\mu+1} n^{n)} \cdot \left(\frac{\mu+1}{\lambda}\right)^{-n)}$$

$$= \frac{1}{\mu+1} \frac{1 \cdot 2 \ldots \frac{\mu+1}{\lambda}}{n+1 \cdot n+2 \ldots \left(n+\frac{\mu+1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\mu+1} \left(\frac{\mu+1}{\lambda}\right)^{\frac{\mu+1}{\lambda})} \cdot n^{-\frac{\mu+1}{\lambda})}$$

Das letzte Resultat folgt sichtlich genug aus dem vorhergehenden, kann aber auch durch Transformation der zu integrirenden Funktion erhalten werden.

Es läfst sich auch ausdrücken für $\Delta n = 1$ durch

$$\frac{1}{\lambda} (-\Delta)^{\frac{\mu+1}{\lambda}-1} n^{-1)}$$

Aber auch der erste Ausdruck $(-\Delta)^n . \mu^{-1)}$ wird, wenn man $\Delta \frac{\mu+1}{\lambda} = 1$ setzt, gleich

$$\frac{1}{\lambda} (-\Delta)^n \left(\frac{\mu+1}{\lambda}\right)^{-1)} = \frac{1}{\lambda} (-\Delta)^n \left(\frac{\mu+1}{\lambda} - 1\right)^{-n)}$$

Man hat folglich $n-1$ und $\mu-1$ statt n und μ gesetzt,

$$\int(1-x^\lambda)^{n-1} x^{\mu-1} dx = \frac{1}{\lambda} (-\Delta)^{\frac{\mu}{\lambda}-1} (n)^{-1} = \frac{1}{\lambda} (-\Delta)^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-1}$$

wo in dem ersten Ausdruck des Integrals $\Delta n = 1$, in dem andern $\Delta . \frac{\mu}{\lambda} = 1$ zu nehmen ist.

Es ist für das $i$mal wiederholte beschränkte Integral stets mit $x = o$ anfangend

$$\int^i (1 - x^\lambda)^n x^\mu dx^i = (1 - \mho^\lambda)^n \mu^{-i)} = (-\Delta)^n . \mu^{-i)}$$

wiederum $\Delta\mu = \lambda$ genommen,

Es ist aber in eben dem Sinne erlaubt zu setzen

$$\int^i (1 - x^\lambda)^n x^\mu dx^i = (1 - \mho^\lambda)^n \int^i x^\mu dx^i = (1 - \mho^\lambda)^n \mho^\mu \int^i x^o dx^i = \mho^\mu (-\Delta)^n . o^{-i)}$$

wo nur zu beachten, dafs die Null als das Zeichen, auf welches sich $\mho$ und Δ beziehen, im Calcul deswegen beibehalten, und als eine unbestimmte Gröfse behandelt wird, also ist $o^{-i)} = \frac{1}{o+1 . o+2 \ldots o+i}$ zu schreiben, auch zu merken, dafs $\mho o = 1$ aber $\Delta o = \lambda$.

Dieses erstreckt sich weiter als auf die vorliegenden besondern Fälle, und es ist auch allgemeiner

$$\int^i f x . dz^i = f\mho \int^i dz^i = f\mho . o^{-i)}$$

Sollen aber nach jedesmaliger Integration willkührliche beständige hinzukommen, so wird das mit $x = 1$ beschränkte Integral

$$\int^i f x . dz^i = A_i o^{-o)} + A_{i-1} o^{-1)} + A_{i-2} o^{-2)} + \ldots + A_2 o^{2-i)} + A_1 o^{1-i)} + f\mho . o^{-i)}$$

wo $A_1, A_2 \ldots A_i$ die i Willkührlichen sind.

In wiefern sich $f\mho . o^{-i)}$ anwenden und ausmitteln läfst, hängt von der Natur der Form f ab.

§. 11.

Wird der mit einer bestimmten Gröfse, wie n^λ z. B., multiplizirte Theil in $\int^i z^m (1 - z^n dz^i$ gesucht, so ist dieser

$$\frac{d^\lambda \int^i z^m (1-z)^n dz^i}{1 . 2 \ldots \lambda . dn^\lambda} = \frac{\int^i z^m d^\lambda (1-z)^n . dz^i}{1 . 2 \ldots \lambda . dn^\lambda} = \frac{\int^i z^m (\log 1 - z)^\lambda dz^i}{1 . 2 \ldots \lambda}$$

da nach den Differentiationen $n = o$ zu setzen, und es ist einleuchtend, dafs dasselbe Resultat sich ergeben mufs, wenn jene Differentiation auf die schon vollführte beschränkte Integration erst vollzogen wird, dafs also

$$\frac{d^\lambda \int^i (1-z)^n z^m dz^i}{1 . 2 \ldots \lambda . dn^\lambda} = \frac{d^\lambda (1 - \mho)^n . m^{-i)}}{1 . 2 \ldots \lambda . dn^\lambda} = \frac{(\log 1 - \mho)^\lambda . m^{-i)}}{1 . 2 \ldots \lambda}$$

wo

wo die Entwickelung von $(\log 1-\mathfrak{z})^\lambda m^{-i}$ eine Reihe ist, die sich wegen des (nach §. 7.) bekannten Coefficientengesetzes von $(\log 1-\mathfrak{z})^\lambda$ darstellen läfst. Die Summe derselben ist aber gleich dem Integral $\int^i z^m(\log 1-z)^\lambda dz^i$ die Integrale stets von $x=0$ an genommen, und das letzte bis $x=1$.

Es ist aber $d^i(uv)=(d_{,}+d_{,,})^i(uv)$

wenn $d_{,}$ sich als Differentiationszeichen nur auf u bezieht, und v für dasselbe als eine beständige betrachtet wird, wiewohl sie eben die Gröfse enthalten mag, welche $d_{,}$ in u differentirt, aber $d_{,,}$ hingegen auf die Veränderlichen in v allein sich bezieht, und u als beständig demselben nicht unterworfen ist, also

$$d_{,}^{\mu}d_{,,}^{\nu}(uv)=d_{,}^{\mu}(ud_{,,}^{\nu}v)=d_{,}^{\mu}u.d_{,,}^{\nu}v.$$

Nachdem alle Produkte der Art in $(d_{,}+d_{,,})^i uv$ ausgemittelt sind, hat man der Unterscheidungszeichen der d nicht mehr nöthig. Eben so ist, u und v als Funktionen von z betrachtet, unter eben der Voraussetzung, bei welcher doch $d_{,}z=d_{,,}z=dz$

$$\int^i uvdz^i=d^{-i}uvdz^i=(d_{,}+d_{,,})^{-i}uv.dz^i.$$

Entwickelt und die Unterscheidung aufgehoben, welche man auch vom Anfange an entbehren kann, wenn man die d in der Ordnung hält, als die Folge der Gröfsen u, v, auf welche sie gerichtet sind, so hat man:

$$\int^i uvdz^i=(d^{-i}-id^{-i-1}d+\frac{i.i+1}{1.2}d^{-i-2}d^2-\ldots)uvdz^i$$

$$=vd^{-i}udz^i-i\frac{dv}{dz}d^{-i-1}udz^{i+1}+\frac{i.i+1}{1.2}\frac{d^2v}{dz^2}.d^{-i-2}udz^{i+2}-..$$

Diesen allgemeinen Satz auf die vorliegende Formel angewandt, giebt:

$$\int^i[\log(1-z)]^\lambda z^m dz^i=$$

$$\left\{\begin{array}{l} z^m\int^i(\log 1-z)^\lambda dz^i-i.mz^{m-1}\int^{i+1}(\log 1-z)^\lambda dz^{i+1} \\ +\frac{i.i+1}{1.2}m.m-1.z^{m-2}\int^{i+2}(\log 1-z)^\lambda dz^{i+2}-\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Nun sind die mit dem $\int$ Zeichen behafteten Funktionen mit z Null, und ihr Werth bis $z=1$ ist nach dem vorigen bekannt, da gefunden worden

$$\frac{\int^i(\log 1-z)^\lambda dz^i}{1.2\ldots\lambda}=\frac{1}{1.2\ldots i}(-i)^{-\lambda}=\frac{-1}{1.2\ldots(i-1)}(-i)^{-\lambda-1}$$

mithin ist das ganze Integral für z von o bis 1

$$\frac{\int^i (\log 1 - z)^\lambda . z^m dz^i}{1.2...\lambda} =$$

$$\frac{-1}{1.2...i-1}\left\{(-i)^{-\lambda-1} - m(-i-1)^{-\lambda-1} + \frac{m.m-1}{1.2}(-i-2)^{-\lambda-2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}(-i-3)^{-\lambda-1} + ...\right.$$

$$= \frac{(-1)^\lambda}{1.2...i-1}\left(i^{-\lambda-1} - m(i+1)^{-\lambda-1} + \frac{m.m-1}{1.2}(i+2)^{-\lambda-1} - ..\right)$$

$$= \frac{(-1)^\lambda}{1.2...i-1}(-\Delta)^m . i^{-\lambda-1} \text{ für } \Delta i = 1.$$

Also ist

$$\int^i (\log 1 - z)^\lambda z^m dz^i = \frac{-1.-2...-\lambda}{1.2...i-1}(-\Delta)^m \left(\frac{1}{i}\right)^{\lambda+1}$$

$$= (-1)^\lambda . \lambda^{\lambda+1-i)} (-\Delta)^m \left(\frac{1}{i}\right)^{\lambda+1}$$

Es ist aber nach §. 7. und §. 6. (A)

$$\frac{(\log 1 - z)^\lambda}{1.2...\lambda} =$$

$$(-1)^\lambda\left(\frac{1}{1.2..\lambda}z^\lambda + \frac{\overset{1}{\lambda}}{1.2..\lambda+1}z^{\lambda+1} + \frac{(\lambda+\overset{2}{1})}{1.2..\lambda+2}z^{\lambda+2} + \frac{(\lambda+\overset{3}{2})}{1.2..\lambda+3}z^{\lambda+3} \text{ etc.}\right)$$

Dieses mit z^m multiplizirt und imal integrirt, giebt mit Zuziehung des obigen Werthes

$$\frac{\int^i (\log 1 - z)^\lambda . z^m dz^i}{1.2...\lambda} = (-1)^\lambda . o^{\iota-i)}(-\Delta)^m \left(\frac{1}{i}\right)^{\lambda+1} =$$

$$(-1)^\lambda [o^{-\lambda)}(m+\lambda)^{-i)} + \overset{1}{\lambda}.o^{-\lambda-1)}(m+\lambda+1)^{-i)} + (\lambda+\overset{2}{1}).o^{-\lambda-2)}(m+\lambda+2)^{-i)} + ..]$$

Man hat also beiderseits von $(-1)^\lambda$ die Ausdrücke befreit, im ersteren den Werth der unendlichen Reihe des andern.

§. 12.

Eine allgemeine Gleichung, welche für sich allein alle Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen giebt, scheint bis jetzt nicht vollständig benutzt worden zu seyn. Es ist folgende:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2fx.fy \quad ... \quad (A),$$

in welcher x und y jede für sich willkührlich, also von einander unabhängige Gröfsen, die also die Natur der Funktion f ausdrückt, aus welcher ihre übrigen Eigenschaften sich wie von selbst ergeben.

Ihre Differentiale nach x und y müssen als getrennte Gleichungen für sich bestehen, sie sind

$$f'(x+y)+f(x-y)=2f'x.fy \quad \ldots \quad (B)$$
$$f'(x+y)-f(x-y)=2fx.f'y \quad \ldots \quad (C)$$

Die (B) nach x und (C) nach y differentirt, geben:

$$f'(x+y)+f'(x-y)=2f'x.fy \quad \ldots$$
$$f'(x+y)+f'(x-y)=2fx.f'y$$

Diese durch einander dividirt, so folgt

$$1=\frac{f'x.fy}{fx.f'y}$$

oder

$$\frac{f'y}{fy}=\frac{f'x}{fx}$$

d. h. $\frac{f'x}{fx}$ ist beständig, x habe welchen Werth man wolle, oder es ist

$$\frac{f'x}{fx}=c$$

also

$$f'x=cfx \quad \ldots \quad (D)$$

Die Gleichungen (B) und (C) subtrahirt und addirt, geben

$$f'(x-y)=f'x.fy-fx.f'y \quad \ldots \quad (E)$$
$$f'(x+y)=f'x.fy+fx.f'y \quad \ldots \quad (F)$$

welche, abermals nach x oder y differentirt,

$$f''(x-y)=f'xfy-fxfy \quad \ldots \quad (G)$$
$$f'(x+y)=f'xfy+fxfy \quad \ldots \quad (H)$$

mithin in Folge der Gleichung (D)

$$cf(x-y)=cfx.fy-fxfy \quad \ldots \quad (I)$$
$$cf(x+y)=cfx.fy+fxfy \quad \ldots \quad (K)$$

geben.

Aus der Gleichung (A) aber folgt, dafs für $y=o$ die $fy=1$, und aus der Gleichung (C), dafs für $y=o$ die $fy=o$ seyn müsse, welches beides auch aus diesen Gleichungen (I) oder (K) zu ersehen.

Setzt man nun in (I) das $y = x$, so kömmt:

$$c = cfx^2 - f'x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (L)$$

oder

$$f'x = \sqrt{(c.fx^2 - c)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

Die Funktion fx ist also bis auf die willkührliche c völlig bestimmt. Denn da die $f'x$ als Funktion von fx sich ergeben, auch $f''x = cfx$, so sind die Differentiale jeder Ordnung von fx bekannt, so dafs sich diese in eine Reihe entwickeln läfst.

So wie fast jede Ansicht der trigonometrischen Funktionen, so setzt auch diese dieselben in Zusammenhang mit den Exponentialen und logarithmischen. Denn man hat für diese die der obigen ähnlichen Gleichungen

$$f(x+y) = fx.fy$$
$$fx + fy = f(x.y)$$

in welchen ebenfalls y und x von einander unabhängige veränderliche Gröfsen sind. Die Differentiale derselben sowohl nach x als nach y müssen also für sich jede insbesonders statt haben. Demzufolge giebt jede dieser beiden Gleichungen zwei Differentialgleichungen, aus welchen unmittelbar für die erste

$$\frac{f'x}{fx} = \frac{f'y}{fy}$$

und für die andere

$$x f'x = y f'y$$

folgt, dafs also diese Funktionen $\frac{f'x}{fx}$ und $x f'x$ Werthe ihrer Veränderlichen und einer willkührlichen Beständigen gleich zu setzen sind, welches die bekannten Differentiale giebt, wodurch denn auch die Funktionen bestimmt sind, welche den durch die vorgelegten Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften entsprechen.

§. 13.

Der Werth der Summe der unendlichen Reihe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen läfst sich durch ein einfaches, von den bisherigen Methoden ganz verschiedenes, und rein analytisches Verfahren finden.

Die bekannte Reihe des Bogens durch die Tangente ausgedrückt

$$z = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots$$

giebt, wenn man sie quadrirt und die doppelten Produkte der Glieder so ordnet, dafs diejenigen, deren Faktoren gleich entfernte Glieder jener Reihe sind, in einer Reihe gesammelt werden,

$$\left.\begin{aligned} z^2 = {} & t^2 + \frac{t^6}{5^2} + \frac{t^{10}}{6^2} + \frac{t^{14}}{7^2} + \ldots \\ & - 2\left(\frac{t^4}{1\cdot 3} + \frac{t^8}{3\cdot 5} + \frac{t^{12}}{5\cdot 7} + \frac{t^{16}}{7\cdot 9} + \ldots\right. \\ & + 2\left(\frac{t^6}{1\cdot 5} + \frac{t^{10}}{5\cdot 7} + \frac{t^{14}}{5\cdot 9} + \frac{t^{18}}{7\cdot 11} + \ldots\right. \\ & - 2\left(\frac{t^8}{1\cdot 7} + \frac{t^{12}}{3\cdot 9} + \frac{t^{16}}{5\cdot 11} + \frac{t^{20}}{7\cdot 13} + \ldots\right. \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Man setze $t = 1$, wo dann $z = \frac{\pi}{4}$, also $z^2 = \frac{\pi^2}{16}$, und man hat

$$\left.\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = {} & \ldots\ldots \\ \frac{\pi^2}{16} + 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots\right) & \\ - 2\left(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{7\cdot 11} + \ldots\right) & \\ + 2\left(\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 13} + \ldots\right) & \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

Es kömmt nun darauf an, die Summen der unendlichen Reihen im zweiten Gliede der Gleichung zu finden, welche sehr leicht sich ergeben. Nämlich von der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots = S,$$

wo es nicht erforderlich, unter S einen wirklichen Summenausdruck zu verstehen, sondern man darf darunter die identische Reihe selbst denken, subtrahire man eben dieselbe aber erst mit ihrem n + 1 ten Gliede anfangend

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}+\ldots=S-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{2n-1}$$

so bleibt

$$\left.\begin{aligned}2n\left(\frac{1}{1.(2n+1)}+\frac{1}{3(2n+3)}+\frac{1}{5(2n+5)}+\frac{1}{7(2n+7)}+\text{etc.}\right)\\ =1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\end{aligned}\right\}$$

welches beiderseits mit n dividirt, dann für n die Werthe 1, 2, 3 etc. gesetzt, die obige Reihen und deren Summen giebt, so dafs also

$$\left.\begin{aligned}1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\\ \frac{\pi^2}{16}+1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\ldots\end{aligned}\right\}\text{(B)}$$

Man multiplizire die allgemeine Reihe für z mit ihrem Differential und integrire das entwickelte Produkt

$$z\,dz=\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\ldots\right)\left(1-t^2+t^4-\ldots\right)dt,$$

so entsteht, da z mit t Null wird,

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{2}=&\frac{t^2}{1.2}-\frac{t^4}{3.4}+\frac{t^6}{5.6}-\frac{t^8}{7.8}+\ldots\\ &-\frac{t^4}{1.4}+\frac{t^6}{3.6}-\frac{t^8}{5.8}+\ldots\\ &+\frac{t^6}{1.6}-\frac{t^8}{3.8}+\ldots\\ &-\frac{t^8}{1.8}+\ldots\\ &+\ldots\end{aligned}$$

Beiderseits mit 2 multiplizirt, folgt

$$t^2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)t^4+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)t^6-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)t^8+\ldots=z^2$$

und $t=1$ gesetzt,

$$1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\ldots=\frac{\pi^2}{16}.$$

Die Reihe aber ist identisch mit der obigen in der Gleichung (A), deren hier gefundener Werth also in derselben substituirt, so folgt

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Man kann allerdings der Integration von zdz ausweichen, wenn man unmittelbar den allgemeinen Au-druck von z^2 in (1) nach Potenzen von t ordnet, und das Gesetz der Coefficienten nachsucht. Dieses aber tritt am geschwinde-sten durch die Integration hervor, weswegen diese vorgezogen ist. Uebrigens nimmt auch das Quadrat von z die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} z^2= \quad & \frac{t^2}{1}+\frac{t^6}{3^2}+\frac{t^{10}}{5^2}+\frac{t^{14}}{7^2}+\ldots \\ & -2\left[t.\frac{t^8}{3}-\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\frac{t^5}{5}+\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\frac{t^7}{7}-\ldots\right] \end{aligned}\right\}$$

Also für $t=1$, da nun der Werth der Reihe der reciproken ungraden Quadratzahlen bekannt, folgt

$$1.\frac{1}{3}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{5}+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{7}-\ldots=\frac{\pi^2}{32}.$$

Von wiederholten Funktionen.

Von Herrn Trallles. *)

§. 1.

Unter wiederholten Funktionen sind solche zu verstehen, wie fff...fu, wo fu irgend eine Funktion von u, aber f(fu) oder ffu eben die Funktion von fu als diese von u; f(f(fu) oder $\overset{3}{f}u$ eben die Funktion von ffu u. s. w. ist.

Auch bei diesen Funktionen läfst sich die in der transzendenten Mathesis sehr gewöhnliche Ansicht nehmen, um der bestimmten und faſslichen Vor-tellung höherer Allgemeinheit zu geben, indem man sich denkt, daſs die Zahl der Wiederholungen keine ganze positive Zahl sey. Die ursprüngliche beschränktere Vorstellung der wirklichen Entstehung solcher Funktionen wird verlassen, und die allgemeine Form des Resultats einer unbestimmtmaligen Wiederholung dafür angenommen, in welcher man sich an die Bedeutung der Gröfse, durch welche sie erhalten worden, nicht bindet, sondern derselben jeden Werth beilegt. Dadurch wird denn eine solche Gröfse wie $\overset{n}{f}u$ eine stetige von n abhängige Funktion, welche, so lange unter n nur ganze positive Zahlen verstanden werden, von einem Werthe zum andern springt.

In

*) Vorgelesen den 1. August 1811.

In der Erklärung der wiederholten Funktionen liegt die Bedingungsgleichung ihrer Entwickelung. Jener zu Folge ist

$$\overset{x+1}{f}u = f.\overset{x}{f}u \text{ und allgemein}$$

$$\overset{x+y}{f}u = \overset{y+x}{f}u = \overset{x}{f}.\overset{y}{f}u = \overset{y}{f}.\overset{x}{f}u$$

Die eintretende Aufgabe ist $\overset{x}{f}u$ zu finden, wenn die Form von fu gegeben ist, x sey was es wolle.

Da aber

$$fu = \overset{1}{f}u = \overset{1+0}{f}u = f.\overset{0}{f}u = \overset{0}{f}.\overset{1}{f}u$$

so folgt: $\overset{0}{f}u = u$ und $\overset{0}{f}\overset{1}{f}u = \overset{1}{f}u$

Das $\overset{0}{f}$ verhält sich daher wie die Einheit und ist der Wirkung nach von der Form f unabhängig.

Um den einfachen Fall der Betrachtung nicht zu entziehen, sey

$$\overset{1}{f}u = a + bu$$

so ist $\overset{2}{f}u = a + b\overset{1}{f}u = a + ab + b^2u,$

also allgemein:

$$\overset{x}{f}u = a + ab + ab^2 + \ldots + ab^{x-1} + b^x u$$

oder

$$\overset{x}{f}u = a\,\frac{1-b^x}{1-b} + b^x.u$$

§. 2.

Eine sehr allgemeine Form für fu ist irgend eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe, wo dann die Gleichung für die wiederholten Funktionen seyn wird:

$$\overset{x+1}{f}u = \overset{x}{f}u + b(\overset{x}{f}u)^2 + c(\overset{x}{f}u)^3 + \ldots \quad (A)$$

die also für $x = 0$ den Werth der angenommenen einfachen Funktionsform

$$fu = u + bu^2 + cu^3 + \ldots$$

voraussetzt. Dieser Werth von fu im zweiten Gliede von (A), worin $x = 1$ zu nehmen ist, statt $\overset{1}{f}u$ gesetzt, giebt $\overset{2}{f}u$ in der Form $u + R$, wo R ein nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreitender Ausdruck ist; die

Substitution desselben in (A), wenn man zuvor $x = 2$ nimmt, giebt $\overset{3}{f}u$ in ähnlicher Form, wie $\overset{2}{f}u$, so dafs also in so fortgesetzter Substitution erhalten wird

$$\overset{x}{f}u = u + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + \ldots . \quad (B)$$

in welcher Gleichung B, C, D etc. als Funktionen von x zu bestimmen sind.

In dieser Absicht substituire man den Werth von $\overset{x}{f}u$ aus (B) in die Gleichung (A), so wird . . . . . (C)

$$\begin{aligned}
\overset{x+1}{f}u = u &+ Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + Eu^5 + Fu^6 + \ldots . \\
&+ bu^2 + 2bBu^3 + 2bCu^4 + 2bDu^5 + 2bEu^6 + \ldots . \\
&\quad + bB^2u^4 + 2bBCu^5 + 2bBDu^6 + \ldots . \\
&\quad\quad + bC^2u^6 + \ldots . \\
&\quad\quad\quad \ldots . \\
&+ cu^3 + 3cBu^4 + 3cCu^5 + 3cDu^6 + \ldots . \\
&\quad + 3cB^2u^5 + 6cBCu^6 + \ldots . \\
&\quad\quad + cB^3u^6 + \ldots . \\
&\quad\quad\quad \ldots . \\
&+ du^4 + 4dBu^5 + 4dCu^6 + \ldots . \\
&\quad + 6dB^2u^6 + \ldots . \\
&\quad\quad \ldots . \\
&+ eu^5 + 5eBu^6 + \ldots . \\
&\quad\quad \ldots . \\
&\quad + fu^6 + \ldots . \\
&\quad\quad + \ldots .
\end{aligned}$$

Diese Substitution hat keine Schwierigkeit, und ist nur dargestellt, damit das folgende leichter in die Augen falle.

Da aber die Gleichung (B) für $\overset{x}{f}u$ allgemein seyn soll, so mufs auch aus derselben die $\overset{x+1}{f}u$ erhalten werden, wenn in den Coefficienten B, C, D etc. statt x gesetzt wird $x+1$, die Werthe, in welche dadurch jene Coefficienten übergehen mit $B_,$, $C_,$, $D_,$ etc. bezeichnet wird

$$\overset{x+1}{f}u = u + A_,u^2 + B_,u^2 + C_,u^3 + \ldots . \quad (D)$$

und mufs mit dem vorigen Werth von $\overset{x+1}{f}u$ in (C) identisch seyn. Vergleicht man also die Coefficienten bei denselben Potenzen von u in (C)

und (D), und bemerkt, dafs $B_{,} - B = \Delta B$; $C_{,} - C = \Delta C$ etc. für $\Delta x = 1$, so hat man sichtlich die Gleichungen

$$\Delta B = b$$
$$\Delta C = 2bB + c$$
$$\Delta D = 2bC + bB^2 + 3cB + d$$
u. s. w.

deren Integrale für die Bestimmung von B, C, D etc. so zu nehmen sind, dafs diese Funktionen mit $x = 1$ in b, c, d ... übergehen oder mit x Null werden.

Die erste Gleichung giebt, dieser Bedingung entsprechend,

$$B = bx,$$

diesen Werth von B in der zweiten gesetzt, giebt

$$C = 2b^2 \cdot \frac{x.x-1}{1.2} + cx$$

beide gefundene Werthe in die dritte Gleichung substituirt, so wird durch die Integration erhalten

$$D = 6b^3 \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3} + (5bc + b^3) \frac{x.x-1}{1.2} + dx.$$

Eben so findet man E, F etc., und es ist also, wenn man $\frac{x.x-1}{1.2}$, $\frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}$, etc. mit x_2, x_3 etc. bezeichnet

$$fu = u + bx.u^2$$
$$+ (cx + 2b^2.x_2)\, u^3$$
$$+ \left\{\begin{matrix} dx + 5bc \\ + b^3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x_2 + 6b^3.x_3 \end{matrix} \Big\} u^4$$
$$+ \left\{\begin{matrix} ex + 6bd \\ + 3c^2 \\ + 5b^2c \end{matrix}\right| \begin{matrix} x_2 + 26b^2c \\ + 10b^4 \end{matrix} \Big| \begin{matrix} x_3 + 24b^4.x_4 \end{matrix} \Big\} u^5$$
$$+ \left\{\begin{matrix} fx + 7be \\ + 7cd \\ + 8b^2d \\ + 7bc^2 \\ + b^3c \end{matrix}\right| \begin{matrix} x_2 + 56b^2d \\ + 35bc^2 \\ + 71b^3c \\ + 8b^5 \end{matrix} \Big| \begin{matrix} x^3 + 154b^3c \\ + 86b^5 \end{matrix} \Big| \begin{matrix} x_4 + 120b^5.x_5 \end{matrix} \Big\} u^6$$
$$+ \quad . \quad . \quad .

Betrachtet man den gefundenen Werth von $\overset{x}{f}u$ der Form nach, so ist:

$$\overset{x}{f}u = u + \alpha_1 . x u^2 + (\beta_2 . x_2 + \beta_1 . x) u^3 + (\gamma_3 . x_3 + \gamma_2 . x_2 + \gamma_1 . x_1) u^4 + \ldots$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mit verschiedenen Zahlen bezeichnet, die zu den bestimmten Funktionen x_1, $x_2 \ldots$ und Potenzen von u gehörigen Coefficienten bedeuten, die also durch b, c, d ... und absolut Zahlen bestimmt sind. Will man nun $\overset{x}{f}u$ blos nach x, x^2, x^3 ... unabhängig von den Potenzen von u ordnen, so wird:

$$\overset{x}{f}u = u + (\alpha_1 u^2 + \beta_1 u^3 + \gamma_1 u^4 + ..)x + (\beta_2 u^3 + \gamma_2 u^4 + ..)x_2 + (\gamma_3 u^4 + \delta_3 u^5 + ..)x_3 + \ldots$$

Da aber auch allgemein seyn mufs

$$\overset{x}{f}u = \overset{o}{f}u + x . \Delta \overset{o}{f}u + x_2 . \Delta^2 \overset{o}{f}u + x_3 . \Delta^3 \overset{o}{f}u + \ldots,$$

wo sich die Δ auf o beziehen, und $\Delta o = 1$; so folgt aus der Vergleichung dieser beiden Ausdrücke für $\overset{x}{f}u$, da sie identisch seyn müssen, wenn man die Differenzen von $\overset{x}{f}u$ auflöset

$$\alpha_1 u^2 + \beta_1 u^3 + \gamma_1 u^4 + \ldots = \overset{1}{f}u - \overset{0}{f}u$$

$$\beta_2 u^3 + \gamma_2 u^4 + \delta_2 u^5 + \ldots = \overset{2}{f}u - 2\overset{1}{f}u + u$$

$$\gamma_3 u^4 + \delta_3 u^5 + \varepsilon_3 u^6 + \ldots = \overset{3}{f}u - 3\overset{2}{f}u + 3\overset{1}{f}u - u$$

. . . . . .

Aus diesen folgt, durch Differentiation und nachher $u = o$ gesetzt,

$$\alpha_1 = \frac{d^2(\overset{1}{f}u - u)}{1.2.du^2} = \frac{d^2 \overset{1}{f}u}{1.2.du^2} = \frac{d^2 \Delta \overset{o}{f}u}{1.2.du^2}$$

$$\beta_1 = \frac{d^3 \overset{1}{f}u}{1.2.3du^3} = \frac{d^3 \Delta \overset{o}{f}u}{1.2.3du^3}$$

. . . . . .

$$\beta_2 = \frac{d^3(\overset{2}{f}u - 2\overset{1}{f}u)}{1.2.3du^3} = \frac{d^3 . \Delta^2 \overset{o}{f}u}{1.2.3du^3}$$

$$\gamma_2 = \frac{d^4 . (\overset{2}{f}u - 2\overset{1}{f}u)}{1.2.3.4.du^4} = \frac{d^4 . \Delta^2 \overset{o}{f}u}{1.2.3.4.du^4}$$

. . . . . .

Also wenn man den Coefficienten von u^m in $\overset{\mu}{f}u$ mit $\overset{\mu}{f}_m$ bezeichnet, so ist:

$$\alpha_1 = \overset{1}{f}_3 - \overset{0}{f}_2;\ \beta_1 = \overset{1}{f}_3 - \overset{0}{f}_3;\ \gamma_1 = \overset{1}{f}_4 - \overset{0}{f}_4,\ \text{etc.}$$

$$\beta_2 = \overset{2}{f}_3 - 2\overset{1}{f}_3 + \overset{0}{f}_3;\ \gamma_2 = \overset{2}{f}_4 - 2\overset{1}{f}_4 + \overset{0}{f}_4;\ \delta_2 = \overset{2}{f}_5 - 2\overset{1}{f}_5 + \overset{0}{f}_5,\ \text{etc.}$$

$$\gamma_3 = \overset{3}{f}_4 - 3\overset{2}{f}_4 + 3\overset{1}{f}_4 - \overset{0}{f}_4;\ \delta_3 = \overset{3}{f}_5 - 3\overset{2}{f}_5 + 3\overset{1}{f}_5 - \overset{0}{f}_5,\ \text{etc.}$$

$$\text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

wo zwar, da $\overset{0}{f} = 1$ die $\overset{0}{f}_2$, $\overset{0}{f}_3$ etc. Null, aber der Form wegen beibehalten sind, und damit es sichtlich werde, dafs

$$\alpha_1 = \Delta\overset{0}{f}_2;\ \beta_1 = \Delta\overset{0}{f}_3;\ \gamma_1 = \Delta\overset{0}{f}_4,\ \text{etc.}$$

$$\beta_2 = \Delta^2\overset{0}{f}_3;\ \gamma_2 = \Delta^2\overset{0}{f}_4;\ \delta_2 = \Delta^2\overset{0}{f}_4,\ \text{etc.}$$

$$\gamma_3 = \Delta^3\overset{0}{f}_4;\ \delta_3 = \Delta^3\overset{0}{f}_5;\ \varepsilon_2 = \Delta^3\overset{0}{f}_5,\ \text{etc.}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

also

$$\overset{x}{f}u = u + x\Delta\overset{0}{f}_2 . u^2$$

$$+ (x . \Delta\overset{0}{f}_3 + x_2 . \Delta^2\overset{0}{f}_3)\, u^3$$

$$+ (x . \Delta\overset{0}{f}_4 + x_2 . \Delta^2\overset{0}{f}_4 + x_3 . \Delta^3\overset{0}{f}_4)\, u^4$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .

Diese Gleichung aber giebt

$$^{1}fu = \frac{u}{1-u}; \quad ^{2}fu = \frac{u}{1-2u}; \quad ^{3}fu = \frac{u}{1-3u}, \text{ etc.}$$

allgemein:

$$^{x}fu = \frac{u}{1-xu}$$

also

$$^{x}fu = u + x.u^2 + x^2.u^3 + x^3.u^4 + \ldots$$

Es ist aber, für $\Delta o = 1$,

$$x^m = o^m + x_1.\Delta.o^m + x_2.\Delta^2.o^m + x_3.\Delta^3.o^m + \ldots$$

Substituirt man für m gleich 1, 2, 3 ... die Werthe von x, x^2, x^3 ... in dieser Form, so wird

$$\begin{aligned} ^{x}fu = u &+ x_1.\Delta o.u^2 \\ &+ (x_1.\Delta.o^2 + x_2.\Delta^2.o^2)\,u^3 \\ &+ (x_1.\Delta.o^3 + x_2.\Delta^2.o^3 + x_3.\Delta^3.o^3)\,u^4 \\ &+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

also ist in diesem Falle der Coefficient von $x_\lambda . u^\mu$,

$$\Delta^\lambda . {}^{o}f_\mu = \Delta^\lambda . o^{\mu-1}$$

Hieraus erhellt auch im Allgemeinen der Gesammtwerth der absoluten oder Zahl-Coefficienten in der obigen Gleichung (E) für jeden mit willkührlichen Werthen von b, c, d... gegebenen Ausdruck der gesetzten Form von ^{x+1}f in ^{x}f. Zugleich geht hervor, dafs die sich folgenden Differenzen der Potenzen der Zahlen in natürlicher Ordnung von o an, Summen sind von Zahlen eigenthümlicher Natur, welche sich durch die Wiederholungen der Funktion ergeben, wenn als Wiederholungszahlen ganze positive angenommen werden.

Es kann nicht unbemerkt geblieben seyn, dafs die Entwickelung von ^{x}fu aus der zwischen ^{x+1}fu und ^{x}fu gegebenen Gleichung die Integration derselben als eine endliche Differenzgleichung betrachtet, also das Resultat ihr vollständiges Integral ist.

In der That, wird y_x statt $f^x u$ geschrieben, so ist die behandelte Gleichung einerlei mit folgender

$$y_{x+1} = y_x + by_x^2 + cy_x^3 + \ldots.$$

in welcher, für $x = o$ das $y_o = u$ gesetzt, diese Gröfse als die willkührliche Beständige angenommen wird, und y_x erscheint dann, nach der obigen Behandlung, als eine nach Potenzen jener Willkührlichen fortschreitende Funktion von x.

In jener Gleichung aber sind die Gröfsen b, c, d ... von x unabhängig, wenn sie aber auch gegebene Funktionen von x wären, so läfst sich doch y_x auf dieselbe Weise finden wie zuvor. Denn man sieht leicht ein, dafs auch unter dieser letztern Voraussetzung die obigen Formen (B), (C), (D) für y_x und y_{x+1} bestehen, nur sind so wie b, c, d ... noch B, C, D ... Funktionen von x, und die obigen noch in der Form gültigen Gleichungen

$$\Delta B = b$$
$$\Delta C = 2bB + c$$

u. s. w.

geben nun

$$B = \Sigma b_x + k,$$
$$C = 2\Sigma(b_x \Sigma b_x) + \Sigma c_x + k_1 x + k_2$$

u. s. w.

wo k_1, k_2 ... statt der gehörigen Konstanten stehen. Obwohl aber die Integration der vorgegebenen Gleichung für b, c, d ... veränderlich, so wie wenn sie beständig sind, statt hat, so ist doch nur in diesem Falle die gefundene Funktion eine wiederholte, wie aus den sich folgenden Werthen der y erhellt, welche, im Falle b, c, d ... Funktionen von x sind, für $x = 1$, $x = 2$ etc. seyn werden

$$y_1 = y_o + b_o y_o^2 + c_o y_o^3 +$$
$$y_2 = y_o + b_o y_o^2 + \ldots + b_1 (y_o + b_o y_o^2 + \ldots)^2 + c_1 (y_o + b_o y_o^2 \ldots)^3 +$$

u. s. w.

wo also wegen der Gröfsenverschiedenheit von b_o, b_1 ..., c_o, c_1 ... das y_2 nicht dieselbe Funktion von y_1 ist, als y_1 von y_o u. s. w.

§. 3.

Die Form des Endresultats der wiederholten Funktion $f^x u$, oder wie sie auch im Allgemeinen zufolge des obigen bezeichnet werden kann, y_x,

ändert sich, wenn die oben gegebene Gleichung zwischen y_{x+1} und y_x im ersten Gliede einen beständigen Coefficienten a hat, oder ay_x statt y_x gesetzt wird; doch läfst sich dasselbige Verfahren gebrauchen.

Es werde also die Gleichung

$$y_{x+1} = ay_x + by_x^2 + cy_x^3 + \ldots$$

angenommen, so ist für $x = o$

$$y_1 = au + bu^2 + cu^3 + \ldots$$

dieses statt y_x in die allgemeine Gleichung gesetzt, giebt y_2, woraus eben so y_3 etc. folgt, und also für y_x der Form nach die Gleichung

$$y_x = Au + Bu^2 + Cu^3 + \ldots$$

entsteht, welche in die angenommene Gleichung für y_{x+1} gesetzt, giebt

$$\begin{aligned} y_{x+1} = {} & aA.u + aB.u^2 + aC.u^3 + aD.u^4 + \ldots. \\ & + bA^2.u^3 + 2bAB.u^3 + 2bAC.u^4 + \ldots. \\ & \qquad + bB^2.u^4 + \ldots. \\ & + cA^3.u^3 + 3cA^2B.u^4 + \ldots. \\ & \qquad + dA^4.u^4 + \ldots. \\ & \qquad + \ldots. \end{aligned}$$

alles dem ähnlich, wie es oben für $a = 1$ sich ergab. Da nun aber auch

$$y_{x+1} = A_1 u + B_1.u^2 + C_1 u^3 + \ldots,$$

worin A_1, B_1, C_1 ... eben die Funktionen von $x + 1$ sind, als A, B, C ... in y_x von x, so hat man nun die entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 - aA &= o \\ B_1 - aB - bA^2 &= o \\ C_1 - aC - 2bAB - cA^3 &= o \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

zu integriren, so dafs A, B, C ... mit $x = 1$ die Werthe a, b, c ... erhalten, oder A mit $x = o$ gleich 1 wird, B, C ... aber Null.

Diese Differenzgleichungen sind insgesammt linear, und, irgend einen der zu suchenden Coefficienten A, B, C ... mit z_x bezeichnet, der Form

$$z_{x+1} = az_x + r,$$

wo r eine gegebene Funktion von x ist, durch die schon gefundenen Coefficienten bestimmt, nur wenn z_x das A bedeutet, ist $r = o$.

Im

Im allgemeinen ist das Integral jener Gleichung bekanntlich

$$z_x = a^x \left[\Sigma \left(\frac{r}{a^{x+1}}\right) + K\right]$$

worin K die Beständige ist, welche sich erst bestimmen läfst, nachdem das Integral von $\frac{r}{a^{x+1}}$ entwickelt ist.

Nun ist für $z_x = A$, $r = o$, und A soll gleich 1 werden mit $x = o$; also wird

$$A = a^x K = a^x.$$

Um B zu finden, ist $r = b A^2 = b a^{2x}$ zu setzen. Also

$$B = a^x \left(\Sigma \frac{b a^{2x}}{a^{x+1}} + K\right),$$

mithin

$$B = a^x \left(\frac{b}{a} \frac{a^x}{a-1} + K\right),$$

und da B mit x Null werden mufs, so ist dem K nur der Werth zu geben, welchen die unter dem Σ befindliche Funktion angenommen hat, indem man in derselben $x = o$ setzt, und sie mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, also wird

$$B = a^x \left(\frac{b}{a} \frac{a^x}{a-1} - \frac{b}{a} \frac{1}{a-1}\right)$$

oder

$$B = \frac{b.a^x(a^x-1)}{a.(a-1)}.$$

Eben so finden sich weiter die Coefficienten C, D, E ... Die Werthe derselben in der y^x zukommenden Form substituirt, so wird

$$y_x = \ldots\ldots\ldots$$

$$a^x u + \frac{b}{a}\frac{a^x-1}{a-1}a^x u^2 + \left\{\frac{e}{a}\frac{a^{2x}-1}{a^2-1} + \frac{b^2}{a^2.(a-1)}\left\{\begin{matrix}\frac{a^{2x}-1}{a^2-1}\cdot 2\\ -\frac{a^x-1}{a-1}\cdot 2\end{matrix}\right\}\right\} a^x u^3$$

$$+\left\{\frac{d}{a}\frac{a^{3x}-1}{a^3-1}+\frac{bc}{a^2(a^2-1)}\left\{\begin{matrix}-\frac{a^{3x}-1}{a^3-1}(3a+5)\\ -\frac{a^{2x}-1}{a^2-1}(5a+3)\\ -\frac{a^x-1}{a-1}\cdot 2\end{matrix}\right\}+\frac{b^3}{a^3(a-1)(a^2-1)}\left\{\begin{matrix}\frac{a^{3x}-1}{a^3-1}(a+5)\\ -\frac{a^{2x}-1}{a^2-1}(6a+6)\\ +\frac{a^x-1}{a-1}(5a+1)\end{matrix}\right\}\right\} a^x u^4$$

$$+\left\{\frac{e}{a}\frac{a^{4x}-1}{a^4-1}+\frac{bd}{a^2(a^3-1)}\left\{\begin{matrix}-\frac{a^{4x}-1}{a^4-1}(4a^2+4a+6)\\ -\frac{a^{3x}-1}{a^3-1}(4a^2+4a+4)\\ -\frac{a^x-1}{a-1}\cdot 2\end{matrix}\right\}+\frac{c^2}{a^2(a^2-1)}\left\{\begin{matrix}\frac{a^{4x}-1}{a^4-1}\cdot 3\\ -\frac{a^{2x}-1}{a-1}\cdot 3\end{matrix}\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{b^2c}{a^3(a^2-1)(a^3-1)}\left\{\begin{matrix}\frac{a^{4x}-1}{a^4-1}(5a^3+14a^2+20a+21)\\ -\frac{a^{3x}-1}{a^3-1}(12a^3+32a^2+32a+20)\\ +\frac{a^{2x}-1}{a^2-1}(9a^3+6a^2+6a-5)\\ -\frac{a^x-1}{a-1}(12a^2+6a+2)\end{matrix}\right\}+\frac{b^4}{a^4(a-1)(a^2-1)(a^3-1)}\left\{\begin{matrix}\frac{a^{4x}-1}{a^4-1}(4a^2+6a+14)\\ -\frac{a^{3x}-1}{a^3-1}(4a^3+24a^2+24a+20)\\ +\frac{a^{2x}-1}{a^2-1}(18a^3+24a^2+24a+6)\\ -\frac{a^x-1}{a-1}(14a^3+4a^2+6a)\end{matrix}\right\}\right\} a^x u^5$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Coefficienten lassen sich anders formen und ordnen, sie sind hier so gestellt, dafs sich leicht übersehen läfst, wie insgesammt alle Glieder derselben bis auf das erste eines jeden wegfallen, wenn $x = 1$ gesetzt wird; eine Bedingung, welcher sie entsprechen müssen, obwohl sie so bestimmt

worden, dafs sie vollständig, den ersten ausgeschlossen, mit x zugleich Null werden. Es sind also die Zahlcoefficienten gleicher Potenzen von a, die einem gemeinschaftlichen Faktor in b, c ... zugehören, wenn das Zeichen vor dem $\frac{a^{\mu x}-1}{a^{\mu}-1}$, bei welchem sie stehen, berücksichtiget wird, zusammen stets Null, da die Gröfsen $\frac{a^{\mu x}-1}{a^{\mu}-1}$ für $x=1$ selbst Eins werden. Uebrigens sind die Verbindungen der allgemeinern Faktoren aus den Gröfsen b, c, d ... alle einerlei mit denen in der allgemeinen Formel im vorigen (§. 2.), wo $a=1$ war. Auch mufs diese Formel für y_x in die oben gefundene übergehen, wenn hier $a=1$ gesetzt wird. Dies ist freilich nicht unmittelbar klar, indem $a=1$ genommen, die Coefficienten selbst unendlich zu werden scheinen, indessen gehen die Glieder zu denselben Faktor aus b, c, d ... gehörig, zusammen unter einerlei Nenner gebracht, in Brüche der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ über. Bevor also $a=1$ gesetzt wird, hat man es als eine veränderliche Gröfse zu betrachten, x aber als beständig, und in dieser Voraussetzung Zähler und Nenner der Brüche so oft zu differentiiren, als es die Zahl der Faktoren, welche mit $a=1$ Null werden, erfordert, um den wirklichen Werth derselben zu erhalten.

Nimmt man an, es sey

$$y_{x+1} = (1+y_x)^n - 1;$$

so ist, für $y_0 = u$,

$$y_1 = (1+u)^n - 1$$

also

$$y_2 = (1+y_1)^n - 1 = [(1+u)^n]^n - 1 = (1+u)^{n^2} - 1$$
$$y_3 = (1+y_2)^n - 1 = [(1+u)^{n^2}]^n - 1 = (1+u)^{n^3} - 1$$

u. s. w.

daher

$$y_x = (1+u)^{n^x} - 1,$$

oder entwickelt

$$y_x = n^x . u + \frac{n^x - 1}{2} n^x u^2 + \frac{(n^x-1)(n^x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^x . u^3 + \ldots$$

Die gegebene Gleichung aber in entwickelter Gestalt ist

$$y_{x+1} = n \cdot y_x + \frac{n.n-1}{1.2} y_x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} y_x^3 + \ldots$$

Von dieser ist also die vorhergehende das vollständige Integral oder die nach der gegebenen Form x mal wiederholte Funktion.

Setzt man also a statt n, und in dem obigen allgemeinen Ausdruck von y_x,

$$b = \frac{a.a-1}{1.2}, \; c = \frac{a.a-1.a-2}{1.2.3}, \text{ u. s. w.,}$$

so mufs derselbe durch die Substitution dieser Gröfsen übergehen in

$$y_x = a^x u + \frac{a^x - 1}{2} a^x u^2 + \frac{a^x - 1.a^x - 2}{2.3} a^x u^3 + \ldots,$$

also heben sich dann in den Coefficienten alle a, die im Potenzexponenten nicht x haben, von selbst auf, und jeder Coefficient von $a^{n.x}$, wenn alle die im allgemeinen Ausdruck unter demselben $a^x u^r$ begriffen sind, zusammengezogen werden, mufs in eine bloſse Zahl übergehen, mithin auch ein jeder Coefficient von $a^{n.x} - 1$, weil dieses mit $a^{n.x}$ in dieselben algebraischen Funktionen von a multiplizirt wird, welche also zusammen einen Bruch bilden, dessen Zähler und Nenner aus denselben algebraischen Faktoren bestehen.

Den Quotienten dieses Bruches erhält man aus den vorliegenden besondern Fall, aber auch die allgemeine Formel giebt denselben ohne Schwierigkeit. Denn da man weifs, dafs derselbe von a unabhängig ist, so kann man in der Formel nur $a = o$ setzen, also $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$, $\frac{d}{a} = -\frac{1}{4}$ u. s. w., aber das a^x und die $a^{n.x}$, also die $a^{n.x} - 1$ in derselben müssen ungeändert bleiben. Diese Vergleichung der Coefficienten im Allgemeinen mit denen des besondern Falls soll blos dienen, um einige Eigenschaften jener bemerklich zu machen, da eine vollständigere Erörterung derselben hier nicht beabsichtiget wird.

Dieselbe Methode, welche gedient hat, die x mal wiederholte Funktion y_x nach dem Gesetze gebildet, dafs

$$y_{x+1} = a y_x + b y_x^2 + c y_x^3 + \ldots$$

also das Integral dieser Gleichung zu finden, hat auch noch ihre Anwendung, wenn a, b, c ... veränderlich und gegebene Funktionen von x sind.

Nur gehört die Funktion nicht zu den wiederholten, da bei der Formung jeder folgenden aus der vorhergehenden Funktion die Coefficienten sich ändern, indessen stehen beide Arten doch in Analogie. Es ist leicht zu sehen, dafs auch hier ähnlich wie im ersten Falle bei beständigen Coefficienten

$$y_x = Au + Bu^2 + Cu^3 + \ldots$$

seyn werde, also wird auch y_{x+1} in Folge der gegebenen Gleichung vollkommen den Inhalt und die Form annehmen, welche es hatte, da a, b, c ... beständig waren. Man hat also auch die nämlichen Gleichungen zur Bestimmung von A, B, C ..., wenn man den entstandenen Werth von y_{x+1} mit den formalen

$$y_{x+1} = A_1 . u + B_1 . u^2 + C_1 . u^3 + \ldots$$

vergleicht, nämlich

$$A_1 = aA;\ B_1 = aB + bA^2;\ \text{u. s. w.}$$

aber in diesen Gleichungen sind a, b, c ... gegebene Funktionen von x, also hat man im Allgemeinen zwar Lineargleichungen der Form

$$z_{x+1} = Xz_x + R,$$

wie oben, aber mit veränderlichen Coefficienten zu integriren, so dafs, wenn z nicht A bedeutet, z_x mit x Null wird. Es können daher, so lange die Form der Funktionen a, b, c ... unbestimmt bleibet, auch nur die Werthe von A, B, C ... in bekannten formalen Ausdrücken von z_x aus voriger Gleichung substituirt werden. Nichts desto weniger ist die Gleichung als vollständig integrirt zu betrachten, da sie in Folge dieser Substitutionen auf die blofse Ausführung von Summationen zurückgeführt ist.

§. 4.

Um die allgemeinen Formeln auf besondere Fälle anzuwenden, hat man nur nöthig, die dann bestimmten Werthe von b, c ... zu substituiren.

Es sey $y_{x+1} = \log(1 + y_x)$

oder $y_{x+1} = y_x - \frac{y_x^2}{2} + \frac{y_x^3}{3} - \ldots$

und für $x = 0$, $y = u$, so hat man also in den allgemeinen Resultaten (§. 2.)

$b = -\frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{3}$; ... und es wird also

$$f^x u = u - x\frac{u^2}{2} + (3x_2 + 2x)\frac{u^3}{1.2.3} +$$

$$-(18x_3 + 23x_2 + 6x)\frac{u^4}{1.2.3.4} + (180x_4 + 335x_3 + 180x_2 + 2x)\frac{u^5}{1.2..5} \text{ etc.}$$

In diesem Fall ist für die Bedeutung

$$fu = \log(1+u)$$

$$^2fu = \log[1+\log(1+u)]$$

$$^3fu = \log[1+\log[1+\log(1+u)]]$$

u. s. f.

Man kann also die Funktionen $^x fu$ für x eine ganze Zahl leicht aus den logarithmischen Tafeln haben, und wenn $^x fu$ eine ganze Zahl und ein Bruch, da dies gleich $^{\mu:m}f \,.\, {}^n fu$ ist, zuerst ^{-n}fu aus den Tafeln nehmen, und dann, wenn dies $= 1 + \lambda$ gefunden wird, noch $^{\mu:m}f \,.\, \lambda$ nach den Formeln berechnen. Denn es läfst sich leicht sehn, dafs dieselbe für jeden Werth von x und u schnell convergirt. Da man hier die Werthe $^n fu$ für ganze Zahlen unmittelbar leicht aus den Tafeln haben kann, so tritt der Fall ein, wo die gewöhnliche Interpolationsformel leicht Anwendung findet.

Diese Formeln stellen, wie es der Natur der Sache gemäfs ist, die Logarithmen mit den Zahlen der Logarithmen in einen Funktionszusammenhang. Die erste negative Funktion von u oder ^{-1}fu giebt die Natur der Form f schon zu erkennen. Nämlich da $fu = \log(1+u)$, ^0fu aber, oder $^1f\,{}^{-1}fu$ allgemein gleich u, so ist in diesem Fall

$$\log(1 + {}^{-1}fu) = u$$

also

$$1 + {}^{-1}fu = e^u \text{ und } {}^{-1}fu = e^u - 1.$$

Und in der That, wenn man in der für $^x fu$ gegebenen Formel $x = -1$ setzt, so wird

$$x_3 = -1;\ x_4 = 1;\ x_5 = -1 \text{ u. s. w.},$$

und man erhält:

$$\overset{-1}{f}u = u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots$$

d. i. den Ausdruck für $e^u - 1$. So wird auch $\overset{-2}{f}u$ der Werth von $e^{e^u-1} - 1$ seyn u. s. w.

Es bezieht sich die behandelte Gleichung auf natürliche Logarithmen. Für die gemeinen wäre die Gleichung $y_{x+1} = m \log (1 + y_x)$, wo m die Zahl 0,43429 ..., und sie müfste nach der andern Formel (§. 5.) behandelt werden.

§. 5.

Wenn in der allgemeinen Gleichung, wo Δy durch beständige Coefficienten und Potenzen von y gegeben ist, mehrere derselben Null sind, so hat dies keinen Einfluss auf die Bestimmung des Endresultats für y_x. Man darf also nur in den gefundenen Werthen von B, C etc. diejenigen der Coefficienten b, c etc., welche Null sind, auch so setzen, und erhält dann blos die dem gegebenen Fall angemessenen. Allein es lassen sich auch besondere Formeln dafür unmittelbar angeben. Der Fall, wo:

$$y_{x+1} = y_x + c_3 y_x^3 + c_5 y_x^5 + c_7 y_x^7 + \ldots$$

verdient besonders Berücksichtigung, weil für denselben schon vorhandene Tafeln sonst durch Weitläuftigkeit beschwerliche Rechnung mit diesen Funktionen sehr erleichtern.

Indessen bedarf es der Wiederholung der Ableitung nicht, deren Resultat ist

$$y_x = \ldots\ldots\ldots$$

$$u + c_3 x.u^3 + (c_5 x + 5c_3^2.x_2)\,u^5 + \left\{\begin{array}{l|l|l} c_7 x + 8c_3 c_5 & x_2 + 15c_3^3 & \\ \quad + 3c_3^3 & & \end{array}\right\} u^7$$

$$+ \left\{\begin{array}{l|l|l} c_9 x + 10c_3 c_7 & x_2 + 71c_3^2 c_5 & x_3 + 105c_3^4.x_4 \\ \quad + 5c_5 c_5 & \quad + 51c_3^4 & \\ \quad + 16c_3^2 c_5 & & \\ \quad + c_3^4 & & \end{array}\right\} u^9$$

$$+ \left\{\begin{array}{l|l|l|l} c_{11} x + 12c_3 c_9 & x_2 + 105c_3^2 c_7 & x_3 + 744c_3^3 c_5 & x_4 + 945c_3^5.x_5 \\ \quad + 12c_5 c_7 & \quad + 101c_3 c_5^2 & \quad + 774c_3^5 & \\ \quad + 27c_3^2 c_7 & \quad + 595c_3^3 c_5 & & \\ \quad + 25c_3 c_5^2 & \quad + 102c_3^5 & & \\ \quad + 12c_3^3 c_5 & & & \end{array}\right\} u^{11}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nimmt man die bestimmte Gleichung

$$y_{x+1} = \sin y_x$$

also

$$y_{x+1} = y_x - \frac{y_x^3}{1.2.3} + \frac{y_x^5}{1...5} - \ldots$$

so hat man in die vorigen Formeln zu setzen

$$c_3 = -\frac{1}{1.2.3}, \quad c_5 = \frac{1}{1.2.3.4.5}, \quad c_7 = -\frac{1}{1...7},$$

und erhält alsdenn

$$\overset{x}{f}u = \overset{x}{\sin} u = \ldots.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u - x_1 \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + (10x_2 + x_1)\frac{u^5}{1.2..5} - (350x_3 + 126x_2 + x)\frac{u^7}{1...7} \\ \qquad + (29900x_4 + 20244x_3 + 1870x_2 + x)\frac{u^9}{1...9} - \end{array} \right.$$

Da für $x = 1$, $x_1 = 1$ und alle folgenden x_2, x_3 ... gleich Null, so ist die Formel in diesem Fall die, von welcher man ausging, nämlich sin u. Für $x = 2$ wird $x_2 = 1$; und x_3, x_4 ... werden Null.

Es ist nicht nöthig, u gröfser als 1,5727 ... anzunehmen. Indessen so lange x eine ganze positive Zahl, wird man bequem die wiederholte Funktion $\overset{x}{\sin} u$ durch die Tafeln finden, besonders wenn statt den Graden, nach denen die Sinusse folgen, der Werth der Bogen in Theilen des Halbmessers als Einheit angegeben wären. Die Dezimalsinustafeln erfüllen fast diese Erfordernifs.

Allein $\overset{x}{\sin} u$ für x einen Bruch zu suchen, reichen die Tafeln allein nicht mehr hin, und man ist genöthiget, zur Formel zurückzukehren. Wenn also $\overset{x}{\sin} u = \overset{m+(\mu:n)}{\sin} . u$, so darf man nur zuerst $\sin u$, wo m ganze Zahl, aus den Tafeln nehmen, findet sich derselbe gleich σ, so nimmt man noch $\overset{\mu:n}{\sin} \sigma$ nach der Formel, $\frac{\mu}{n}$ sey ein positiver oder negativer Bruch, wo der Vortheil entsteht, dafs $\frac{\mu}{n}$ nicht über $\frac{1}{2}$, und σ um so kleiner wird, je gröfser m, im Falle m positiv.

Auch im Falle wo m negativ, dienen die Tafeln zur Berechnung von $\overset{x}{\sin} u$.

Denn

Denn für $x = -1$ geht die allgemeine Formel für $\overset{x}{\sin} u = \overset{-1}{\sin} u$ über in die Reihe

$$\overset{-1}{\sin} u = u + \frac{1}{1.2.3} u^3 + \frac{1.1.3.5}{1.2.3.4.5} u^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{1 \ldots 7} u^7 + \ldots$$

wird also zum Bogen, dessen Sinus u.

In der That, da $\overset{-1}{\sin} \overset{o}{\sin} u = \overset{o}{\sin} u = u$, so wird

$$\overset{-1}{\sin} u = \text{Arc. sin } u.$$

Da nun auch

$$\overset{-1}{\sin} u = \overset{-1}{\sin} (\sin u) = \text{A. sin (A. sin. u)}$$

der Bogen, dessen Sinus der Bogen des vorigen A. sin u ist, u. s. w., so sieht man leicht, dafs wenn u so grofs ist, dafs $\overset{-m}{\sin} u > 1$, alsdenn $\overset{-m-1}{\sin} u$ unmöglich ist, weil letzteres den Bogen zu einem Sinus gröfser als 1 angeben sollte. Die Formel für $\overset{x}{\sin} u$ deutet dies auch an, denn sie hat für x negativ lauter positive Coefficienten, und wird daher divergent, wenn u oder x, oder beide vereint, die Grenzen der möglichen Voraussetzung überschreiten.

Ich halte mich nicht auf, zu zeigen, wie die Tafeln möglichen Falles zu der Berechnung negativ wiederholter Funktionen dienen können.

Man hat also in dieser Form $\overset{x}{\sin} u = y$ eine solche, welche für ein bestimmtes u stets mögliche Werthe hat, die mit stets zunehmendem x kleiner werden können, als jede Gröfse, für negative x hingegen über eine gewisse Grenze hinaus unmöglich sind. Dieser Fall tritt nicht selten bei Naturphänomenen ein, wo diese Funktionsform also für Interpolation beachtet zu werden verdient, da sie überdem unendlich verschiedener Grade im Gesetze der Zu- und Abnahme mit der Aenderung von x fähig, und nicht wie die gemeine algebraische Form für jeden Werth von x einen reellen Werth für y giebt. Man kann aber zum Behuf der Interpolation sehr wohl eine Form annehmen, wie

$$y = A + Bx + \ldots + a \sin^{\alpha'} v + b \sin^{\beta x'} w + \ldots,$$

wo die Constanten nach Umständen, welche man will, seyn können. Nichts hindert aber a, b ..., selbst v und w als Funktionen von x zu nehmen. Ueberhaupt aber kann man mit Zuziehung dieser transcendenten Funktion

sin u und anderer ähnlicher Natur, noch alle die algebraischen Verbindungen derselben unter sich und mit der Hauptveränderlichen vereinen, welche gestatten, in vorgegebenen Fällen die beständigen Gröfsen zu bestimmen, um den gegebenen Werthen zu genügen.

Nimmt man die Gleichung

$$y_{x+1} = y_x - \frac{y_x^3}{3} + \frac{y_x^5}{5} - \frac{y_x^7}{7} + \ldots$$

und substituirt derselben gemäfs in die allgemeine Formel statt c_3, c_5, $c_7 \ldots$ die Zahlenwerthe $-\frac{1}{3}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$ so erhält man

$$fu = u - 2x \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + (40x_2 + 24x) \frac{u^5}{1.2.3.4.5}$$

$$- (2800x_3 + 3248x_2 + 720x) \frac{u^7}{1 \ldots 7} + \ldots$$

Hier ist $\overset{x}{f}u = (\overset{x}{\text{Arc}} . \overset{x}{\text{tang}})\, u = \overset{-x}{\text{tang}} . u$,

und für x negativ

$$\overset{-x}{f}u = (\overset{x}{\text{tang}}\ \overset{x}{\text{Arc}})\, u = (\overset{-x}{\text{Arc}} . \overset{-x}{\text{tang}})\, u = \overset{x}{\text{tang}}\, u.$$

Setzt man $x = -1$, so wird zufolge der Formel für $\overset{x}{f}u$,

$$\overset{-1}{f}u = u + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{2u^5}{1 \ldots 5} + \frac{17u^7}{1 \ldots 7} + \ldots$$

also gleich (tang Arc) u, oder wie man gewöhnlich schreibt, tang u.

Die Reihe für $\overset{x}{f}u$ convergirt bekanntlich schon langsam für $x = 1$, wenn u nicht klein genug ist. Allein die vorhandenen Tafeln heben diese Schwierigkeit, weil man, wenn u zu grofs ist, statt $\overset{x}{f}u$ setzen kann $\overset{-m}{f} . \overset{x}{f} . \overset{m}{f}u$, wo m eine ganze Zahl, also sich $\overset{m}{f}u$ vermittelst den Tafeln, hiervon das $\overset{x}{f}$ vermittelst der Formel oder gewöhnlichen Interpolationsmethoden nehmen läfst. Dann geben wieder die Tafeln umgekehrt von dieser Gröfse das $\overset{-m}{f}$.

Für die positiven Werthe von x nimmt $\overset{x}{f}u$, wie grofs auch u, ungemein schnell ab, allein wird nie Null, wie grofs auch x. Für negative Werthe von x hingegen wächst $\overset{x}{f}u$, wie klein auch u, doch sehr schnell, und

es geschieht dann, dafs die folgenden Werthe nicht positiv bleiben, sondern negativ werden, allein mit einem zwischenliegenden doppelten unendlichen positiven und negativen Werth. Uebrigens verdienen diese eigenthümlichen Gröfsenarten allerdings eine nähere Betrachtung, da sie hier nur beiläufig als besondere Fälle der allgemeineren Ansicht vorgestellt worden sind. Die Formen $y_{x+1} = a.\sin.y_x$ oder $y_{x+1} = a.\text{tang}.y_x$ geben nach der zweiten allgemeinen Formel (§. 3.) die Entwickelung von y_x als Funktion von x und u.

Was aber Beispielsweise bei diesen Funktionen gezeigt worden, dafs in derselbigen Formel, sowohl der Ausdruck des Sinus oder der Tangente durch den Bogen, als auch der umgekehrte des Bogens, nämlich durch seinen Sinus oder dessen Tangente sich findet, ist als eine Eigenschaft der allgemeinen Formeln nicht zu übersehen, da diese die Umkehrung der Reihen als einzelnen Fall in sich begreifen.

Denn man setze, es sey

$$r = au + bu^2 + cu^3 + \ldots,$$

so kann man den Ausdruck in u als eine Funktion von u betrachten, also $r = fu = fu$ setzen. Sucht man also die wiederholte Funktion $\overset{x}{f}u$ nach dem Gesetz, welches $\overset{1}{f}u$ schon ausdrückt, und findet

$$\overset{x}{f}u = A_x u + B_x u^2 + C_x u^3 + \ldots$$

macht dann $x = -1$, so hat man

$$\overset{-1}{f}u = A_{-1} u + B_{-1} u^2 + C_{-1} u^3 + \ldots$$

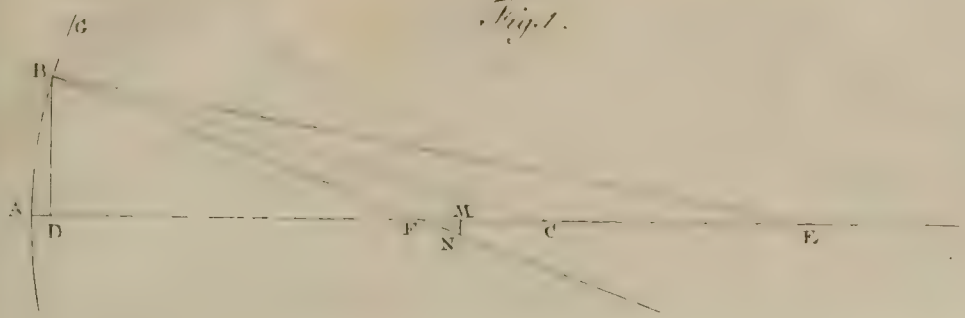
Allein diese Gleichung hat statt, welchen Werth man auch für u annimmt. Man setze also beiderseits fu statt u, so hat man, da $\overset{-1}{f}.fu = u$, und $fu = r$,

$$u = A_{-1} r + B_{-1} r^2 + C_{-1} r^3 + \ldots$$

also ist die vorgegebene Gleichung umgekehrt, a sey der Einheit gleich oder nicht. Die allgemeinen Formeln (§§. 2, 3, 5.) geben also, wenn man in denselben $x = -1$ setzt, die Formeln für die Umkehrung der Reihen.

Zur Abhandlung
über die Theorie der Metallspiegel.

Fig. 1.



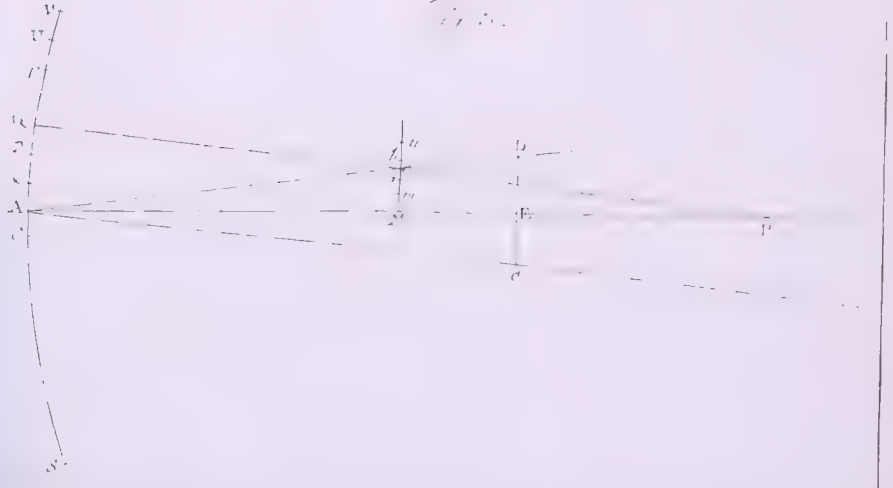
Zu Hrn. Eytelwein
Abhand. üb. d. Beweg. d. Wa
M. Kl: 1814 - 15

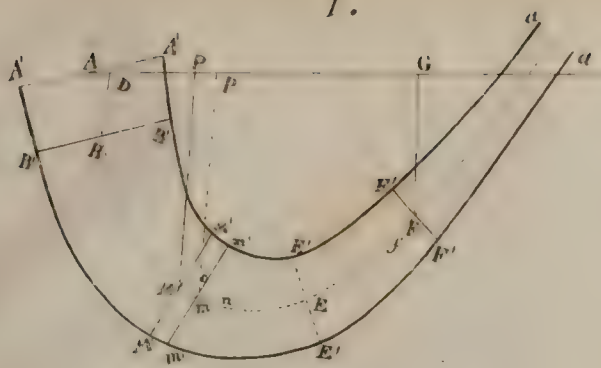
Zur Abhandlung
über die Theorie der Metallspiegel.

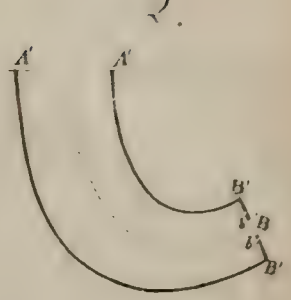
Fig. 1.

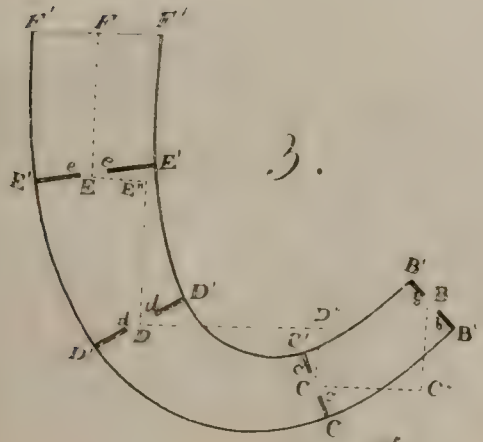
Fig. 2.

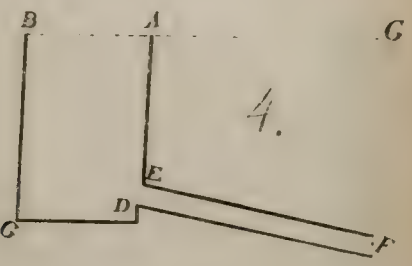
Fig. 3.

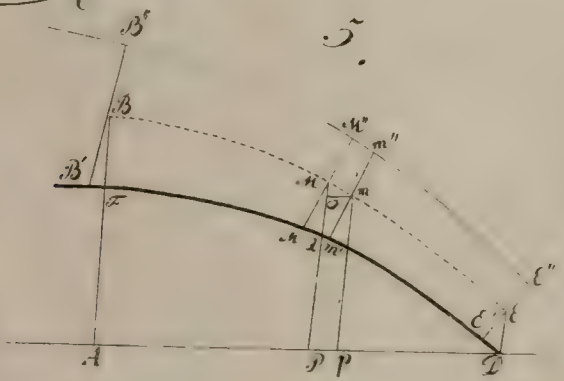




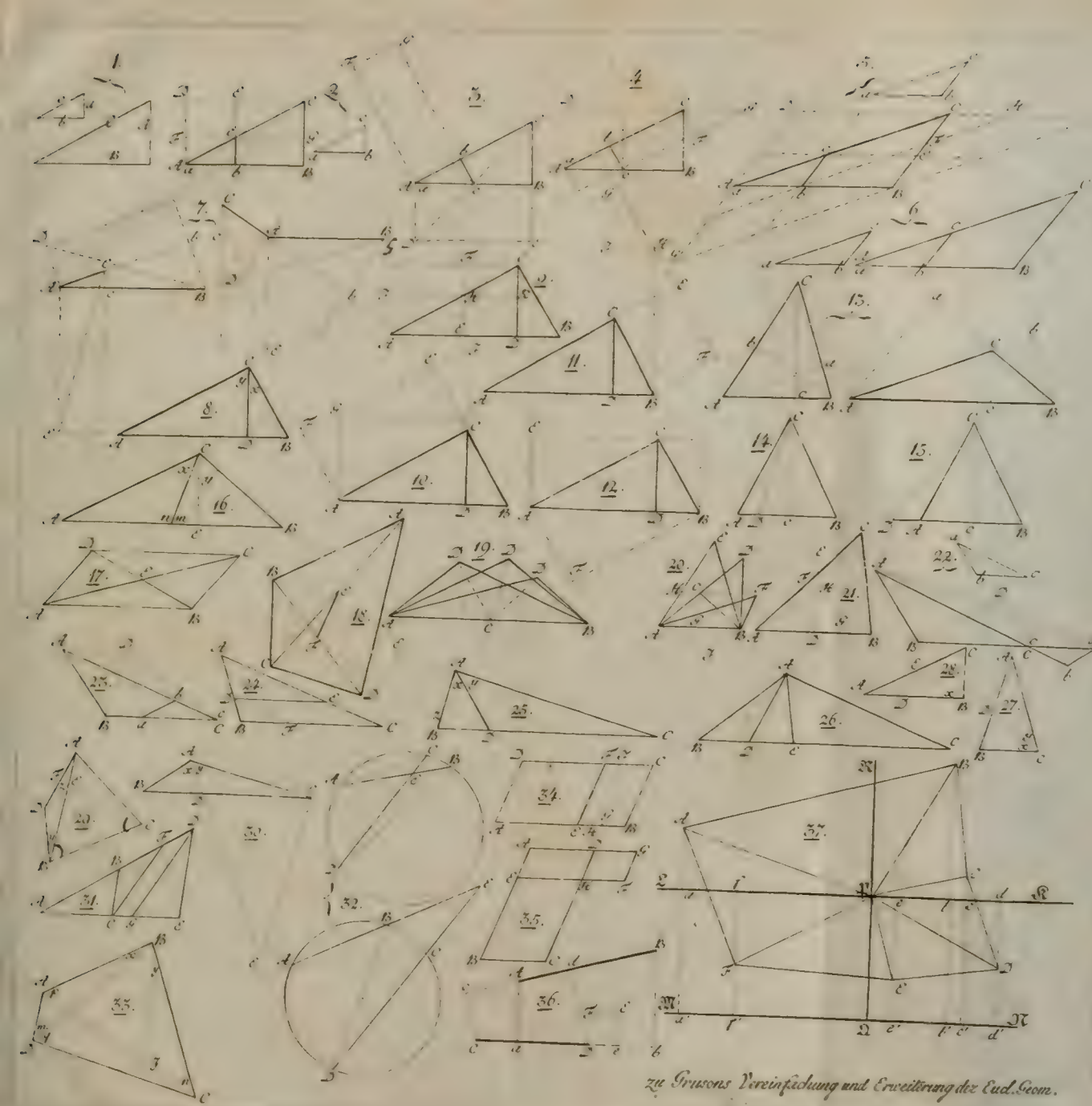








Zu Hrn. Edelcrantz a.s.
Abhand. üb. d. Bewegn. d. Wassers
M. K.: 1814 - 15



zu Grusons Vereinfachung und Erweiterung der Eucl. Geom.